

MASTER

Wisselwerking tussen een scheefinvallende golf en een zwak-inhomogeen plan-parallel medium

van de Beld, G.J.

Award date:
1971

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

1517 bse

AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK

Groep Theoretische Elektrotechniek A

STUDIEBIBLIOTHEEK
ELEKTROTECHNIEK
E - HOOGBOUW

Wisselwerking tussen een scheef-invallende
golf en een zwak-inhomogeen plan-parallel
medium.

door

G.J. van de Beld

Verslag van het afstudeerwerk verricht
in de groep Theoretische Elektrotechniek A
bij Prof.dr. H. Bremmer

januari 1971

ETA-03-1971.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

I N H O U D S O P G A V E.

1. Inleiding.	3
2. De Born-reeks als oplossing in het medium.	6
3. Born-benadering van de algemene oplossing in symbolische vorm.	9
4. Born-benadering van de algemene oplossing in conventionele vorm.	12
5. Forward-scattering.	13
5.1. Born-benadering.	13
5.2. Splitsing in twee golven.	15
6. Backward-scattering.	19
6.1. Born-benadering.	19
6.2. Splitsing in twee golven.	20
6.3. Amplitude-verhouding van backward- en forward-scattering.	20
7. Totale scattering voorgesteld door drie golven.	21
8. Born-benadering, geldig zowel voor, binnen als achter het medium.	22
8.1. Afleiding algemene uitdrukking.	22
8.2. Asymptotische benadering.	25
8.3. Verificatie in het geval van constante brekingsindex.	26
8.3.1. Uitgaande van het resultaat uit 8.1.	27
8.3.2. Uitgaande van de conventionele Born-benadering.	29
8.3.3. Geometrische benadering.	31
9. De betrouwbaarheid van de Born-benadering.	33
10. Literatuur.	35

1. Inleiding.

Er wordt in dit verslag een beschrijving gegeven van de verschijnselen die optreden wanneer een golf beïnvloed wordt door een inhomogeen medium. Als medium is gekozen een medium van eenvoudige vorm, namelijk planparallel. In het aangenomen assenstelsel strekt het zich in de x- en y-richting oneindig ver uit, terwijl het in de z-richting een dikte D bezit (zie fig. 1). Bovendien wordt het medium zwak-inhomogeen verondersteld, zodat de brekingsindex kan worden weergegeven door:

$$n(x, y, z, t) = 1 + \delta n(x, y, z, t) \quad \text{met } |\delta n| \ll 1$$

Buiten het aangegeven medium wordt vacuüm verondersteld ($n = 1$).

De invallende golf is vlak en monochromatisch en valt in onder een willekeurige invalshoek op $z=0$. Deze golf voldoet aan de golfvergelijking in vacuüm: $\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} u = 0$

Met als oplossing:

$$u_p(x, y, z, t) = e^{i(k_{x_0}x + k_{y_0}y + k_{z_0}z - \omega_0 t)} = e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}$$

De richting is gelijk aan de golfvector \vec{k}_0 met $k_0 = \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

In het medium voldoet U aan de daar geldende golfvergelijking:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0 \quad \text{of} \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = \varphi(x, y, z, t) = \frac{2}{c^2} \delta n(x, y, z, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Met als 'oplossing':

$$u(P, t) = u_p(P, t) - \frac{1}{4\pi} \int d\tau_Q \cdot \varphi(Q, t - PQ/c) / PQ$$

Hierin is: P observatie-punt $0 < z_Q < D$

Q bronpunt

$u_p(P, t)$ de oplossing van de golfvergelijking in vacuüm, ofwel de invallende golf.

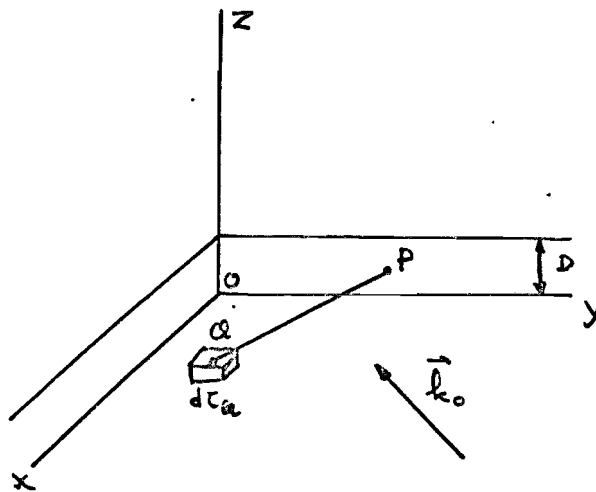


fig. 1.

Bij het oplossen van deze integraal vergelijking wordt gebruik gemaakt van symbolische uitdrukkingen, die operatoren bevatten die werken op het erna komende deel. Om over te gaan op conventionele uitdrukkingen wordt gebruik gemaakt van de Fourier-transformatie. Om dit te illustreren wordt het voorbeeld gegeven van een golf die zich voortplant in de positieve z-richting en invalt op een tweedimensionale scatterer op $z = 0$. De invallende golf is monochromatisch en kan voorgesteld worden door:

$$u_p = e^{i(k_0 z - \omega t)}$$

De golf verlaat de scatterer op $z = +0$ waarbij geldt

$$u = u(x, y, 0) \cdot e^{-i\omega t}$$

$u(x, y, 0)$ is een complexe functie; de modulus is bepalend voor de absorptie en het argument geeft de fase verandering weer. Voor $z > 0$ voldoet de golf weer aan de golfvergelijking in de lege ruimte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (k_0^2 + \Delta_2) u = 0 \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Met als symbolische oplossing

$$u(x, y, z) = e^{i z \sqrt{k_0^2 + \Delta_2}} \cdot f(x, y) + e^{-i z \sqrt{k_0^2 + \Delta_2}} \cdot g(x, y)$$

De ruimte $z > 0$ wordt bronvrij verondersteld zodat in samenhang met de tijdafhankelijke factor $e^{-i\omega t}$ volgt $g(x, y) \equiv 0$, zodat

$$u(x, y, z) = e^{i z \sqrt{k_0^2 + \Delta_2}} \cdot u(x, y, 0)$$

de symbolische oplossing is.

Om over te gaan op de conventionele uitdrukking introduceren we de Fourier transformatie volgens

$$u(x, y, 0) = \int dk_x \int dk_y G(k_x, k_y) \cdot e^{i(k_x x + k_y y)}; \quad G(k_x, k_y) = \int d\xi \int d\eta U(\xi, \eta, 0) \cdot \frac{e^{-i(k_x \xi + k_y \eta)}}{(2\pi)^2}$$

zodat

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\xi \int d\eta U(\xi, \eta, 0) \cdot \int dk_x \int dk_y \cdot e^{i(k_x(x-\xi) + k_y(y-\eta) + z \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2})}$$

$$\left(\text{want } \frac{\partial}{\partial x} = i k_x, \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} = i k_y \right)$$

Voeren we nu poolcoördinaten in

$$k_x + i k_y = \lambda \cdot e^{i\varphi}$$

dan geeft de integratie over φ een Bessel-functie

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \int d\eta u(\xi, \eta, 0) \int d\lambda \cdot \lambda \cdot \int_0^\infty \left\{ \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right\} \cdot e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}$$

In deze vorm kunnen we de afgeleide naar z van de Sommerfeld integraal (2.2a) herkennen zodat we tenslotte als resultaat vinden de bekende uitdrukking

$$u(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \int d\xi \int d\eta u(\xi, \eta, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{e^{i k_0 \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}$$

de conventionele oplossing.

Zowel de symbolische als de conventionele oplossing beschrijven de scattering volledig. Opvallend is de beknoptheid van de symbolische oplossing, reden om voor het algemeen gestelde probleem in eerste instantie ervan gebruik te maken om de formules overzichtelijker te houden.

In de volgende paragrafen worden uitdrukkingen afgeleid voor de forward en backward scattering met bepaalde veronderstellingen die een bruikbare benadering van het probleem opleveren; zoals bekend mag worden verondersteld is het niet mogelijk om een gesloten oplossing voor dit probleem te geven. Er wordt een uitdrukking afgeleid die geldig is zowel binnen als buiten het medium. Deze wordt getoetst voor het geval van een constante brekingsindex van het medium.

Ten slotte worden een aantal opmerkingen gemaakt in hoeverre de gevolgde methode betrouwbaar is.

