

## MASTER

### Lopende-golf-antennes bestaande uit cirkelcylindrische golfpijpen met transversale gleuven langs de gehele omtrek

Vaessen, D.C.L.

*Award date:*  
1967

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

#### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

TECHNISCHE HOOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Elektrotechniek

Groep Theoretische Elektrotechniek

LOPENDE - GOLF - ANTENNES BESTAANDE  
UIT CIRKELCYLINDRISCHE GOLFPIJPEN  
MET TRANSVERSALE GLEUVEN LANGS  
DE GEHELE OMTREK

door D.C.L. Vaessen.

Verslag van het afstudeerwerk verricht in  
de groep THEORETISCHE ELEKTROTECHNIEK

bij

Prof.dr.ir.A.A.Th.M. van Trier.

ETA - 1 - 1967

12 januari 1967.

# I N H O U D.

Inleiding:		0.1
Hoofdstuk I.	Periodieke structuur van omtrekspleuven.	I.1.
Par. I.1	Formulering van het probleem.	I.2.
I.2	Opstellen der randvoorwaarden.	I.3.
I.3.	De vergelijkingen van Maxwell.	I.7.
I.4.	Oplossing der golfvergelijking.	I.9.
I.5.	Benaderde oplossingen.	I.14.
I.6.	Oppervlaktegolven.	I.20.
Hoofdstuk II.	Eigenschappen van één omtrekspleuf.	II.1
Par. I.	Berekening van het uitgestraalde vermogen.	II.1
2.	$TM_{on}$ modi voor de gesloten golfpijp.	II.13.
3.	Eigenschappen van de omtrekspleuf in de golfpijp.	II.15.
4.	Transmissielijnmodel.	II.22.
5.	Stralingsdiagram voor twee in tegenfase stralende pleuven.	II.27.
6.	Strukturen met meerdere pleuven.	II.29.
6.1	$\infty$ lange periodieke pleufstructuur.	II.30.
6.2	Eindige periodieke pleufstructuur.	II.35.
Grafieken.		
Literatuur.		

LOPENDE-GOLF-ANTENNES BESTAANDE UIT CIRKELCYLINDRISCHE GOLFPIJPEN  
MET TRANSVERSALE GLEUVEN LANGS DE GEHELE OMTREK.

Inleiding.

Over diverse soorten gleuven in rechthoekige golfgeleiders is uit de literatuur reeds veel bekend. Uit Fradin (zie lit. 8) is bekend dat een resonante longitudinale gleuf in een ronde golfpijp een stralingsdiagram kan geven dat voor alle richtingen in het transversale vlak een nagenoeg even grote waarde heeft. Een dergelijk cirkelcilindrisch stralingsdiagram kan ook op andere wijze worden verkregen.

Voor een gesloten ronde golfpijp hebben de  $TM_{on}$  modi eigenschappen die onafhankelijk zijn van de radiale richting in het transversale vlak. Wordt nu in een transversaal vlak een gleuf aangebracht in de golfpijpwand, die zich over de gehele omtrek van de pijp uitstrekt (ontreksgleuf), en dus ook cirkelsymmetrisch is, dan is het duidelijk dat uittredende straling afkomstig van een  $TM_{on}$  mode, een cirkelvormig stralingsdiagram heeft. In een dergelijke transversale omtreksgleuf zal door de aanwezigheid van een  $TM_{on}$  mode een gleufveld worden opgebouwd: daar bij de  $TM_{on}$  modi de magnetische veldlijnen evenwijdig lopen aan de gleuf, Het onderzoek is nu gericht op de eigenschappen van deze cirkelsymmetrische gleuven en velden.

Het fundamentele probleem van de microgolfantenne-theorie is de bepaling van het elektromagnetische stralingsveld van deze antennes. Het stralingsveld, dit is het veld op relatief grote afstand van de antenne, is echter direct afhankelijk van het veld dichtbij de antenne. Wensen we een strikte oplossing van het stralingsprobleem, dan moeten alle elementen der antenne - te weten, golfgeleiders, bronnen, en de stralingsstructuur - beschouwd worden als delen die op elkaar inwerken. Dergelijke rigoureuze oplossingen zijn echter meestal onvindbaar, en daarom worden benaderde oplossingen gezocht, waarbij enerzijds de structuur wordt beschouwd als golfpijp met lokale verliezen, en anderzijds de configuratie als antenne met ringvormige stralingsbronnen wordt gezien. Via de vermogensbalans kunnen beide standpunten met elkaar in verband worden gebracht.

We houden ons dus nu alleen bezig met de gleufstructuur in een bronvrije ruimte, en zoeken oplossingen van de

vergelijkingen van Maxwell, zonder er ons om te bekommeren hoe de veldmodi samenhangen met eventuele bronnen.

Tevens wordt zoals gebruikelijk de stationaire toestand beschouwd, met exponentiële tijdsafhankelijkheid zonder aandacht te schenken aan eventuele inschakelverschijnselen.

De oneindige ruimte wordt verdeeld in twee gebieden; het interne gebied waarvoor  $\rho \leq a$  en het externe gebied waarvoor geldt:  $a \leq \rho < \infty$ . Deze twee gebieden grenzen aan elkaar volgens een bepaald oppervlak, de cilindermantel, en de elektromagnetische velden in beide gebieden staan met elkaar in contact via de gleuven in de golfpijpwand. Voor de twee gebieden worden nu oplossingen gezocht voor de bronvrije vergelijkingen van Maxwell. Deze oplossingen moeten voldoen aan de diverse randvoorwaarden, stralingsvoorwaarde, en aan continuïteitseisen voor de E.M. velden in de gleuven, en tevens moeten de velden overal eenduidig zijn.

Om hanteerbare oplossingen te verkrijgen wordt de beschouwde structuur geïdealiseerd: De  $\infty$  ruimte wordt homogeen, lineair, en isotroop verondersteld; de metalen delen bezitten een  $\infty$  groot geleidingsvermogen en worden in de radiale richting van infinitesimale dikte verondersteld; de structuur wordt geacht zich in de axiale richtingen oneindig ver uit te strekken enz. enz.

Ter verdere vereenvoudiging wordt de breedte  $d$  dor gleuf klein verondersteld in vergelijking met de golflengte, dan kan nl. worden aangenomen dat het elektrische veld in de gleuf, praktisch constant is als functie van  $z$ , en alleen een  $E_z$  component bezit.

Er zijn nu diverse manieren mogelijk om de eigenschappen der structuur te onderzoeken. We passen twee methoden toe nl.

1) onderzoek van eigenschappen van een  $\infty$  lange periodieke gleufstructuur m.b.v. Ruimtelijke harmonischen.

2) onderzoek naar de eigenschappen van één gleuf m.b.v. het théoroma van Lorentz.

Ad 1.

Periodieke  $\infty$  lange gleufstructuur (zie fig. 1).

Bij de oplossing der bronvrije Maxwell vergelijkingen voor deze structuur mogen twee soorten oplossingen verwacht worden; nl. oppervlaktegolven en leaky-wave modes. De oppervlaktegolven zijn echte modi, en de axiale voortplantingsconstante bezit alleen een  $f_{ax}$  component.

De leaky-wave is daarentegen een oplossing met een dempings- en een fase constante in de axiale richting, waarbij energiestraling optreedt in de transversale richtingen.

a) Leaky-wave guide.