2. De Born-reeks als oplossing in het medium.

Zoals reeds in de inleiding is opgemerkt is de 'oplossing' een integraal vergelijking, die er na substitutie van $\varphi(x, y, z, t)$ als volgt uitziet :

$$U(P, t) = U_p(P, t) - \frac{1}{2\pi c^2} \int \frac{d\tau_\alpha}{p\alpha} \cdot \delta n(\alpha, t - \frac{p\alpha}{c}) \cdot \frac{\partial^2 U(\alpha, t - \frac{p\alpha}{c})}{\partial t^2} \quad (2.0)$$

Een dergelijke integraalvergelijking kan opgelost worden met behulp van de onderstaande Neumann-Liouville reeks:

$$U(P, t) = \sum_{N=0}^{\infty} U_N(P, t) \quad U_0 = U_p(P, t) \quad (2.1)$$

Hierin is $U_0(P, t) = U_p(P, t)$, terwijl de volgende termen bepaald kunnen worden met behulp van de recurrente betrekking (2.2).

$$U_N(P, t) = -\frac{1}{2\pi c^2} \int \frac{d\tau_\alpha}{p\alpha} \cdot \delta n(\alpha, t - \frac{p\alpha}{c}) \cdot \frac{\partial^2 U_{N-1}(\alpha, t - \frac{p\alpha}{c})}{\partial t^2}$$

of

$$U_N(P, t) = -\frac{1}{2\pi c^2} \int \frac{d\tau_\alpha}{p\alpha} \cdot \varphi_{N-1}(\alpha, t - \frac{p\alpha}{c}) \quad (2.2)$$

met $N \geq 1$.

Door substitutie van deze reeks in (2.0), daarbij gebruikmakend van (2.2) kan direkt aangetoond worden dat de gegeven betrekking correct is. In het algemeen vinden we voor U_N een $3N$ -voudige integraal, waarin N achtereenvolgende integraties over het medium moeten worden uitgevoerd. De integrand bevat daarbij het produkt van de δn -waarden in N verschillende integratie punten. U_N stelt de bijdrage voor na N achtereenvolgende scattereffecten. De reeks (2.1) wordt de Born-reeks genoemd, terwijl de benadering van deze reeks door de eerste twee termen $U_0 + U_1$ de Born-benadering wordt genoemd. In de volgende paragrafen wordt bijna uitsluitend met deze benadering gewerkt.

Overigens kunnen een aantal eenvoudige uitdrukkingen worden afgeleid, die het verband weergeven voor de totale scattering enerzijds en de forward- en backward-scattering anderzijds. Daartoe substitueren we in (2.2) de Taylor-reeks (2.3).

$$\varphi(\alpha, t - \frac{p\alpha}{c}) = e^{(x_\alpha - x_p) \frac{\partial}{\partial x_p} + (y_\alpha - y_p) \frac{\partial}{\partial y_p} - \frac{p\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\varphi(x_p, y_p, z_\alpha, t) \quad (2.3)$$

De recurrente betrekking gaat daardoor over in :

$$u_N(P,t) = -\frac{1}{2\pi c^2} \int dz_\alpha \cdot \varphi_{N-1}(x_p, y_p, z_\alpha, t) \cdot \int dx_\alpha \cdot \int dy_\alpha \cdot \frac{e^{(x_\alpha - x_p) \frac{\partial}{\partial x_p} + (y_\alpha - y_p) \frac{\partial}{\partial y_p} - \frac{p\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial t}}}{p\alpha}$$

Gaan we nu over op polaire variabelen , λ en α

$$x_\alpha - x_p = \lambda \cdot \cos \alpha$$

$$y_\alpha - y_p = \lambda \cdot \sin \alpha$$

zodat

$$p\alpha = \sqrt{\lambda^2 + (z_p - z_\alpha)^2}$$

dan vinden we, na integratie over α

$$u_N(P,t) = -\frac{1}{c^2} \int dz_\alpha \cdot \varphi_{N-1}(x_p, y_p, z_\alpha, t) \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot d\lambda \cdot \int_0^\pi (\lambda i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2}}) \cdot \frac{e^{-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\lambda^2 - (i|z_p - z_\alpha|)^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - (i|z_p - z_\alpha|)^2}}$$

Met behulp van de Sommerfeld-integraal

$$(2.2.a) \quad \frac{e^{i k_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^\infty \lambda \cdot d\lambda \cdot \int_0^\pi (\lambda \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} |z|}}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}$$

toegepast op de integrand van de λ -integraal vinden we

$$u_N(P,t) = -\frac{i}{c^2} \int dz_\alpha \cdot \varphi_{N-1}(x_p, y_p, z_\alpha, t) \cdot \frac{e^{i|z_p - z_\alpha| \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}}}}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}}$$

Om over te gaan op de forward scattering in het medium moet z_Q geïntegreerd worden van 0 tot z_p zodat

$$|z_p - z_Q| = (z_p - z_Q)$$

De forward-scattering wordt aangegeven door \uparrow , de backward scattering door \downarrow .

Voor de forward-scattering vinden we

$$\hat{u}_N(p,t) = -\frac{i}{c^2} \int_0^{z_p} dz_q \cdot \delta_n(x_p, y_p, z_q, t) \cdot \frac{e^{i(z_p - z_q) \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}}}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{N-1}$$

Na Differentiatie naar z_p volgt hieruit de onderstaande betrekking, waarbij de index p is weggelaten:

$$\frac{\partial \hat{u}_N}{\partial z} - i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \hat{u}_N = \frac{-i}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}} \cdot \delta_n \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{N-1}$$

Sommatie over alle N geeft (2.4)

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \hat{u} = \frac{-i}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}} \cdot \delta_n \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot u \quad (2.4)$$

Een zelfde type betrekking kan worden afgeleid voor de backward scattering. In dit geval vindt de integratie uiteraard plaats van z_p tot D , zodat

$$|z_p - z_q| = -(z_p - z_q)$$

De afleiding verloopt verder identiek en resulteert in (2.5)

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \hat{u} = \frac{i/c^2}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}} \delta_n \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \quad (2.5)$$

Zoals gemakkelijk valt in te zien volgt uit de betrekkingen (2.4) en (2.5) ook nog

$$\frac{\partial u}{\partial z} = i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}} (\hat{u} - \hat{u}) \quad (2.6)$$

Deze vergelijkingen geven het verband tussen de forward-scattering en de backward-scattering enerzijds en anderzijds de totale scattering.

3. Born-benadering van de algemene oplossing in symbolische vorm.

De Born-benadering wordt gegeven door :

$$U = U_0 + U_1 \quad \text{met } U_0 = U_p$$

Uit de inleiding volgt

$$U = U_p - \frac{1}{4\pi} \int d\tau_{\alpha} \cdot \frac{\varphi(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}, t - \frac{PQ}{c})}{PQ}$$

met

$$\varphi = \frac{2}{c^2} \delta n \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_p \quad \text{en } U_p = e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

$$\text{dus } \varphi = -2k_0^2 \delta n U_p$$

Substitutie geeft

$$U_1 = \frac{k_0^2}{2\pi} \cdot e^{-i\omega_0 t} \int d\tau_{\alpha} \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_{\alpha} + k_0 PQ)} \cdot \frac{\delta n(\alpha, t - PQ/c)}{PQ}$$

Op dezelfde wijze als (2.3) voeren we voor δn een Taylor-reeks in

$$\delta n(\alpha, t - PQ/c) = e^{(x_{\alpha} - x_p) \frac{\partial}{\partial x_p} + (y_{\alpha} - y_p) \frac{\partial}{\partial y_p} - \frac{PQ}{c} \frac{\partial}{\partial t}} \cdot \delta n(x_p, y_p, z_{\alpha}, t)$$

zodat

$$U_1 = \frac{k_0^2}{2\pi} \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)} \cdot \int d\tau_{\alpha} \cdot e^{i k z_0 (z_{\alpha} - z_p)} \cdot \delta n(x_p, y_p, z_{\alpha}, t) \cdot \int dx_{\alpha} \int dy_{\alpha} \cdot \frac{e^{(x_{\alpha} - x_p)(i k x_0 + \frac{\partial}{\partial x_p}) + (y_{\alpha} - y_p)(i k y_0 + \frac{\partial}{\partial y_p}) - PQ(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0)}}{\sqrt{(x_p - x_{\alpha})^2 + (y_p - y_{\alpha})^2 + (z_p - z_{\alpha})^2}}$$

Ook nu voeren we polaire variabelen in volgens

$$x_{\alpha} - x_p = \lambda \cos \alpha$$

$$y_{\alpha} - y_p = \lambda \sin \alpha$$

PQ wordt nu

$$PQ = \left\{ \lambda^2 + (z_p - z_{\alpha})^2 \right\}^{1/2}$$

De integraal over x_Q en y_Q gaat nu over in

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\rho\alpha} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha \cdot e^{(x_Q - x_P)(i k_{x_0} + \frac{\partial}{\partial x_P}) + (y_Q - y_P)(i k_{y_0} + \frac{\partial}{\partial y_P}) - \rho\alpha (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0)}$$

Integratie over α geeft

$$\int_0^\infty d\lambda \cdot \lambda \cdot 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha \left(\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial}{i\partial x_P} + k_{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{i\partial y_P} + k_{y_0}\right)^2} \right) \cdot \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 + (z_P - z_Q)^2} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0\right)}}{\sqrt{\lambda^2 + (z_P - z_Q)^2}}$$

Passen we nu weer de Sommerfeld integraal toe dan gaat dit over in

$$2\pi \cdot e^{-|z_P - z_Q| \sqrt{\left(k_{x_0} + \frac{\partial}{i\partial x_P}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{i\partial y_P} + k_{y_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(k_{x_0} + \frac{\partial}{i\partial x_P}\right)^2 + \left(k_{y_0} + \frac{\partial}{i\partial y_P}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0\right)^2}}$$

Substitutie van dit resultaat geeft

$$u_1 = k_0^2 \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_P - \omega_0 t)} \int dz_Q \cdot e^{i k_{z_0} (z_Q - z_P)} \cdot \delta n(x_P, y_P, z_Q, t) \cdot \frac{e^{-|z_P - z_Q| \sqrt{\left(k_{x_0} + \frac{\partial}{i\partial x_P}\right)^2 + \left(k_{y_0} + \frac{\partial}{i\partial y_P}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0\right)^2}}{\sqrt{\left(k_{x_0} + \frac{\partial}{i\partial x_P}\right)^2 + \left(k_{y_0} + \frac{\partial}{i\partial y_P}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0\right)^2}} \quad (3.1)$$

Deze uitdrukking is de Bornbenadering in symbolische vorm. De erin voorkomende differentiaal operatoren werken op δn . Om over te gaan op de conventionele vorm wordt in de volgende paragraaf de Fourier transformatie voor δn ingevoerd.