Periodieke structuren zijn reeds door diverse onderzoekers beschouwd. Heynemann en Honey hebben periodieke structuren onderzocht voor rechthoekige golfgeleiders met transversale gleuven in de brede wand van de golfpijp. Sensiper heeft een omtrekspleuvenstructuur onderzocht voor oppervlaktegolven, waarbij echter niet slechts cirkelsymmetrische velden zijn onderzocht.

Zoals reeds is vermeld worden oplossingen gezocht voor de stationnaire bronvrije vergelijkingen van Maxwell, voor het in- en externe gebied. Die oplossingen moeten in de gleuven continu in elkaar overgaan. Door deze continuïteitseisen, en andere optredende randvoorwaarden is het mogelijk een vergelijking op te stellen, waaruit de voortplantingsconstante  $\gamma$  (in de axiale richting) bepaald kan worden.

Is deze voortplantingsconstante  $\gamma$  complex, dan zijn de optredende velden gedempt. Bij iedere gleuf lekt dan energie van het interne veld naar buiten, overeenkomstig de dempingsconstante. Het is belangrijk deze voortplantingsconstante te bepalen, daar het stralingsveld pas te bepalen is, indien deze  $\gamma$  bekend is.

Kiezen we de gleuven dicht bij elkaar, dan kan gesproken worden van een continuo - lek - en de structuur zal zich gedragen als een leaky-wave guide.

De algemene aanpak van het probleem heeft als voordeel dat de voortplantingsconstante bepaald kan worden voor willekeurige afmetingen der structuur; dit is belangrijk daar voor eventuele antenne-ontwerpen de afhankelijkheid van  $\gamma$  van de diverse structuurparameters bekend moet zijn.

Honey heeft een prettige manier aangegeven om voor waveguides de plaatsing en breedte der diverse gleuven zodanig te bepalen dat de velden in de gleuven aan een bepaalde belichtingsfunctie voldoen: Uitgaande van de belichtingsfunctie is dan ook het stralingsdiagram te bepalen. De hoofdstralingsrichting wordt voor een dergelijke leaky-waveguide antenne bepaald door de fase-snelheid in de structuur. Om een stralingsversterking in een bepaalde richting te verkrijgen moet de voortplantings-

constante in de golfpijp constant gehouden worden , bij verandering der parameters  $d.l$  en  $a$  in de axiale richting. Dit probleem brengt bij antenne ontwerpen , voor deze structuur , moeilijkheden met zich mee. Op deze moeilijkheden wordt niet ingegaan in het onderzoek.

b) op ervlaktegolfstructuur.

Heeft de voortplantingsconstante alleen een faze, en geen dempingsconstante, dan komen deze propagerende velden overeen met oppervlaktegolven, die zich langs het periodieke oppervlak voortplanten. Dergelijke golven zijn o.a. ook beschouwd door Sensiper en Fradin.

De elektromagnetische velden der oppervlaktegolven verzorgen geen energie-uitstraling in de radiale richting. Het veldverloop vertoont in de radiale richtingen (t.o.v.  $\rho = a$ ) een exponentieel gedempt karakter en bezit in de axiale richtingen een fazesnelheid die kleiner is dan de lichtsnelheid. Voor deze structuur is het ook weer mogelijk de afhankelijkheid der voortplantingsconstante van de structuurparameters te beschouwen.

De oppervlaktestructuur wordt in dit onderzoek slechts beschouwd als propagatiemiddel voor oppervlaktegolven, en oppervlaktegolfantennes worden niet beschouwd.

## Ad 2. De individuele gleuven.

De eigenschappen van diverse soorten eenzame gleuven zijn reeds onderzocht door o.a. Fradin, Collins, Stevensen, echter wel hoofdzakelijk voor gleuven in rechthoekige golfgeleiders. Harrington heeft een beschouwing gegeven over de stralingseigenschappen van een transversale gleuf in de cilindrische golfpijp waarbij de gleuf zich niet over de gehele omtrek van de pijp uitstrekt. Bij de behandeling van de eenzame gleuf gaan we als volgt tewerk. Weer wordt een splitsing aangebracht tussen het externe en interne probleem. Veronderstellen we het elektrisch veld in de gleuf bekend, dan kan het externe stralingsprobleem worden opgelost en kan de uitgestraalde energie worden berekend.

Het inwendige probleem wordt opgelost m.b.v. het theorema van Lorentz voor de bronvrije ruimte. Met bijv. dit theorema kan de samenhang tussen het elektrische veld in de gleuf, en de in de golfpijp propagerende modi worden onderzocht. De afmetingen der golfpijp worden zodanig gekozen dat slechts de eenvoudigste cirkelsymmetrische mode kan propageren. Dan kan het interne gebied der golfpijp met gleuf worden voorgesteld door een transmissielijnmodel waarin de gleuf vervangen is door een impedantie-netwerk.

Antennes met één gleuf hebben meestal een zwak richteffekt. Om antennes te maken met kleinere bundelbreedten worden z.g. multislot-antennes gebruikt, bestaande uit golfgeleiders met meerdere op geschikte wijze geplaatste gleuven. Het aanbrengen van meerdere gleuven komt neer op het plaatsen van meer dissipatieve elementen in het transmissielijnmodel, mits verondersteld wordt dat de gleuven elkaar niet beïnvloeden. Zijn de eigenschappen van één gleuf bekend dan is het dus mogelijk om weer een periodieke gleufstructuur op te bouwen, en te onderzoeken m.b.v. het transmissielijnmodel.

Voor een eenvoudige combinatie van gleuven zijn de stralingsdiagrammen bepaald (zie hoofdstuk II), uitgaande van het stralingsdiagram van de eenzame gleuf.



## HOOFDSTUK I.

### Periodieke structuur van omtreksgleuven.

#### Overzicht van het onderzoek.

Ter verduidelijking is de opbouw van deze structuur in onderstaande figuur aangegeven.

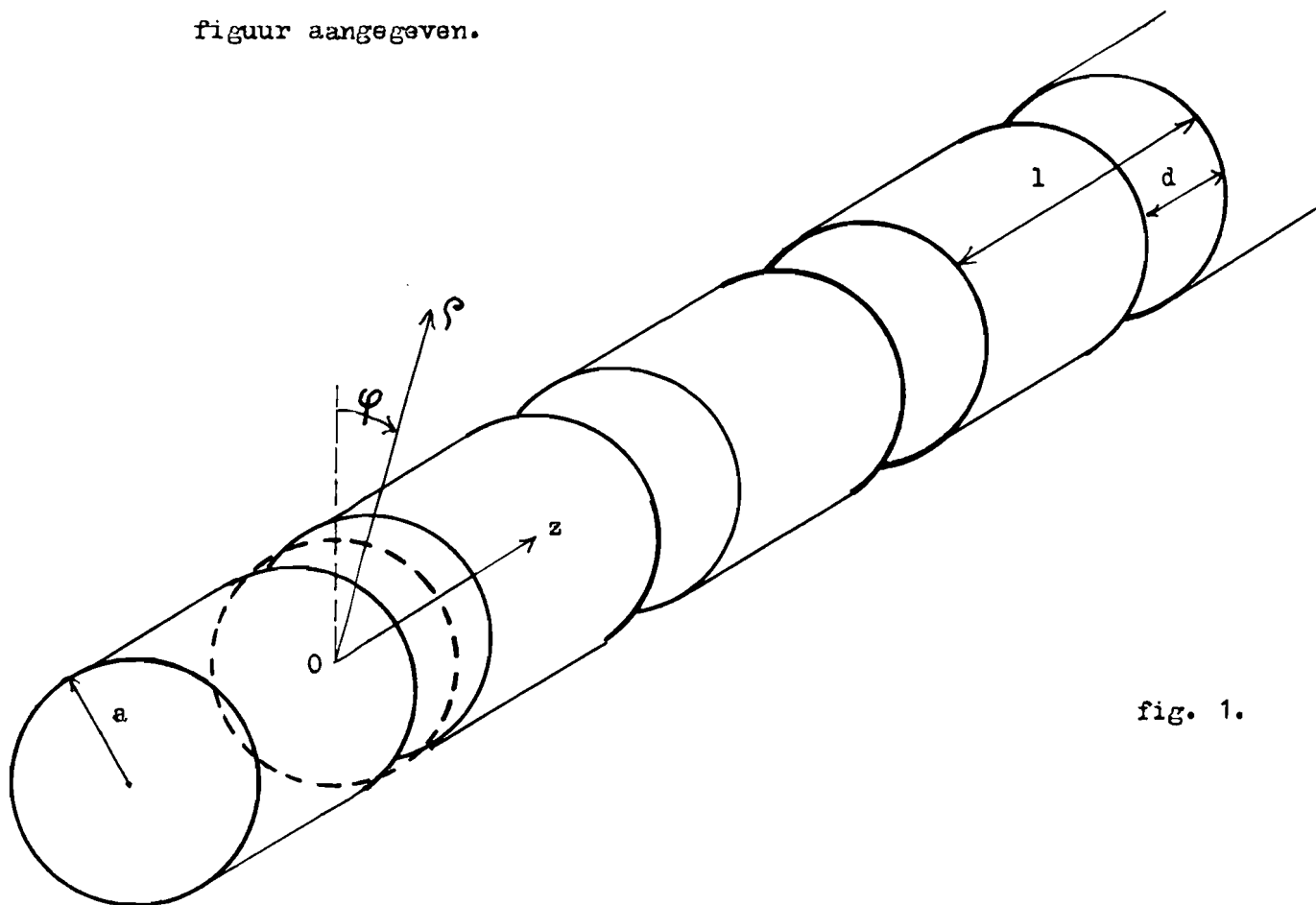


fig. 1.

De diverse eigenschappen en parameters der structuur alsmede de vorm der oplossingen wordt in Par. 1 besproken. De continuïteits- en randvoorwaarden worden vervolgens besproken en met behulp van het theorema van Floquet en Fourier-analyse in een hanteerbare vorm geschreven (par 2). Het bronvrije probleem wordt dan beschouwd, en geschikte oplossingen van de vergelijkingen van Maxwell worden opgesteld en aangepast aan de randvoorwaarden, waardoor als oplossing een integraalvergelijking ontstaat. (Par. 3 en 4). Daar deze integraalvergelijking onoplosbaar is worden in Par. 5 benaderingen voor deze vergelijking opgesteld en besproken. Het bijzondere geval der oppervlaktegolven wordt behandeld in Par. 6. Oplossingen voor de voortplantingsconstanten zijn echter niet gegeven vanwege de aanzienlijke berekeningen die daarvoor nodig zijn.

PAR. I.1.

Formulering van het probleem.

De structuur is opgebouwd uit een oneindige serie van cirkelvormige metalen ringen met straal  $a$ , die coaxiaal zijn geplaatst t.o.v. de  $z$ -as. De ringen bezitten in de axiale richting een breedte  $l$  en zijn op afstand  $d$  van elkaar geplaatst. Hierdoor ontstaat een periodieke structuur met periode  $l$ . Verder wordt verondersteld, dat de ringen in de radiale richting geen dikte bezitten. Deze veronderstelling is zeker onphysisch, maar indien de werkelijke dikte van het metaal erg klein is vergeleken met de andere afmetingen van de structuur en met de golflengte, dan zal deze benadering de juistheid der resultaten slechts zeer weinig beïnvloeden, en een aanzienlijke vereenvoudiging der randvoorwaarden tengevolge hebben. Verder is verondersteld, dat het metaal een oneindig groot geleidingsvermogen bezit.

De structuur strekt zich in de axiale richting oneindig ver uit. Het medium waarin de structuur zich bevindt wordt oneindig uitgestrekt gedacht en wordt homogeen, isotroop, en lineair verondersteld, en wordt gekenmerkt door de permeabiliteit  $\epsilon$ , en de permittiviteit  $\mu$ , en een geleidingsvermogen  $\sigma$ . Voor het verliesvrije medium is

$\sigma = 0$  en dan geldt

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{I.1})$$

Hierin is  $k$  de voortplantingsconstante van een vlakke electromagnetisch golf in de verliesvrije ruimte,  $\omega$  is de hoekfrequentie en  $\lambda$  is de bijbehorende golflengte.

Bij de berekening wordt steeds harmonische tijdsafhankelijkheid verondersteld, en dientengevolge worden uitsluitend complexe veldvectoren gebruikt. Voor de harmonisch van de tijd afhankelijke veldcomponenten geldt dus,

$$\underline{\mathcal{H}}(\rho, \varphi, z, t) = \text{Re} \left[ \underline{\mathbb{H}}(\rho, \varphi, z) \cdot e^{j\omega t} \right] \quad (\text{I.2.})$$

Bij de oplossing van het probleem wordt gebruik gemaakt van het cirkelcylindrische coördinatensysteem. Het is op de gebruikelijke manier gedefinieerd met de rechtsdraaiende eenheidsvectoren  $\underline{a}_\rho$ ,  $\underline{a}_\varphi$ , en  $\underline{a}_z$

Het onderzoek is gericht op het zoeken naar stationaire oplossingen voor de structuur. Hierbij is te verwachten dat naast echte modi ook oplossingen aanwezig zijn die op transverse straling duiden. (leaky-wave modes).

Zij de axiale voortplanting in de positieve  $z$ -richting aangegeven, met  $e^{-\gamma z}$ , dan stellen dergelijke golven indien  $\gamma$  imaginair is oppervlaktegolven voor die in de axiale richting een ongedempt karakter hebben; indien  $\gamma$  complex is, stellen de oplossingen gedempte golven voor waarbij voortdurend energie door de gleuven naar buiten lekt. De exponentiële  $z$ -afhankelijkheid correspondeert dus met al of niet gedempte propagerende golven. Vanwege de uniformiteit van de randvoorwaarden kan ook verwacht worden dat een infinite set modes met verschillende hoekvariëaties optreden. In het bijzonder worden echte oplossingen gezocht waarvan de veldcomponenten onafhankelijk zijn van de hoekvariëatie  $\varphi$ . De gezochte modes zijn dus cirkelsymmetrisch.