Zoals reeds uit de afleiding blijkt verloopt deze nagenoeg gelijk aan die in 2. Uitgaande van de daar gevonden uitdrukking voor U_N vinden we uiteraard hetzelfde. Stellen we namelijk $N = 1$, dan vinden we voor

$$\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_P - \omega_0 t)} \right) \cdot \delta n(x_P, y_P, z_Q, t)$$

en na uitvoering van de differentiatie naar t

$$\varphi = -\omega_0^2 \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_P - \omega_0 t)} \cdot \delta n(x_P, y_P, z_Q, t)$$

Substitutie in de formule voor U_N ($N = 1$) geeft

$$U_1 = -i k_0^2 \int dz_\alpha \cdot e^{i|z_p - z_\alpha| \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}} \cdot \frac{e^{i(\bar{k}_0 \vec{z}_p - \omega_0 t)}}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}} \cdot \delta_n(x_p, y_p, z_\alpha, t)$$

In deze betrekking werken de operators

$$\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

op het produkt van δ_n en U_p ($= e^{i(\bar{k}_0 \vec{z}_p - \omega_0 t)}$),

Laten we deze operator alleen werken op δ_n , dan gaan de differentiaal operators over in

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_p} + i k_{x_0} \\ \frac{\partial}{\partial y_p} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial y_p} + i k_{y_0} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0 \end{aligned}$$

Voeren we dit in dan vinden we voor U_1

$$(3.1) \quad U_1 = k_0^2 \cdot e^{i(\bar{k}_0 \vec{z}_p - \omega_0 t)} \int dz_\alpha \cdot e^{i k_{z_0} (z_\alpha - z_p)} \cdot \delta_n(x_p, y_p, z_\alpha, t) \cdot \frac{e^{-|z_p - z_\alpha| \sqrt{(k_{x_0} + \frac{\partial}{i \partial x_p})^2 + (k_{y_0} + \frac{\partial}{i \partial y_p})^2 + (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0)^2}}}{\sqrt{(k_{x_0} + \frac{\partial}{i \partial x_p})^2 + (k_{y_0} + \frac{\partial}{i \partial y_p})^2 + (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i k_0)^2}}$$

Uiteraard komt dit overeen met het reeds eerder gevonden resultaat. Op deze wijze komt nog eens tot uiting dat bij het gebruik van formules in symbolische vorm duidelijk moet zijn aangegeven waarop de voorkomende operators werken.

4. Born-benadering van de algemene oplossing in conventionele vorm.

De Fourier-transformatie van δn naar vier variabelen luidt

$$\delta n(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G_4(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (4.1)$$

met als inverse transformatie

$$G_4(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta n(\vec{r}', t') \cdot e^{-i(\vec{k}\vec{r}' - \omega t')} \quad (4.2)$$

Substitutie van (4.1) doen de onderstaande operatoren overgaan in:

$$\frac{\partial}{\partial x_p} = i k_x \quad (\vec{k} = [k_x, k_y, k_z])$$

$$\frac{\partial}{\partial y_p} = i k_y$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

Voor U_1 vinden we dan

$$U_1 = i k_0^2 \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)} \cdot \int d\vec{k} \int d\omega \cdot \frac{G_4(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}_p - \omega t)}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2}} \cdot \int dz_\alpha \cdot e^{i|x_p - z_\alpha| \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2}} \cdot e^{-i(z_p - z_\alpha)(k_{z_0} + k_z)} \quad (4.3)$$

Uit (4.3) blijkt dat de gescatterde golf een ruimtelijk spectrum bezit dat eenvoudig uitgedrukt kan worden in $k_{x_0} + k_x$, $k_{y_0} + k_y$ en $k_{z_0} + k_z$. Het tijdspectrum bevat frekwenties in de omgeving van de frekwentie van de invallende golf. In zijn totaliteit hangt het spectrum af van de fluctuaties van het medium dat de scattering veroorzaakt en een factor die samenhangt met de voortplanting van de golf door het turbulente medium.

5. Forward-scattering.

5.1. Born-benadering.

Uitgaande van de Born-benadering voor de totale scattering kan zeer eenvoudig een uitdrukking worden afgeleid voor de forward-scattering, binnen het medium. De forward-scattering in $P(x_p, y_p, z_p)$ vinden we door z_0 te integreren van 0 tot z_p zodat

$$|z_p - z_0| = (z_p - z_0)$$

Uit (4.3) volgt dan

$$\hat{u}_1 = i k_0^2 \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)} \cdot \int d\vec{k} \int d\omega \cdot G_4(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k} \vec{r}_p - \omega t)}$$

$$\cdot \int_0^{z_p} dz_0 \cdot \frac{e^{-i(z_p - z_0) \left\{ k_{z_0} + k_z - \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2} \right\}}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2}}$$

Na de integratie over z_0 en samenvoeging van de exponentiële termen gaat dit over in

$$(5.1.1) \quad \hat{u}_1 = k_0^2 \int d\vec{k} \int d\omega \cdot \frac{G_4(\vec{k}, \omega)}{\left\{ k_{z_0} + k_z - \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2} \right\} \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2}} \cdot \left[\frac{e^{i\left\{ (\vec{k}_0 + \vec{k}) \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t \right\}}}{e^{i\left\{ (\vec{k}_0 + \vec{k}) \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t - (k_{z_0} + k_z)z_p + z_p \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2} \right\}}} \right]$$

De complexe amplitude van de golf kunnen we als volgt benaderen

$$u_p + u_{sc} = (1 + \delta A + i\delta\phi) \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)} \quad (5.1.2)$$

waarbij rekening is gehouden met het feit dat

$$|\delta A| \ll 1$$

$$|\delta\phi| \ll 1$$

Om δA en $\delta \phi$ te bepalen maken we gebruik van de symbolische uitdrukking voor U_1

$$\hat{U} = k_0^2 \int dz_\alpha \cdot e^{ik_{z_0}(z_\alpha - z_p)} \cdot \frac{\delta n(x_p, y_p, z_\alpha, t)_0}{e^{-(z_p - z_\alpha) \sqrt{(k_{x_0} + \frac{\partial}{\partial x})^2 + (k_{y_0} + \frac{\partial}{\partial y})^2 + (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - ik_0)^2}}}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{(k_{x_0} + \frac{\partial}{\partial x})^2 + (k_{y_0} + \frac{\partial}{\partial y})^2 + (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - ik_0)^2}}$$

We maken nu de volgende benaderingen in exponentiële termen

$$\sqrt{\quad} = ik_{z_0} + \frac{1}{k_{z_0}} \left(k_{x_0} \frac{\partial}{\partial x_p} + k_{y_0} \frac{\partial}{\partial y_p} + \frac{k_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{1}{ik_{z_0}}$$

met $\Delta t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

In de noemer stellen we

$$\sqrt{\quad} = ik_{z_0}$$

\hat{U}_1 gaat daardoor over in (5.1.3)

$$\hat{U}_1 = \frac{k_0^2}{ik_{z_0}} \int dz_\alpha \left\{ 1 - \frac{(z_\alpha - z_p)}{k_{z_0}} \left(k_{x_0} \frac{\partial}{\partial x_p} + k_{y_0} \frac{\partial}{\partial y_p} + \frac{k_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{2} \right\} \delta n$$

(5.1.3)

zodat

$$(5.1.4) \delta A = - \frac{k_0^2}{2k_{z_0}^2} \int_0^{z_p} dz_\alpha (z_p - z_\alpha) \left\{ \Delta t - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \delta n(x, y, z, t)$$

$$(5.1.5) \delta \phi = \frac{k_0^2}{k_{z_0}} \int_0^{z_p} dz_\alpha \cdot \delta n(x, y, z, t) - \frac{k_0^2}{k_{z_0}^2} \int_0^{z_p} dz_\alpha (z_p - z_\alpha) \left\{ k_{x_0} \frac{\partial}{\partial x_p} + k_{y_0} \frac{\partial}{\partial y_p} + \frac{k_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \delta n(x, y, z, t)$$

Bij loodrechte inval gaat dit over in

$$(5.1.6) \delta A = - \frac{1}{2} \int_0^{z_p} dz_\alpha (z_p - z_\alpha) \left\{ \Delta t - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \delta n(x, y, z, t)$$

$$(5.1.7) \delta \phi = k_0 \int_0^{z_p} dz_\alpha \delta n(x, y, z, t) - \frac{k_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{z_p} dz_\alpha (z_p - z_\alpha) \delta n(x, y, z, t)$$

Wat overeenkomt met het resultaat in Lit.1 pag.14,15.