Bij de oplossing van het probleem maken we gebruik van de bronvrije vergelijking van Maxwell, en beschouwen slechts stationaire cirkelsymmetrische golven met een harmonische tijdsafhankelijkheid. Oplossingen van de vergelijkingen van Maxwell worden aangepast aan de optredende randvoorwaarden en continuïteitseisen. De wijze waarop de modi geëxciteerd worden is niet in de beschouwing opgenomen en de bronnen worden op oneindig grote afstand verondersteld van de plaats waar de oplossing wordt gezocht.

Op deze manier worden de eigenschappen gevonden van de voortplantingsconstante  $\gamma$  als functie van de fysische eigenschappen, en geometrische parameters der structuur.

## PAR. I. 2

### De randvoorwaarden.

De oplossing van het randwaardeprobleem voor een electromagnetische golf wordt verkregen door geschikte oplossingen van de vergelijkingen van Maxwell aan te passen aan de randvoorwaarden. Met geschikte oplossingen wordt bedoeld dat bij de afwezigheid van bronnen de veldvoorstellingen overal eindig en eenduidig moeten zijn.

De randvoorwaarden houden in het algemeen in dat de tangentiële elektrische en de normale magnetische veldcomponenten continu moeten verlopen bij ieder oppervlak. Indien metalen geleiders perfect geleiden worden verondersteld, dan moet het tangentiële elektrische en het normale magnetische veld gelijk zijn aan 0 op ieder metaaloppervlak.

Verder meet, daar de perfect geleidende oppervlakken van infinitesimale dikte zijn verondersteld, en de daarin lopende stromen mogen worden beschouwd als lopend in een infinitesimaal dunne plaat, een discontinuïteit bestaan in het loodrecht op deze stroomrichting staande tangentiële magnetische veld, ter plaatse van het metaaloppervlak.

Boven dien moeten de oplossingen van de vergelijkingen van Maxwell voldoen aan de stralingsvoorwaarde, die inhoudt, dat alleen zich naar het oneindige voortplantende golven kunnen optreden. Zij  $\phi$  een complexe golf functie, dan wordt dit uitgedrukt door middel van de uitdrukking:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{d\phi}{dr} + jk_t \phi \right) = 0 \quad \text{met } k_t^2 = k^2 + \rho^2$$

De vergelijkingen van Maxwell kunnen nu worden opgelost voor twee gebieden, n.l. het interne gebied waarvoor geldt  $0 \leq \rho \leq a$ , en het externe gebied waarvoor geldt:  $a \leq \rho \leq \infty$ .

Bij de oplossing wordt verondersteld dat het medium voor het in- en externe gebied dezelfde eigenschappen bezit. Dit is geen vergaande vereenvoudiging, en uitbreiding der theorie indien verschillende in- en externe media aanwezig zijn levert geen moeilijkheden op.

Voor  $\rho = a$  zullen de beide oplossingen moeten voldoen aan de continuïteits-, en randvoorwaarden. In het algemeen luiden deze :

1), voor het elektrisch veld:

$$\underline{E}_z^i = \underline{E}_z^e \quad \text{en} \quad \underline{E}_\rho^i = \underline{E}_\rho^e \quad \text{voor alle } z \text{ en } \varphi. \quad (1.3)$$

Tevens moet gelden dat  $\underline{E}_z$  en  $\underline{E}_\rho = 0$  zijn op ieder metaaloppervlak vanwege de veronderstelling dat het metaal perfect geleidend is verondersteld. De gebruikte indices i en e dienen om onderscheid te maken tussen resp. het interne en externe gebied.

2) voor het magnetische veld:

Daar in de ringen stromen kunnen lopen, luiden de continuïteitsvoorwaarden voor het magnetisch veld ter plaatse  $\rho = a$  :

$$\begin{aligned} \underline{H}_\varphi^i &= \underline{H}_\varphi^e \\ \underline{H}_z^i &= \underline{H}_z^e \end{aligned} \quad \text{voor alle } \rho \text{ in de spleeten} \quad (1.4)$$

en

$$\begin{aligned} \underline{H}_\varphi^i &= \underline{H}_\varphi^e - \underline{J}_z \\ \underline{H}_z^i &= \underline{H}_z^e - \underline{J}_\varphi \end{aligned} \quad \text{voor alle } \rho \text{ op het metaaloppervlak.} \quad (1.5)$$

Hierin geven  $\underline{J}_z$  en  $\underline{J}_\varphi$  de oppervlaktestroomdichtheden aan in respectievelijk de  $z$ - en  $\varphi$ -richting.

De algemene continuïteitseisen kunnen nog vereenvoudigd worden, daar slechts cirkelsymmetrische modes worden onderzocht en de gleufbreedte  $d$  smal wordt verondersteld. Ter verdere vereenvoudiging is verondersteld, dat de gleufbreedte  $d \ll \lambda$ .

Daar  $\underline{E}_\varphi = 0$  moet zijn op het oppervlak der ringen, lijkt het uit fysische overwegingen duidelijk dat  $\underline{E}_\varphi$  vrij klein moet zijn overal in de gleuf.  $\underline{E}_\varphi$  moet  $= 0$  zijn aan de rand van de gleuf vanwege de continuïteitseisen voor de overgang van gleuf naar ring.

In literatuur 5 wordt aangetoond, dat  $\underline{E}_\varphi$  zich in de gleuf zal gedragen als  $\sqrt{R}$ , waarbij  $R$  de afstand is tot aan de rand van de gleuf.

Redelijkerwijs kan dus verondersteld worden dat  $\underline{E}_\varphi$  overal in de gleuf de waarde  $0$  aanneemt. De randvoorwaarde voor  $\underline{E}_\varphi$  wordt nu dus:

$$\underline{E}_\varphi^i = \underline{E}_\varphi^e = 0 \quad \text{voor } \rho = a \text{ en voor alle } z \text{ en } \varphi. \quad (\text{I.6})$$

De moeilijk te hanteren randvoorwaarden voor  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{H}_\varphi$  en  $\underline{H}_z$  (indien  $\rho = a$ ) kunnen met behulp van het theorema van Floquet en Fourieranalyse in een hanteerbare vorm worden geschreven.

Tengevolge van de periodiciteit van de structuur moet  $\underline{E}_z$  aan bepaalde voorwaarden voldoen, en is het theorema van Floquet toepasbaar. (Zie lit. 1 en 2).

Voor  $\underline{E}_z$  schrijven we formeel:

$$\underline{E}_z(\rho, \varphi, z) = \underline{E}_z'(\rho, \varphi, z) e^{-\gamma z} \quad (\text{I.7})$$

Hierin is  $\gamma$  de voortplantingsconstante in de  $z$ -richting en  $\gamma$  is complex verondersteld. Tevens voldoet  $\underline{E}_z'$  aan de relatie:

$$\underline{E}_z'(\rho, \varphi, z) = \underline{E}_z'(\rho, \varphi, z-1)$$

en stelt dus een periodieke functie voor met periode 1.

Als  $\rho = a$ , dan is het  $\underline{E}_z$ -veld gelijk aan nul op het oppervlak der ringen, en  $\underline{E}_z$  kan in de gleuven een bepaalde waarde aannemen.