De eerste termen die hierin voorkomen worden ook gevonden in het geval van een niet-tijdafhankelijk medium, terwijl de tweede term in de fase-afwijking een fase fluctuatie is tengevolge van het tijdafhankelijke medium. De fysische betekenis van de eerste bijdragen is het lens-effect voor de amplitude fluctuaties en geometrisch-optische variaties in de fase van de golf.

5.2. Splitsing in twee golven.

Uit (5.1.1.) volgt als resultaat het optreden van twee golven met dezelfde amplitude en frekwentie (zie ook fig.2).

Voor de totale fase van de eerste golf geldt

$$\vec{k}_I \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t$$

met $\vec{k}_I = \vec{k}_0 + \vec{k}_2 = [k_{x_0} + k_x, k_{y_0} + k_y, k_{z_0} + k_z]$

$$k_I = \sqrt{(k_{x_0} + k_x)^2 + (k_{y_0} + k_y)^2 + (k_{z_0} + k_z)^2}$$

Dit is de gemoduleerde primaire golf; modulatie met een golf met golfgetal k_2 , zgn. akoëtische golf.

Voor de tweede golf vinden we

$$\vec{k}_{II} \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t$$

met $\vec{k}_{II} = [k_{x_0} + k_x, k_{y_0} + k_y, \sqrt{(\frac{\omega_0 + \omega}{c})^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2}]$

$$k_{II} = (\omega_0 + \omega)/c$$

Dit is een golf met golfgetal overeenkomend met de voortplanting in vacuum, echter met een frekwentie $\omega_0 + \omega$ en kan beschouwd worden als de gebroken primaire golf.

Om de optredende golven nader te beschouwen schrijven we (5.1.1) als volgt

$$U_1 = k_0^2 \int d\vec{k} \int d\omega. G_4(\vec{k}, \omega). e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)} \cdot e^{i(\vec{k} \vec{r}_p - \omega t)} \cdot \frac{1 - e^{-i\alpha z_p}}{\alpha \beta} \quad (5.2.1)$$

waarbij α en β gegeven worden door

$$\alpha = k_{z_0} + k_z - \sqrt{(\frac{\omega_0 + \omega}{c})^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2} \quad (5.2.2)$$

$$\beta = \sqrt{(\frac{\omega_0 + \omega}{c})^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2} \quad (5.2.3)$$

zodat ook

$$\alpha = k_{z_0} + k_z - \beta \quad (5.2.4)$$

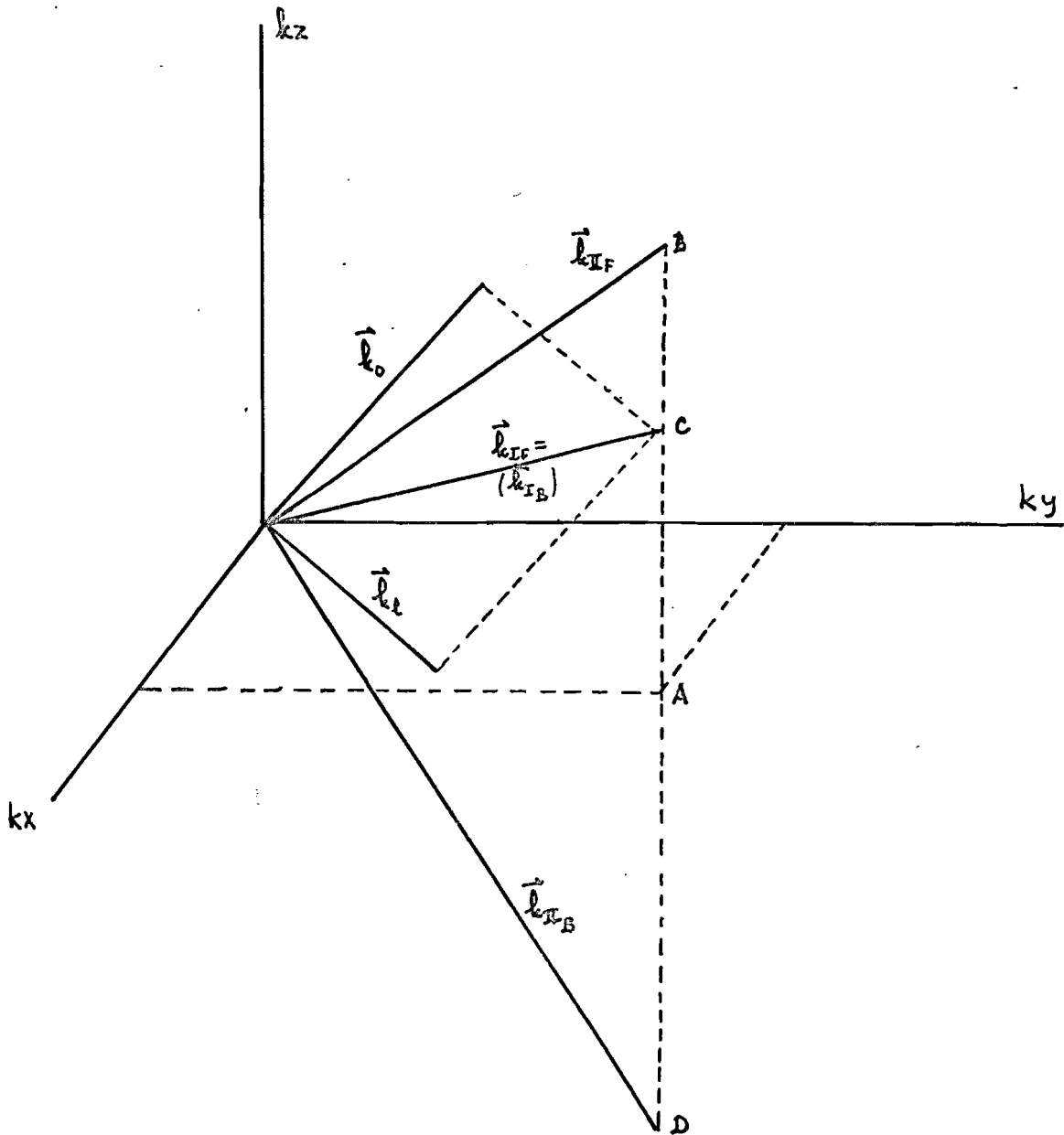


fig.2. Onderlinge samenhang van de golfgetal-vectoren.

$$AB = AD = \left\{ \left(\frac{\omega_0 + \omega}{c} \right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2 \right\}^{1/2}$$

$$AC = k_{z_0} + k_z$$

k_0 : invallende golf

k_1 : akoestische golf

k_{IF} : forward golf

k_{IIB} : backward golf

$k_{IF} = k_{IB}$: afhankelijk van k_1 een forward- of backward-golf

De cindpunten van de na scattering optredende golfgetal-vectoren liggen op één lijn evenwijdig aan de z-as.

De onderlinge samenhang van de golfgetal-vectoren is weergegeven in fig.2, hieruit blijkt dat de eindpunten ervan op één lijn liggen (zie ook toelichting bij fig.2).

Er ontstaan blijkbaar twee resonantie gevallen, namelijk

$$\beta = 0 \text{ en } \alpha = 0.$$

Het eerste geval heeft geen praktische betekenis, het geeft golven die zich loodrecht voortplanten t.o.v. de hoofd voortplantingsrichting, want dan geldt

$$\left[(k_{x_0} + k_x)^2 + (k_{y_0} + k_y)^2 \right]^{-1/2} \approx c/\omega_0$$

Hieraan wordt inderdaad voldaan in de omgeving van $\beta = 0$. Er treedt degeneratie op naar golven loodrecht op de invallende golf.

In het tweede geval treedt een limiet op, die leidt tot

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-i\alpha z_p}}{\alpha} = +i z_p$$

Dit wekt de suggestie dat er divergentie optreedt voor $z_p \rightarrow \infty$. Echter alvorens deze limiet te nemen moet voor $z_p \rightarrow \infty$ eerst de limiet beschouwd worden

$$\lim_{z_p \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-i\alpha z_p}}{\alpha} = P\left(\frac{1}{\alpha}\right) + i\pi \delta(\alpha)$$

P is de Cauchy-hoofdwaarde. Deze limiet heeft tot gevolg dat U_1 niet divergeert, wat bovendien ook blijkt uit de in 8.2. bepaalde asymptotische benadering. (Lit.3.)