Kies voor de gleuf met de oorsprong als centrum als referentiewaarde voor  $\underline{E}_z(a, \varphi, z)$ :

$$\underline{E}_z(a, \varphi, z) = \underline{E}_z(z) \begin{cases} 0 \leq |z| \leq d/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \\ = 0 \quad \begin{cases} d/2 \leq |z| \leq 1/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

Hierin is  $E_z(z)$  een onbekende functie die het veldverloop aangeeft in de gleuf met de oorsprong als centrum. Daar  $E_z'(a, \varphi, z)$  een periodieke functie is van  $z$ , kan deze in een Fourier-reeks worden ontwikkeld. (Zie lit. 3). Dan kan worden geschreven:

$$E_z'(a, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{-j 2n\pi z/l}$$

met

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} E_z'(a, \varphi, z') e^{j 2n\pi z'/l} dz'$$

Substitutie van vergelijking (1.7) en vergelijking (1.8) in de Fourierontwikkeling levert: (voor  $\rho = a$ ):

$$E_z(a, \varphi, z) = \sum_n c_n \cdot e^{-j \gamma_n z}$$

en

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j \gamma_n z'} dz'$$

waarin bovendien geldt:  $\gamma_n = \frac{2n\pi}{l} - j\gamma$  (I.9)

Bovenstaande Fourierontwikkeling kan ook tot één integraal worden samengevoegd:

$$E_z(a, \varphi, z) = \frac{1}{l} \cdot \sum_n \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j \gamma_n (z'-z)} dz' \quad (\text{I.10})$$

en hiermede is de randvoorwaarde voor  $E_z$  op de wand van de pijp bepaald voor alle waarden van  $z$ .

Op dezelfde wijze kan de continuïteit van het magnetisch veld worden geëist. Uit (I.5) volgt voor  $\rho = a$ :

$$\begin{aligned} J_z &= H_\varphi^e - H_\varphi^i \\ J_\varphi &= H_z^e - H_z^i \end{aligned}$$

Aan de continuïteit van het magnetisch veld in de gleuven is nu voldeard indien  $J_z$  en  $J_\varphi$  gelijk zijn aan nul voor de gleuven, en indien  $J_z$  en  $J_\varphi$  een bepaalde waarde aannemen op het metaaloppervlak.

Stel  $J_z(z)$  en  $J_\varphi(z)$  zijn de stroomverdelingen in het gebied rond de oorsprong; waarvoor geldt:  $0 \leq z \leq l$ .

Dan volgt op analoge wijze als de afleiding van (1.10)

$$H_{\varphi}^e - H_{\varphi}^i = \frac{1}{l} \sum_n \int_{d/2}^{l-d/2} J_z(z') \cdot e^{jn(z'-z)} dz' \quad (I.11)$$

Voor  $H_z^e - H_z^i$  geldt dezelfde vergelijking, alleen is dan  $J_z(z')$  vervangen door  $J_{\varphi}(z')$ . (I.11')

De ingeklede oplossingen (I.11) en (I.11') zullen echter niet worden gebruikt bij de aanpassing aan de randvoorwaarden van de oplossingen van de vergelijkingen van Maxwell. De reden hiervoor wordt nader besproken in par. I.4.

De continuïteitseisen voor  $\rho = a$  zijn dus bepaald door de vergelijkingen (I.4), (I.5) en (I.6), (I.10) en (I.11).

Nu kan worden overgegaan tot de oplossing van de vergelijkingen van Maxwell.

### PAR. I.3.

#### De vergelijkingen van Maxwell.

De fundamentele vergelijking die onder in achtneming van de randvoorwaarden en continuïteitseisen opgelost dienen te worden zijn de vergelijkingen van Maxwell. Voor een bronvrije ruimte gevuld met een homogeen, isotroop, en lineair medium en waarbij een harmonische tijdsafhankelijkheid de (volgens  $e^{j\omega t}$ ) wordt verondersteld luiden deze vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu\underline{H} & \nabla \cdot \underline{E} &= 0 \\ \nabla \times \underline{H} &= j\omega\varepsilon\underline{E} & \nabla \cdot \underline{H} &= 0 \end{aligned} \quad (I.12)$$

De gemeenschappelijke factor  $e^{j\omega t}$  is in de uitdrukkingen voor de veldcomponenten achterwege gelaten, maar moet er natuurlijk wel bijgedacht worden.

In verband met het divergentievrije karakter van  $\underline{E}$  en  $\underline{H}$  kunnen zoals bekend is, de elektrische en magnetische vectorpotentialen van Hertz worden ingevoerd: resp.  $\underline{\Pi}$  en  $\underline{\Pi}^*$  waarin de veldcomponenten kunnen worden uitgedrukt.

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \nabla \times \nabla \times \underline{\Pi} - j\omega\mu \nabla \times \underline{\Pi}^* \\ \underline{H} &= j\omega\varepsilon \nabla \times \underline{\Pi} + \nabla \times \nabla \times \underline{\Pi}^* \end{aligned} \quad (I.13)$$

waarbij  $\underline{\Pi}$  en  $\underline{\Pi}^*$  beide voldoen aan de vectorgelfvergelijking

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{\Pi} + k^2 \underline{\Pi} &= 0 \\ \text{en } \nabla^2 \underline{\Pi}^* + k^2 \underline{\Pi}^* &= 0. \end{aligned}$$

Tevens voldoet iedere component van  $\underline{\pi}$  en  $\underline{\pi}^*$  aan de scalaire-golfvergelijking, die in het cirkelcylindrische coördinatensysteem luidt:

$$\nabla^2 \pi + k^2 \pi = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} + k^2 \pi = 0 \quad (\text{I.14}).$$

$\underline{\pi}$  en  $\underline{\pi}^*$  zijn in principe vectoren met een willekeurige richting, hoewel kan worden aangetoond dat niet iedere keuze voor  $\underline{\pi}$  en  $\underline{\pi}^*$  in dit geval aan een gestelde randvoorwaarde voldoet. In het algemeen kan worden aangetoond, dat een keuze waarbij  $\underline{\pi}$  en  $\underline{\pi}^*$  slechts z-componenten hebben voldoende is; het stelsel van TE + TM modes vormt nl. een compleet stel. Iedere modevorm die ontstaat door een andere keuze van  $\underline{\pi}$  (bijv.  $\pi_\rho$ ) kan worden opgebouwd uit een geschikte combinatie van TE + TM-modes.

Voor de beschouwde cirkelsymmetrische oplossingen is ook op andere wijze te zien dat de keuze van  $\pi_z$  en  $\pi_z^*$  voldoende is; een andere keuze van  $\underline{\pi}$  en  $\underline{\pi}^*$  blijkt niet aan de eis van eindigheid van het electromagnetische veld te voldoen voor cirkelsymmetrische modes. In de volgende paragraaf wordt aangetoond, dat cirkelsymmetrische oplossingen de volgende vorm hebben voor het inwendige gebied:

$$\pi = A \cdot J_0(\beta_n \rho) \cdot e^{-j \beta_n z}.$$

Zoals bekend is wordt  $J_0(\beta_n \rho) = 1$  indien  $\rho = 0$  is. Dit houdt in, dat termen van de vorm

$$\frac{J_0(\beta_n \rho)}{\rho} : \text{oneindig groot worden indien } \rho = 0 \text{ wordt, en dus}$$

een onphysisch gedrag bezitten. Kiezen we nu algemeen:

$$\underline{\pi} = (\pi_\rho, \pi_\phi, \pi_z), \text{ en } \underline{\pi}^* = (\pi_\rho^*, \pi_\phi^*, \pi_z^*)$$

dan ontstaan bij uitwerking van de vergelijkingen (I.13) termen van de volgende vorm:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_\rho}{\partial z}, \frac{\pi_\rho}{\rho^2}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_\phi^*}{\partial z}, \frac{\pi_\phi^*}{\rho}$$

en deze termen worden alle oneindig groot indien  $\rho = 0$  wordt.