$\alpha = 0$ geeft als voorwaarde

$$\left| k_0 + k_e \right|^2 = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{c} \right)^2 \quad (5.2.5)$$

Deze voorwaarde wordt zeer eenvoudig in het stationaire geval dan geldt namelijk

$$\omega = 0$$

zodat (5.2.5) overgaat in

$$\left| k_0 + k_e \right|^2 = k_0^2$$

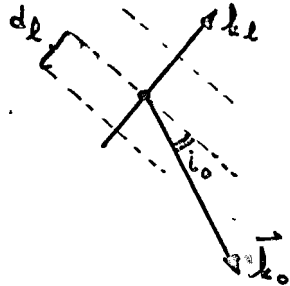
Na bepaling van de modulus gaat dit over in

$$(k_{x_0} + k_x)^2 + (k_{y_0} + k_y)^2 + (k_{z_0} + k_z)^2 = k_0^2$$

en uitgeschreven

$$k_l^2 = -2(k_{x_0} k_x + k_{y_0} k_y + k_{z_0} k_z) = -2 \vec{k}_0 \cdot \vec{k}_l$$

Aan de hand van de onder-staan-de figuur



kan deze uitdrukking ook geschreven worden als

$$k_l = 2k_0 \sin i_0$$

$$\text{of } \lambda_0 = 2d_l \sin i_0 \quad \text{met } d_l = 2\pi/k_l$$

Dit is de bekende uitdrukking voor Braggse interferentie, zodat dit geval beschouwd kan worden als een uitbreiding daarvan.

De Braggse interferentie berustend op forward scattering hangt af van twee verschillende golven die aan elkaar gelijk worden wanneer aan de resonantie voorwaarde is voldaan. Deze twee golven zijn de gemoduleerde primaire golf en de gebroken golf. In 8. zal worden aangetoond dat op grote afstand slechts die component van het spectrum van de akoestische golf optreedt, waarbij voldaan is aan de resonantie voorwaarde

6. Backward-scattering.

6.1. Born-benadering.

Op dezelfde wijze als bij de forward-scattering kan een uitdrukking worden afgeleid voor de backward-scattering. Uit (4.3) vinden we na substitutie van de integratie grenzen z_p en D , waarbij tevens

$$|z_p - z_\alpha| = -(z_p - z_\alpha)$$

voor U_1 :

$$U_1 = i k_0^2 \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)} \cdot \int d\vec{k} \int d\omega \cdot G_4(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k} \vec{r}_p - \omega t)} \cdot \int_{z_p}^D dz_\alpha \cdot e^{i(z_\alpha - z_p) \left\{ k_{z_0} + k_z + \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2} \right\}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2}}$$

Na integratie over z_α en samenvoeging van de exponentiële termen gaat dit over in

$$U_1 = k_0^2 \int d\vec{k} \int d\omega \cdot G_4(\vec{k}, \omega) \cdot \frac{e^{i(\vec{k}_0 + \vec{k}) \vec{r}_p + i(D - z_p)(k_{z_0} + k_z + \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c}\right)^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2})} - e^{i(\vec{k}_0 + \vec{k}) \vec{r}_p}}{\alpha' \beta} \cdot e^{i(\omega_0 + \omega)t}$$

Op dezelfde wijze als (5.2.1) volgt

$$U_1 = -k_0^2 \int d\vec{k} \int d\omega \cdot G_4(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)} \cdot e^{i(\vec{k} \vec{r}_p - \omega t)} \cdot \frac{(1 - e^{-i\alpha' z_p})}{\alpha' \beta}$$

met β overeenkomstig (5.2.3) en

$$\alpha' = k_{z_0} + k_z + \beta$$

6.2. Splitsing in twee golven.

Uit (6.1.1) zien we dat er ook nu twee golven optreden met dezelfde frekwentie en amplitude. Voor de onderlinge samenhang van de golfgetal-vectoren kan verwezen worden naar fig. 2. Voor de totale fase van de eerste golf geldt

$$\vec{k}_I \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t$$

$$\vec{k}_I = \vec{k}_0 + \vec{k}_e = [k_{x_0} + k_x, k_{y_0} + k_y, k_{z_0} + k_z]$$

$$k_I = [(k_{x_0} + k_x)^2 + (k_{y_0} + k_y)^2 + (k_{z_0} + k_z)^2]^{1/2}$$

Deze golfgetal -vector treedt ook op bij forward-scattering, het is de gemoduleerde primaire golf.

Voor de tweede golf geldt

$$\vec{k}_{II} \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t$$

$$\vec{k}_{II} = [k_{x_0} + k_x, k_{y_0} + k_y, -\sqrt{(\frac{\omega_0 + \omega}{c})^2 - (k_{x_0} + k_x)^2 - (k_{y_0} + k_y)^2}]$$

$$\text{en } k_{II} = (\omega_0 + \omega) / c$$

De tweede golf is weer een golf met golfgetal-vector overeenkomend met voortplanting in vacuum. Een zelfde beschouwing als in 5.2 kan voor de resonantie gevallen worden gehouden. Dit is echter weinig belangrijk omdat in het medium zowel de forward-als de backward golven aanwezig zijn, terwijl de verhouding ertussen klein is (zie 6.3), zodat de backward-scattering verwaarloosbaar is.

6.3. Amplitude-verhouding van backward- en forward-scattering.

Uit (5.1.1) en (6.1.1) volgt

$$A_{\vec{k}_I} \frac{|\dot{U}_I|}{|\dot{U}|} = \frac{\alpha}{\alpha'} \approx \frac{\omega/c}{2k_0}$$

Onder voorwaarde dat $k_{z_0} \neq 0$ is A van de orde $(\omega/c)/k_0$, dus voor een zwak turbulent medium is de backward-scattering zeer klein en nagenoeg verwaarloosbaar.

7. Totale scattering voorgesteld door drie golven.

Er is reeds opgemerkt dat er bij de forward-en backward scattering een golf optreedt met golfvector $\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{k}_1$, deze kunnen derhalve samengevoegd worden. Stellen we de totale scattering voor door U_{sc} dan is :

$$U_{sc} = \overset{\uparrow}{U}_1 + \overset{\downarrow}{U}_1 + \overset{\uparrow\downarrow}{U}_1$$

met:

$$\overset{\uparrow}{U}_1 = -k_0^2 \int d\vec{k} \int d\omega \cdot G_4(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i\{(\vec{k}_0 + \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t\}} \cdot \frac{e^{-i\alpha z_p}}{\alpha \beta}$$

$$\overset{\downarrow}{U}_1 = k_0^2 \int d\vec{k} \int d\omega \cdot G_4(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i\{(\vec{k}_0 + \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t\}} \cdot \frac{e^{i(D-z_p)\alpha'}}{\alpha' \cdot \beta}$$

$$\overset{\uparrow\downarrow}{U}_1 = 2 k_0^2 \int d\vec{k} \int d\omega \cdot G_4(\vec{k}, \omega) \cdot \frac{e^{i\{(\vec{k}_0 + \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_p - (\omega_0 + \omega)t\}}}{\alpha' \cdot \alpha}$$

- $\overset{\uparrow}{U}_1$ is altijd in forward-richting
- $\overset{\downarrow}{U}_1$ is altijd in backward-richting
- $\overset{\uparrow\downarrow}{U}_1$ is òf in forward- òf in backward-richting, afhankelijk van de akoestische golf (k_l).

Uit de bovenstaande voorstelling blijkt nog eensduidelijk dat als resonantie gevallen optreden :

Forward : $\alpha = k_{z_0} + k_z - \beta = 0$

Backward: $\alpha' = k_{z_0} + k_z + \beta = 0$

Alleen bij deze voorwaarden worden $\overset{\uparrow}{U}_1$ en $\overset{\uparrow\downarrow}{U}_1$ resp. $\overset{\downarrow}{U}_1$ en $\overset{\uparrow\downarrow}{U}_1$ aan elkaar identiek. In de volgende paragraaf wordt aangetoond dat er slechts één component van het spectrum van de akoestische golf optreedt, namelijk die welke voldoet aan de resonantie voorwaarde, uiteraard geldt dit alleen op grote afstand.