De keuze  $\underline{\pi} = \underline{\pi}_z$  en  $\underline{\pi}^* = \underline{\pi}_z^*$  is dus goed en zeker voldoende.

Uitschrijven van vergelijking (I.13) levert dan:



$$\begin{aligned}
 E_{\rho} &= \frac{\partial \pi_z}{\partial z \partial \rho} & H_{\rho} &= \frac{\partial \pi_z^*}{\partial z \partial \rho} \\
 H_{\varphi} &= -j\omega\epsilon \frac{\partial \pi_z}{\partial \rho} & E_{\varphi} &= j\omega\mu \frac{\partial \pi_z^*}{\partial \rho} \\
 E_z &= \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial z^2} + k^2 \pi_z & H_z &= \frac{\partial^2 \pi_z^*}{\partial z^2} + k^2 \pi_z^*
 \end{aligned} \tag{I.15}$$

PAR. I.4.

Oplossing van de golfvergelijking en aanpassing aan de randvoorwaarden.

De scalaire golfvergelijking luidt in het cirkelcylindrische coördinatensysteem: voor  $\pi_z$ , en  $\pi_z^*$ :

$$\nabla^2 \pi + k^2 \pi = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} + k^2 \pi = 0. \tag{I.14}$$

Vanwege de periodiciteit der structuur moet de  $z$ -afhankelijkheid van  $\pi$  aan bepaalde eisen voldoen. De beschouwde structuur is periodiek met periode 1. Bij dergelijke structuren wordt vaak gebruik gemaakt van toepassing van het theorema van Floquet, hetgeen erop neer komt, dat de velden worden vermenigvuldigd met een complexe grootte bij verschuiving van de structuur over een afstand 1, wat door de structuur zichzelf als het ware weer bedekken kan. De velden op plaats  $z + 1$  kunnen slechts van de velden op plaats  $z$  afwijken door een constante factor.

Het is duidelijk dat aan de periodiciteit wordt beantwoord indien de  $z$ -afhankelijkheid der velden wordt gekozen als:

$$e^{-\gamma z} \quad , \quad e^{-j 2\pi n z / 1} = e^{-j \gamma_n z} \tag{I.15}$$

met

$$\gamma_n = -j\gamma + \frac{2n\pi}{1}$$

hierin kan  $n$  alle gehele waarden aannemen.

De oplossing voor  $\pi$  met bovengenoemde  $z$ -afhankelijkheid moet voldoen aan de golfvergelijking. Door toepassing van de bekende procedure van scheiding van variabelen wordt gevonden dat de  $\varphi$ -afhankelijkheid ook als exponentiële macht kan worden geschreven. De oplossing voor  $\pi$  is dan:

$$\pi(\rho, \varphi, z) = f(\rho) \cdot e^{-jm\varphi} \cdot e^{-\gamma_n z} .$$

Vanwege de eenduidigheid der oplossing moet  $m$  geheel zijn, doch  $m$  mag alle gehele waarden aannemen.

De differentiaalvergelijking die overblijft, en waaraan  $f(\rho)$  moet voldoen is nu:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right\} + \left[ (k^2 - \gamma_n^2) \rho^2 - m^2 \right] f = 0$$

Oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn bekend als Besselfuncties. De oplossing is algemeen te schrijven als :

$$f(\rho) = Z_m(\beta_n \rho)$$

met

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \gamma_n^2} \quad (\text{I.17})$$

$Z_m(\beta_n \rho)$  is een Besselfunctie van orde  $m$  en argument  $\beta_n \rho$ , en kan bestaan uit Besselfuncties van de eerste of tweede soort, en Hankelfuncties van de eerste of tweede soort.

Daar slechts cirkelsymmetrische oplossingen worden gezocht, wordt voor  $\pi$  nu gevonden:

$$\pi(\rho, \varphi, z) = Z_0(\beta_n \rho) \cdot e^{-j \gamma_n z}$$

Daar een complete set oplossingen gebruikt moet worden om aan de randvoorwaarden voor  $\rho = a$  te voldoen, vinden we als algemene oplossing:

$$\pi(\rho, \varphi, z) = \sum_n A_n \cdot Z_0(\beta_n \rho) \cdot e^{-j \gamma_n z} \quad (\text{I.13})$$

waarin  $A_n$  een constante is die afhankelijk is van de randvoorwaarden, frequentie, enz.

De gevonden oplossing voor  $\pi$  moet voldoen aan de eisen van eindigheid, en aan de stralingsvoorwaarde.

De enige functie die eindig blijvende eigenschappen heeft indien  $\rho = 0$  is, is de Besselfunctie  $J_0(\beta_n \rho)$ .

Voor het interne gebied wordt dus gekozen

$$Z_0(\beta_n \rho) = J_0(\beta_n \rho) \quad \text{voor } 0 \leq \rho \leq a$$

en voor het externe gebied wordt gekozen:

$$Z_0(\beta_n \rho) = H_0^{(2)}(\beta_n \rho),$$

daar deze functie aan de stralingsvoorwaarde voldoet bij de gekozen tijdsafhankelijkheid  $e^{+j\omega t}$ .

Voor de scalaire potentialen  $\pi_z$  en  $\pi_z^*$  kan nu dus geschreven worden:

$$\left. \begin{aligned} \pi_z^i &= \sum_n A_n^i \cdot J_0(\beta_n \rho) \cdot e^{-j\gamma_n z} \\ \pi_z^{*i} &= \sum_n B_n^i J_0(\beta_n \rho) \cdot e^{-j\gamma_n z} \end{aligned} \right\} 0 \leq \rho \leq a$$

(I.19)

$$\left. \begin{aligned} \pi_z^e &= \sum_n A_n^e \cdot H_0^{(2)}(\beta_n \rho) \cdot e^{-j\gamma_n z} \\ \pi_z^{*e} &= \sum_n B_n^e H_0^{(2)}(\beta_n \rho) \cdot e^{-j\gamma_n z} \end{aligned} \right\} a \leq \rho \leq \infty$$

Deze oplossingen moeten nu voldoen aan de diverse reeds afgeleide randvoorwaarden.

1) Voorwaarde (I.6) :  $E_\rho^i = E_\rho^e = 0$  als  $\rho = a$ .

Met behulp van (I.15) en (I.19) wordt deze voorwaarde voor het interne gebied:

$$0 = \sum_n B_n^i \cdot \beta_n J_1(\beta_n a) e^{-j\gamma_n z}$$

Aan deze vergelijking kan slechts voldaan worden indien  $B_n^i = 0$  voor alle  $n$  of indien:  $J_1(\beta_n a) = 0$ ; wat inhoudt dat  $\beta_n a$  de  $n^{\text{de}}$  wortel is van de vergelijking  $J_1(z) = 0$ .