8. Born-benadering, geldig zowel voor, binnen als achter het medium.

8.1. Afleiding algemene uitdrukking.

Om deze uitdrukking af te leiden wordt uitgegaan van het gedeelte van (2.0) dat de scattering beschrijft. Daar het een Born-benadering betreft stellen we in deze integraal

$$u = u_p = e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

We vinden nu voor U_1

$$U_1 = \frac{k_0^2}{2\pi} \int d\tau \alpha \cdot e^{i\{\vec{k}_0 \vec{r}_\alpha - \omega_0(t - R\alpha/c)\}} \cdot \frac{\delta n(\alpha, t - R\alpha/c)}{R\alpha} \quad (8.1.1)$$

Gebruikmakend van de zeefeigenschap van de delta-functie kan ook de integratie naar de tijd worden ingevoerd

$$U_1 = \frac{k_0^2}{2\pi} \int d\tau \alpha \int d\tau' \delta n(\alpha, \tau') \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_\alpha - \omega_0 \tau')} \cdot \frac{\delta(t - R\alpha/c - \tau')}{R\alpha} \quad (8.1.2)$$

Door de invoering van de delta-functie breedt de Green-functie op die de oplossing is van de golfvergelijking in een homogene ruimte

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u = -\delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z) \cdot \delta(t) \quad (8.1.3)$$

met als oplossing

$$u = \frac{\delta(t - R\alpha/c)}{4\pi R\alpha} \quad (8.1.4)$$

In (8.1.2) treedt deze functie op met verschoven argument. Om de Fourier-transformatie hiervan te bepalen, gaan we uit van de inverse transformatie van de Laplace-transformatie van de Green-functie (zie ook Lit2, 11^e en 12^e voordracht)

$$\frac{\delta(t - R\alpha/c)}{4\pi R\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int d\vec{p} \int d\eta \cdot \frac{e^{\vec{p} \vec{r}_\alpha + \eta t}}{\eta^2/c^2 - |\vec{p}|^2} \quad (8.1.5)$$

$$\vec{p} = [p_1, p_2, p_3]$$

We kunnen nu over gaan op de Fourier transformatie door invoering van

$$\begin{aligned} p_1 &= i s_1 \\ p_2 &= i s_2 & q &= i \tau' \\ p_3 &= i s_3 \\ \text{of } \vec{p} &= i \vec{s} \end{aligned}$$

(8.1.5) gaat dan over in

$$\frac{\delta(t - p a/c)}{4\pi p a} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{s} \int d\tau' \cdot \frac{e^{i(\vec{s} \cdot \vec{p} a + \tau' t)}}{|\vec{s}|^2 - \tau'^2/c^2} \quad (8.1.6)$$

Rekening houdend met het verschoven argument, geeft substitutie van (8.1.6) in (8.1.2)

$$U_1 = \frac{k_0^2}{8\pi^4} \int d\tau'_\alpha \int d\tau e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{\tau}'_\alpha - \omega_0 \tau)} \cdot \delta_n(\alpha, \tau) \cdot \int d\vec{s} \int d\tau' \cdot \frac{e^{i\{\vec{s} \cdot (\vec{\tau}'_\alpha - \vec{\tau}) + \tau'(t - \tau)\}}}{|\vec{s}|^2 - \tau'^2/c^2} \quad (8.1.7)$$

Verwisseling van de volgorde van integratie geeft

$$U_1 = \frac{k_0^2}{8\pi^4} \int d\vec{s} \int d\tau' \cdot \frac{e^{i(\vec{s} \cdot \vec{\tau}'_\alpha + \tau' t)}}{|\vec{s}|^2 - \tau'^2/c^2} \cdot \int d\tau'_\alpha \int d\tau \cdot e^{-i\{(\vec{s} - \vec{k}_0) \cdot \vec{\tau}'_\alpha + (\omega_0 + \tau') \tau\}} \quad (8.1.8)$$

Nu is

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \int d\tau'_\alpha \int d\tau \cdot e^{-i\{(\vec{s} - \vec{k}_0) \cdot \vec{\tau}'_\alpha + (\omega_0 + \tau') \tau\}} \quad (8.1.9)$$

juist de Fourier transformatie van de fluctuatie in de brekingsindex, naar

$$\vec{s} - \vec{k}_0, -\omega_0 - \tau'$$

Stellen we deze voor door

$$G_4(\vec{s} - \vec{k}_0, -\omega_0 - \tau')$$

Substitutie in (8.1.8) geeft

$$U_1 = 2k_0^2 \int d\vec{s} \int d\tau' \cdot \frac{e^{i(\vec{s}\vec{r}_p + \tau't)}}{|\vec{s}|^2 - \tau'^2/c^2} \cdot G_4(\vec{s} - \vec{k}_0, -\omega_0 - \tau') \quad (8.1.10)$$

Het effect van de Fourier-transformatie kan gereduceerd worden tot een operator voor de integraties

$$U_1 = 2k_0^2 \cdot G_4\left(-\vec{k}_0 - i\frac{\partial}{\partial r_p}, -\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \int ds \int d\tau \cdot \frac{e^{i(\vec{s}\vec{r}_p + \tau't)}}{|\vec{s}|^2 - \tau'^2/c^2} \quad (8.1.11)$$

waarbij

$$\frac{\partial}{\partial r_p} = \left[\frac{\partial}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial y_p}, \frac{\partial}{\partial z_p} \right]$$

Nu stellen de laatste integralen weer een Green -functie voor, zodat (8.1.11) ook gelijk is aan

$$U_1 = 8\pi^3 k_0^2 \cdot G_4\left(-i\frac{\partial}{\partial r_p} - \vec{k}_0, -\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \frac{\delta(t - r_p/c)}{r_p} \quad (8.1.12)$$

Of uitgeschreven

$$U_1 = 8\pi^3 k_0^2 \cdot G_4\left(-k_{x_0} - i\frac{\partial}{\partial x_p}, -k_{y_0} - i\frac{\partial}{\partial y_p}, -k_{z_0} - i\frac{\partial}{\partial z_p}, -\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \delta\left(t - \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}/c\right) / \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2} \quad (8.1.13)$$

De uitdrukkingen (8.1.12) en (8.1.13), die aan elkaar identiek zijn uiteraard, zijn geldig in de gehele ruimte. Dit is in te zien uit het feit dat de operator G_4 duidelijk afhankelijk is van de plaats van het observatiepunt. In de volgende paragrafen zal dit gedemonstreerd worden voor het geval dat de brekingsindex constant is.

8.2. Asymptotische benadering.

Om te komen tot een far-distance benadering van (8.1.13) maken we gebruik van het spectrum van de Green-functie

$$\frac{\delta(t - r_p/c)}{r_p} = \frac{1}{2\pi r_p} \int_{-\infty - ic}^{+\infty + ic} d\omega \cdot e^{-i\omega(t - r_p/c)} \quad (8.2.1)$$

Waarbij we bij voorkeur de identieke vergelijking (8.2.2) gebruiken omdat daarin tot uiting komt de spectrale verdeling rond ω_0 .

$$\frac{\delta(t - r_p/c)}{r_p} = \frac{1}{2\pi r_p} \int_{-\infty + ic}^{+\infty - ic} d\omega \cdot e^{-i(\omega_0 + \omega)(t - r_p/c)} \quad (8.2.2)$$

Na substitutie van (8.2.2) in (8.1.13) vinden we voor U_1 :

$$U_1 = 4\pi^2 k_0^2 \cdot G_4 \left(-i \frac{\partial}{\partial r_p} - k_0, -\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \int d\omega \cdot \frac{e^{-i(\omega_0 + \omega)(t - r_p/c)}}{r_p} \quad (8.2.3)$$

Nu is

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \cdot \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)(r_p/c - t)}}{r_p} = \frac{i(\omega_0 + \omega)}{c} \cdot \frac{x_p}{r_p} \left\{ 1 - \frac{1}{i(\omega_0 + \omega) \frac{r_p}{c}} \right\} \cdot \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)(r_p/c - t)}}{r_p}$$

en onder voorwaarde dat

$$r_p \gg \frac{c}{\min |\omega_0 + \omega|} \quad (8.2.4)$$

vinden we de onderstaande benaderingen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} &\approx i \frac{\omega_0 + \omega}{c} \cdot \frac{x_p}{r_p} \\ \frac{\partial}{\partial y_p} &\approx i \frac{\omega_0 + \omega}{c} \cdot \frac{y_p}{r_p} \\ \frac{\partial}{\partial z_p} &\approx i \frac{\omega_0 + \omega}{c} \cdot \frac{z_p}{r_p} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -i(\omega_0 + \omega) \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Substitutie doet (8.2.3) overgaan in

$$U_1 = 4\pi^2 k_0^2 \int d\omega \frac{e^{-i(\omega_0 + \omega)(t - r_p/c)}}{r_p} \cdot G_4\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c} \frac{x_p}{r_p} - k_{x_0}, \frac{\omega_0 + \omega}{c} \frac{y_p}{r_p} - k_{y_0}, \frac{\omega_0 + \omega}{c} \frac{z_p}{r_p} - k_{z_0}, \omega\right) \quad (8.2.6)$$

wat ook in beknopte vorm weergegeven wordt door

$$U_1 \approx 4\pi^2 k_0^2 \int d\omega \cdot G_4\left(\frac{\omega_0 + \omega}{c} \vec{u}_r - \vec{k}_0, \omega\right) \frac{e^{-i(\omega_0 + \omega)(t - r_p/c)}}{r_p} \quad (8.2.7)$$

Hierin is \vec{u}_r de eenheidsvector in de richting \vec{r}_p

$$\vec{u}_r = \left[\frac{x_p}{r_p}, \frac{y_p}{r_p}, \frac{z_p}{r_p} \right]$$

Uit (8.2.7) blijkt welke bijdrage wordt geleverd door elke frekwentie die voorkomt in het lopende golfspectrum van de deviatie in de brekingsindex. Er treden bijdragen op met golfgetal-vector k_l :

$$\vec{k}_l = \frac{\omega_0 + \omega}{c} \vec{u}_r - \vec{k}_0$$

met

$$|\vec{k}_0 + \vec{k}_l| = \left| \frac{\omega_0 + \omega}{c} \right|$$

Dit komt juist overeen met de resonantie voorwaarde $\alpha = 0$. Met andere woorden alle bijdragen voldoen aan de conditie dat de gemoduleerde golf en de gebroken golf identiek zijn. Bovendien voldoen zij aan de uitbreiding van de Braggse relatie voor roosters die ontstaan zijn door lopende golven. Op grote afstand kunnen we dus alleen die golfparen (gebroken- en gemoduleerde golf) waarnemen waarbij voldaan is aan de resonantie voorwaarde.

8.3. Verificatie in het geval van constante brekingsindex.

Op een drietal manieren zal U_1 bepaald worden, zowel binnen als buiten het medium, om te in 8.1 gevonden betrekking te toetsen. In de eerste plaats door middel van (8.1.8), daarna uitgaande van (4.3) (met uitbreiding tot buiten het medium) en tenslotte door een geometrische benadering.

8.3.1. Uitgaande van het resultaat van 8.1.

Om U_1 gemakkelijk te kunnen bepalen gaan we uit van (8.1.8) :

$$U_1 = \frac{k_0^2}{8\pi^4} \int d\vec{s} \int dt' \frac{e^{i(\vec{s}\vec{r}_p + \tau' t)}}{|\vec{s}|^2 - \tau'^2/c^2} \int d\tau_Q \int d\tau \cdot e^{-i\{(\vec{s} - \vec{k}_0)\vec{r}_p - (\omega_0 + \tau)\tau\}} \cdot \delta n \quad (8.1.8)$$

Aangezien δn constant is gaat dit over in

$$U_1 = \frac{k_0^2}{8\pi^4} \int d\vec{s} \int dt' \frac{e^{i(\vec{s}\vec{r}_p + \tau' t)}}{|\vec{s}|^2 - \tau'^2/c^2} \cdot \delta n \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_Q \cdot e^{i(k_{x_0} - s_1)x_Q} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_Q \cdot e^{i(k_{y_0} - s_2)y_Q} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \cdot e^{i(\omega_0 + \tau)\tau} \int_0^D dz_Q \cdot e^{i(k_{z_0} - s_3)z_Q} \quad (8.3.1.1)$$

Integratie naar x_Q , y_Q en τ geven een drietal δ -functies

$$U_1 = \frac{k_0^2}{\pi} \int d\vec{s} \int dt' \frac{e^{i(\vec{s}\vec{r}_p + \tau' t)}}{|\vec{s}|^2 - \tau'^2/c^2} \cdot \delta n \cdot \delta(k_{x_0} - s_1) \cdot \delta(k_{y_0} - s_2) \cdot \delta(\omega_0 + \tau') \cdot \int_0^D dz_Q \cdot e^{i(k_{z_0} - s_3)z_Q} \quad (8.3.1.2)$$

Door de zeef eigenschap van de delta-functie kunnen we de integraties naar s_1 , s_2 en τ' uitvoeren. Integreren we bovendien naar z_Q dan gaat (8.3.1.2) over in


$$U_1 = \frac{i k_0^2}{\pi} \cdot e^{i(k_{x_0} x_p + k_{y_0} y_p - \omega_0 t)} \cdot \delta n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} ds_3 \cdot \frac{e^{i s_3 z_p} \left(e^{i(k_{z_0} - s_3)D} - 1 \right)}{(s_3 - k_{z_0})(s_3^2 - k_{z_0}^2)} \quad (8.3.1.3)$$

Ten slotte rest nog alleen de integratie naar s_3 , de uitkomst ervan is afhankelijk van het teken van de exponent van de e-macht in de integrand en dus van de waarde van z_p .

Maken we onderscheid tussen voor, binnen en achter het medium dan vinden we achtereenvolgens :

a) Voor het medium ($z_p < 0$)

De integratie kan nu plaatsvinden langs de aangegeven weg, met behulp van de residu-stelling vinden we

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds_3 \cdot \frac{e^{is_3 z_p} \cdot (e^{i(k_{z0} - s_3)D} - 1)}{(s_3 - k_{z0})^2 (s_3 + k_{z0})} =$$


$$= \frac{\pi i}{2k_{z0}^2} (e^{i2k_{z0}D} - 1) \cdot e^{-ik_{z0}z_p}$$

en voor U_1 :

$$U_1 = -\frac{k_0^2}{k_{z0}^2} (e^{i2k_{z0}D} - 1) \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

met

$$\vec{k}_0 = [k_{x0}, k_{y0}, -k_{z0}]$$

b) Binnen het medium ($0 < z_p < D$)

In dit geval moet de integrand gesplitst worden in twee delen, vanwege het teken in de exponent.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds_3 \cdot \frac{e^{is_3 z_p} \cdot (e^{i(k_{z0} - s_3)D} - 1)}{(s_3 - k_{z0})^2 (s_3 + k_{z0})} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds_3 \cdot \frac{e^{ik_{z0}D} \cdot e^{is_3(z_p - D)}}{(s_3 - k_{z0})^2 (s_3 + k_{z0})} - \int_{-\infty}^{+\infty} ds_3 \cdot \frac{e^{ik_{z0}z_p} \cdot e^{i(s_3 - k_{z0})z_p}}{(s_3 - k_{z0})^2 (s_3 + k_{z0})}$$



De tweede integraal heeft een tweevoudig nulpunt in de noemer, echter hetzelfde nulpunt in de teller, na reeksontwikkeling van de teller volgt

$$= \frac{\pi i}{2k_{z0}^2} \cdot e^{-ik_{z0}(z_p - 2D)} + \frac{\pi z_p}{k_{z0}} \cdot e^{ik_{z0}z_p}$$

Zodat we voor U_1 binnen het medium vinden

$$U_1 = \frac{ik_0^2}{k_{z0}} \delta n \cdot z_p \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

$$= \frac{k_0^2}{2k_{z0}^2} \delta n \cdot e^{i2k_{z0}D} \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

c) Achter het medium ($z_p > D$)

Op dezelfde wijze vinden we nu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds_3 \cdot \frac{e^{is_3 z_p} (e^{i(k_{z0} - s_3)D} - 1)}{(s_3 - k_{z0})^2 (s_3 + k_{z0})} =$$

$$= \frac{\pi D}{k_{z0}} \cdot e^{ik_{z0}z_p}$$

en voor U_1

$$U_1 = \frac{ik_0^2}{k_{z0}} \delta n \cdot D \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

8.3.2. Uitgaande van de conventionele Born-benadering.

Als δn constant is volgt uit (4.3) gemakkelijk

$$U_1 = \frac{ik_0^2}{k_{z0}} \delta n \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

$$\cdot \int dz_a \cdot e^{ik_{z0}(z_a - z_p) + i|z_p - z_a|k_{z0}}$$

waarbij gebruik gemaakt is van $k_o = (k_{x_o}^2 + k_{y_o}^2 + k_{z_o}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Hierbij moeten we bedenken dat deze uitdrukking alleen geldt binnen het medium. Voor het geval dat $z_p > D$ gaan we uit van de waarde $U_1(x, y, D, t)$ die gevonden wordt door de integratie over z_Q uit te voeren van 0 tot D :

$$U_1(x, y, D, t) = \frac{i h_o^2}{k_{z_o}} \cdot \delta n \cdot D \cdot e^{i(\vec{k}_o \vec{r}_p - \omega_o t)} \cdot e^{i k_{z_o} (D - z_p)}$$

Met behulp van de golfver-gelijking in vacuum kan deze verdeling uitgebreid worden tot $z_p > D$. We vinden dan

$$U_1 = \frac{i h_o^2 \delta n D}{k_{z_o}} \cdot e^{i(\vec{k}_o \vec{r}_p - \omega_o t)}$$

In het geval binnen het medium kan direkt gebruik worden gemaakt van (8.3.2.1). Na integratie naar z_p volgt een tweetal bijdragen omdat het integratie gebied gesplitst moet worden in de onderstaande delen :

a) $0 < z_Q < z_p$

In dit geval geldt

$$|z_p - z_Q| = (z_p - z_Q)$$

b) $z_p < z_Q < D$

zodat nu

$$|z_p - z_Q| = -(z_p - z_Q)$$

Na splitsing in beide gebieden vinden we weer dezelfde twee bijdragen als in 8.3.1 namelijk

U_1 wordt nu

$$U_1 = i \frac{k_0^2}{k_{z0}} \cdot \delta n \cdot z_p \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)} - \frac{k_0^2}{k_{z0}^2} \cdot \delta n \cdot e^{i 2 k_{z0} D} \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

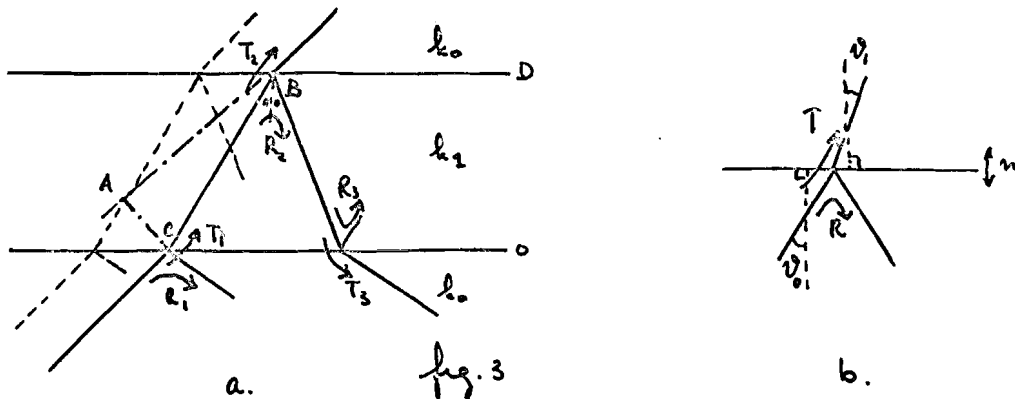
Als $z_p < 0$ kan opdezelfde wijze als voor $z_p > D$, waarbij uiteraard ook $U_0(x, y, 0)$ bij de uitbreiding met behulp van de golfvergelijking meegerekend moet worden

$$U_1 = -\frac{k_0^2}{k_{z0}} (e^{i 2 k_{z0} D} - 1) \cdot e^{i(\vec{k}_0 \vec{r}_p - \omega_0 t)}$$

Zoals te verwachten is stemmen deze resultaten met die van 8.3.1 overeen te meer omdat in beide gevallen is uitgegaan van een Born-benadering.