De oplossingen die zo ontstaan zijn juist de TE modes voor de gewone gesloten cirkelcylindrische golfpijp, de oplossingen zijn dus in geen geval beïnvloed door de aanwezigheid der smalle gleuven. Dat is verklaarbaar daar  $H_z$  de enige component is die stromen in de wand van de pijp veroorzaakt; die stromen lopen in de  $\rho$ -richting en zullen geen invloed ondervinden van de aanwezigheid van smalle gleuven in de golfpijpwand. Het is oninteressant deze oplossing verder te beschouwen en daarom zal  $\pi_z^*$  in het vervolg gelijk aan nul gesteld worden.

$$\pi_z^* = 0. \quad (\text{I.20})$$

2) Continuïteit van het  $E_z$  veld voor  $\rho = a$ .

Een uitdrukking voor  $E_z^i(a, \rho, z)$  is afgeleid in formule (I.10). Toepassing van (I.15) op (I.19), en substitutie in vergelijking (I.10) levert:

$$\sum_n \beta_n^2 \cdot A_n^i \cdot J_0(\beta_n a) \cdot e^{-j\gamma_n z} = \frac{1}{l} \sum_n \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') \cdot e^{j\gamma_n(z'-z)} dz'.$$

Dus  $A_n^i$  is hieruit op te lossen en gevonden wordt:

$$A_n^i = \frac{1}{\beta_n^2 \cdot J_0(\beta_n a)} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n z'} dz'$$

Op analoge wijze wordt  $A_n^e$  gevonden, de Besselfunctie  $J_0(\beta_n a)$  is dan echter vervangen door de Hankelfunctie  $H_0^{(2)}(\beta_n a)$ .

Substitutie van deze gevonden oplossingen in de algemene oplossing voor  $\pi_z^i$  en  $\pi_z^e$  geeft nu:

$$\pi_z^i = \frac{1}{l} \sum_n \frac{J_0(\beta_n \rho)}{\beta_n^2 J_0(\beta_n a)} \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n(z'-z)} dz' \quad (I.21)$$

en

$$\pi_z^e = \frac{1}{l} \sum_n \frac{H_0^{(2)}(\beta_n \rho)}{\beta_n^2 H_0^{(2)}(\beta_n a)} \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n(z'-z)} dz'$$

3) De laatste randvoorwaarde waaraan moet worden voldaan is de continuïteitseis voor het magnetisch veld in de gleuven; door deze eis is dan tevens  $E_\rho$  continu in de gleuven, hetgeen volgt uit vergelijking van de uitdrukkingen voor  $H_\rho$  en  $E_\rho$  in (I.15).

Men volgt uit (I.15), (I.21) en (I.11):

$$\begin{aligned} \frac{j\omega\epsilon}{l} \sum_n \frac{1}{\beta_n} \left\{ \frac{H_1^{(2)}(\beta_n a)}{H_0^{(2)}(\beta_n a)} - \frac{J_1(\beta_n a)}{J_0(\beta_n a)} \right\} \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n(z'-z)} dz' \\ = \frac{1}{l} \sum_n \int_{d/2}^{1-d/2} J_z(z') e^{j\mathcal{P}_n(z'-z)} dz' \end{aligned} \quad (I.22)$$

Deze oplossing is echter te ingewikkeld.  $J_z(z')$  is nl. geen onafhankelijke veranderlijke, maar wordt bepaald door  $E_z(z')$  en  $\mathcal{P}$ .

Zijn de exacte waarden van  $E_z(z')$  en  $\mathcal{P}$  bekend, dan zijn de veldcomponenten bekend en ligt de grootte  $J_z(z')$  vast.

De opbouw van de gleufstructuur is reeds tot uitdrukking gekomen in de randvoorwaarde voor  $E_z$ , en daardoor ook in de oplossing voor  $\pi_z^i$  en  $\pi_z^e$  (I.21).

De continuïteitseis voor het magnetisch veld in de gleuven kan daarom eenvoudiger worden gesteld. We eisen dat het magnetisch veld continu is in de gleuf waarvoor geldt:  $|z| \ll d/2$ , dan kan eenvoudig worden aangetoond dat dan in alle gleuven het magnetisch veld continu is.

Het magnetisch veld moet continu zijn in alle gleuven, dus voor alle  $z + ml$ , waarbij:  $|z| \leq d/2$ , en  $m$  alle gehele waarden mag aannemen. Nu volgt uit (I.21) en (I.15) en de bovengenoemde voorwaarde

$$\frac{j\omega\epsilon}{1} \sum_n e^{-j\mathcal{P}_n(z+ml)} = \frac{1}{\beta_n} \left\{ \frac{H_1^{(2)}(\beta_n a)}{H_0^{(2)}(\beta_n a)} - \frac{J_1(\beta_n a)}{J_0(\beta_n a)} \right\} \times \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n z'} dz' = 0 \quad (\text{I.23})$$

voor alle  $m$  en alle  $z$  waarvoor  $|z| \leq d/2$ .

met behulp van (I.16) kan vereenvoudigd worden:

$$e^{-j\mathcal{P}_n(z+ml)} = e^{-j\mathcal{P}_n z} \cdot e^{-j\mathcal{P}_n ml}$$

De laatste exponentiële macht is onafhankelijk van  $n$  en kan dus voor het sommatieteken worden geplaatst. Weglaten van de term voor het sommatieteken geeft nu als vereenvoudiging van (I.23):

$$\sum_n \frac{1}{\beta_n} \left\{ \frac{H_1^{(2)}(\beta_n a)}{H_0^{(2)}(\beta_n a)} - \frac{J_1(\beta_n a)}{J_0(\beta_n a)} \right\} \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n(z'-z)} dz' = 0 \quad (\text{I.24})$$

voor alle  $z$  waarvoor geldt:  $|z| \leq d/2$ .

Deze integraalvergelijking geeft als oplossing het elektrisch veld in de gleuf  $E_z(z)$ , en de complexe voortplantingsconstante  $\mathcal{P}$ . Een exacte oplossing voor deze integraalvergelijking is echter niet mogelijk, of de methode hiervoor is onbekend. Het is dus nodig benaderingen voor deze integraalvergelijking te zoeken. Worden  $E_z(z)$  en  $\mathcal{P}$  nu bekend verondersteld, dan kan voor de diverse veld-componenten worden gevonden:

$$E_{\rho}^i = \frac{1}{1} \sum_n \frac{\mathcal{P}_n}{\beta_n} \cdot \frac{J_1(\beta_n \rho)}{J_0(\beta_n a)} \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n(z'-z)} dz'$$

$$E_z^i = \frac{1}{1} \sum_n \frac{J_0(\beta_n \rho)}{J_0(\beta_n a)} \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n(z'-z)} dz' \quad (\text{I.25})$$

$$E_{\varphi}^i = \frac{j\omega\epsilon}{1} \sum_n \frac{J_1(\beta_n \rho)}{\beta_n J_0(\beta_n a)} \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') e^{j\mathcal{P}_n(z'-z)} dz'$$