8.3.3. Geometrische benadering.

Uit fig.3a volgt direkt dat er buiten en binnen het medium een oneindig aantal bijdragen zijn te verwachten, hiervan zijn in 8.3.1 en 8.3.2 slechts de eerste termen gevonden. Om deze



te kunnen bepalen kan gebruik gemaakt worden van de grensvoorwaarden : U en $\partial U / \partial z$ verlopen continu. Uit deze voorwaarden volgt (fig.3b)

a) U continu :

$$n = \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_1} \quad (\text{wet van Snellius})$$

$$T = 1 + R$$

b) $\partial U / \partial z$ continu bovendien

$$R = 1 - pT \quad \text{met} \quad p = n \cdot \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_0}$$

Uit deze betrekkingen volgt

$$T \approx 1 - \delta n / \cos^2 \vartheta_0$$

$$R \approx -\delta n / 2 \cos^2 \vartheta_0$$

De amplitude variaties volgen nu eenvoudig uit fig. 3a. Bepalen we nu de fase verschillen, dan volgt voor $z_p > D$:

$$\varphi = k_0 \cdot AB - k_1 \cdot BC \quad \text{met } k_1 = n \cdot k_0$$

$$\varphi = \frac{k_0 D}{\cos \psi_1} \{ \cos(\psi_0 - \psi_1) - n \}$$

Wat na enig rekenwerk overgaat in

$$\varphi = k_0 D \delta n / \cos \psi_0$$

Op gelijke wijze vinden we als $0 < z_p < D$ voor de eerste bijdrage

$$\varphi_1 = k_0 z_p \delta n / \cos \psi_0$$

Voor de tweede bijdrage volgt:

$$\varphi_2 = k_0 (2D - z_p) \cos \psi_0$$

Als $z_p < 0$ volgt $\varphi = 2k_0 D \cdot \cos \psi_0$.

Resumerend:

$z_p > D$	Amplitude: $T_1, T_2 \approx 1$;	$\varphi = k_0 D \delta n / \cos \psi$
$0 < z_p < D$	1. $T_1 \approx 1$;	$\varphi_1 = k_0 z_p \delta n / \cos \psi$
	2. $T_1, R_2 \approx \frac{-\delta n}{\cos^2 \psi_0}$;	$\varphi_2 = k_0 (2D - z_p) \cdot \cos \psi_0$
$z_p < 0$	$T_1, R_2, T_3 \approx \frac{-\delta n}{\cos^2 \psi_0}$;	$\varphi = 2k_0 D \cdot \cos \psi$
	$R_1 \approx \frac{+\delta n}{\cos^2 \psi_0}$;	$\varphi = 0$

Daar $k_{z_0} = k_0 \cdot \cos \psi_0$ vinden we tenslotte voor U_1 ¹⁾ zoals verwacht weer dezelfde formules als onder 8.3.1 en 8.3.2.

Conclusie: De benadering is zodanig dat slechts rekening wordt gehouden met die golven, die slechts éénmaal gereflecteerd zijn, dus een eerste orde benadering met betrekking tot δn .

¹⁾ De golven waarvoor de amplitude factor ≈ 1 is leveren uiteraard ook de termen U_0 op, terwijl U_1 gevonden wordt door $e^{i\varphi}$ in een reeks te ontwikkelen en alleen de term met δn in de eerste graad te nemen, dus b.v.

$$e^{i k_0 D \delta n / \cos \psi} = 1 + i k_0 D \delta n / \cos \psi$$

\downarrow
 U_0

\downarrow
 U_1

9. De betrouwbaarheid van de Born-benadering.

In de voorgaande paragrafen is voor bepaling van de optredende scattering bijna uitsluitend de Born-benadering als oplossing gegeven. De vraag rijst in hoeverre deze een betrouwbare voorstelling geeft van de fysische situatie. Bij dergelijke problemen wordt de betrouwbaarheid en nauwkeurigheid beschouwd aan de hand van de optredende vermogens. Een kwantitatieve beschouwing is derhalve nauwelijks mogelijk omdat de vermogens die ten gevolge van de scattering optreden niet bepaald zijn. Daarvoor is het noodzakelijk om de correlatiefuncties, voor de amplitude en fase deviaties te berekenen. Deze kunnen overigens uit de gevonden betrekkingen bepaald worden (zie b.v. Lit. 1, waar dit voor een bepaald geval is gedaan). Echter ook dan blijft een kwantitatieve beschouwing lastig.

In het algemeen kan gesteld worden dat de gevonden benadering betrouwbaar is als de gescatterde energie ten gevolge van U_1 klein is ten opzichte van de energie van de primaire golf. Dit kan aannemelijk worden gemaakt met behulp van de recurrente betrekkingen uit 2. Deze geven het verband tussen U_N en $U_{N-1} \cdot \delta_n$, zodat gevolgtrekkingen over de vermogens gemaakt kunnen worden door deze betrekkingen aan een statistische beschouwing te onderwerpen. We vinden dan het verband tussen $\langle |U_N|^2 \rangle$ en $\langle |U_{N-1} \cdot \delta_n|^2 \rangle$.

Voor $N = 1$ vinden we direkt het verband tussen $\langle |U_1|^2 \rangle$ en $\langle |\delta_n|^2 \rangle$.

Stellen we nu :

$$U = U_0 + U_1$$

$$\approx U_0 (1 + \delta A + i \delta \phi)$$

dan geldt

$$\langle |U_1|^2 \rangle = \langle \delta A^2 \rangle + \langle \delta \phi^2 \rangle$$

In eerste benadering volgt uit (5.1.7) dat

$$\langle |U_1|^2 \rangle = k_0^2 l \cdot z_p \langle \delta n^2 \rangle$$

waarin l een specifieke lengte-eenheid voorsteld, l is representatief voor de deviatie van de brekingsindex δn .

Daar de recurrente betrekking qua vorm onafhankelijk is van N kunnen we verwachten dat tevens geldt

$$\frac{\langle |u_N|^2 \rangle}{\langle |u_{N-1} \cdot \delta n|^2 \rangle} \approx k_0^2 l z_p$$

en ook

$$\frac{\langle |u_N|^2 \rangle}{\langle |u_{N-1}|^2 \rangle} \approx k_0^2 l \langle \delta n^2 \rangle z_p$$

zodat de Born-reeks goed convergeert als deze verhouding klein is ten opzichte van 1. Dit geeft als voorwaarde

$$z_p \ll (k_0^2 l \langle \delta n^2 \rangle)^{-1} = z_{\text{Born}}$$

wat in principe aangeeft dat elke term van de Born-reeks aanzienlijk kleiner is dan de voorafgaande term. In deze benadering zijn alleen fase-afwijkingen in rekening gebracht, daar echter de amplitude-variatiën van dezelfde grootte orde zijn, is tevens de grootte orde van z_{Born} juist. Veronderstel nu dat $z_p \approx z_{\text{Born}}$ dan worden de fase afwijkingen van de orde 1 en bij $z_p > z_{\text{Born}}$ eventueel 2π zodat een eenduidige interpretatie niet mogelijk is. Uit deze overweging blijkt derhalve eveneens dat een dergelijke voorwaarde zeker reëel is.

Uit deze summariere beschouwing volgt dat een eerste eis is ervoor te zorgen dat voldaan wordt aan

$$z_p / z_{\text{Born}} \ll 1$$

In dat geval is de gevonden benadering een goede weergave van de fysische verschijnselen. De werkelijke waarde van de verhouding z_p / z_{Born} geeft dan bovendien enig inzicht in de grootte van de gemaakte fout.

10. Literatuur.

1.L.Pieroni and H.Bremmer.

Time-dependent autocorrelation functions for the light scattered
by a turbulent medium.

Rijnhuizen Report 67-38.

2.Prof.Dr.H.Bremmer.

Operatoren rekening.

College diktaat Technische Hogeschool Eindhoven.

3.van der Pol and H.Bremmer.

Operational Calculus.Cambridge 1950 (page 104).

4.G.N.Watson.

A treatise on the Theory of Bessel Functions.Cambridge.