Voor het externe gebied gelden dezelfde vergelijkingen, maar de Bessel-functies worden vervangen door Hankelfuncties van de tweede soort. Bovenstaande veldgrootheden zijn nu op een constante factor<sup>na</sup> bepaald. De constante factor wordt ondergebracht in  $E_z(z)$ , en kan slechts bepaald worden indien de energiestroom behorende bij de mode, of het karakter van de exciterende bron bekend is. Ter volledigheid zij vermeld, dat de in (I.25) gegeven veldcomponenten voor  $\rho = a$  voldoen aan de wet van behoud van lading. Deze wet luidt

$$\nabla \cdot \underline{J} = - \frac{\partial q}{\partial t} = - j\omega q \quad \text{voor } \rho = a.$$

Hierin is  $\underline{J}$  de reeds eerder gedefiniëerde oppervlaktestroomdichtheid en  $q$  is de oppervlakteladingsdichtheid. Het verband tussen  $\underline{J}$  en het magnetisch veld is reeds gegeven in formule (I.5); het verband tussen  $q$  en het normale elektrische veld volgt uit de wet van Gauss, die wordt toegepast op een oppervlak van een metalen geleider en luidt:

$$E_n = E_\rho = \frac{q}{\epsilon_0} = E_\rho^e - E_\rho^i.$$

Nu kan eenvoudig worden aangetoond dat voor de gegeven veldcomponenten inderdaad voldaan wordt aan de wet van behoud van lading.

#### PAR. I.5.

##### Benaderingen der integraalvergelijking.

Daar een exacte oplossing niet mogelijk is voor de opgestelde integraalvergelijking, worden benaderde oplossingen gezocht. De belangrijkste benadering komt er op neer, dat een geschikte keuze wordt gemaakt voor het tangentiële elektrische veld in de gleuf, waardoor in de vergelijking als enige onbekende de voortplantingsconstante  $\gamma$  overblijft. Daar<sup>de</sup>  $\rho$ -ingen van infinitesimalo dikte zijn verondersteld, moet  $E_z$  in de gleuf oneindig groot worden wanneer de rand der gleuf wordt bereikt. Deze veronderstelling wordt bevestigd door algemene beschouwingen betreffende het bedrag van een elektromagnetisch veld in de buurt van spitse metalen hoeken.

Voor een E.M. golf die invalt op een oppervlakte met een rand van infinitesimale dikte kan worden aangetoond, dat  $E_z$  een singulier bedrag bezit, volgens  $E_z = O(R^{-\frac{1}{2}})$ , waarbij  $R$  de afstand tot de rand van de gleuf aangeeft. (Zie lit. 5).

Voor het elektrisch veld in de referentiegleuf  $(-d/2 \ll z \ll d/2)$  kan nu worden geschreven:

$$E_z(z) = A \cdot e^{-\gamma z} / (z-d/2)(-z-d/2) \quad \text{voor } |z| \ll d/2 \quad (\text{I.26})$$

en deze veldverdeling is een goede benadering (daar de gleufbreedte klein is) voor het werkelijk optredende veld in de gleuf. Er kan echter ook worden aangenomen dat  $E_z$  in de gleuf een constante amplitude heeft, en deze veronderstelling leidt tot resultaten die vrij goed overeenkomen met de resultaten verkregen door de meer realistische bovengenoemde singuliere waarde voor  $E_z(z)$ . In vele literatuur over gleuven wordt slechts gebruik gemaakt van deze constante  $E_z(z)$  verdeling.

Hiervoor geldt dus:

$$E_z(z) = A \cdot e^{-\gamma z} \quad \text{voor } |z| \ll d/2 \quad (\text{I.27})$$

De gebruikte constanten  $A$  hebben in de twee vergelijkingen een andere waarde, en kunnen in verband gebracht worden met de spanning  $V$  over de gleuf volgens de vergelijking

$$V = \int_{\text{gleuf}} E_z(z) dz \quad (\text{I.28})$$

Op diverse manieren wordt nu met behulp van de gevonden benaderingen voor  $E_z(z)$ , een vereenvoudigde oplossing van de integraalvergelijking (I.24) bereikt. Twee variatieprocedures worden toegepast en een methode, waarbij de randvoorwaarden op een geschikte manier vereenvoudigd worden. De drie methoden worden nu achtereenvolgens toegepast.

### I.5.1

Geschikte vereenvoudigingen der randvoorwaarden.

Indien een benaderde distributie van het elektrisch veld in de gleuven wordt aangenomen, dan is het natuurlijk niet meer mogelijk om continuïteit van het magnetisch veld te eisen in alle punten van de gleuf. De benadering, die tot het eenvoudigste eindresultaat leidt, is de eis dat het magnetisch veld continu is langs een lijn in het centrum der gleuf. Dat houdt dus in, dat in de integraalvergelijking (I.24)  $z = 0$  gehouden wordt. Oplossing der vergelijking levert dan voor de twee veldverdelingen achtereenvolgens:

Door substitutie van veldverdeling (I.26) in de integraalvergelijking (I.24) ontstaat een integraal, die er als volgt uitziet.

$$\int_{-d/2}^{d/2} \frac{e^{j 2n\pi z'/l}}{\sqrt{(d/2)^2 - z'^2}} dz' = 0 \quad (\text{I.29})$$

Onder het integraalteken kan de exponentiële macht gesplitst worden in een sinus en een cosinus. Daar de noemer even is levert de sinus-term in de teller geen bijdrage tot de integraal. Uit literatuuropgave 7 is de integraal

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos ax}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi J_0(a) \quad \text{bekend.} \quad (\text{I.30})$$

Substitutie van  $z' = \frac{dx}{2}$  in de integraal (I.29) geeft dan met behulp van (I.30) als oplossing

$$\sum_n \frac{1}{\beta_n} \left\{ \frac{H_1^{(2)}(\beta_n a)}{H_0^{(2)}(\beta_n a)} - \frac{J_1(\beta_n a)}{J_0(\beta_n a)} \right\} J_0\left(\frac{n\pi d}{l}\right) = 0 \quad (\text{I.31})$$

waarin dus gebruik is gemaakt van de singuliere gleufveldverdeling en waarin alle constanten voor het sommatieteken zijn weggelaten. Voor de tweede gleufveldverdeling is de oplossing van de integraalvergelijking:

$$\sum_n \frac{1}{\beta_n} \left\{ \frac{H_1^{(2)}}{H_0^{(2)}} - \frac{J_1}{J_0} \right\} \cdot \frac{\sin(n\pi d/l)}{n\pi d/l} = 0. \quad (\text{I.32}).$$

Hierin zijn de argumenten der Bessel en Hankelfuncties ter vereenvoudiging weggelaten. Het verschil in de twee veldverdelingen komt tot uitdrukking in het verschil tussen de Besselterm in vergelijking (I.31) en de sinus-term in vergelijking (I.32).

Uit de twee opgestelde vergelijkingen waaruit  $\beta'$  bepaald kan worden blijkt, dat de afhankelijkheid van  $\beta'$  van de gleufbreedte  $d$  tot uitdrukking komt door de laatste termen der beide vergelijkingen. De verschillende veldverdelingen leiden dus tot een verschillende oplossing  $\beta'(d)$ .



Het is echter mogelijk over dit verschil iets te zeggen.

De twee termen  $J_0(0,767x)$  en  $\frac{\sin x}{x}$  komen voor  $|x| \leq \pi$  goed met elkaar overeen. Wordt  $d/l$  klein gekozen, dan zal deze overeenkomst tot grote  $n$  ( $n!$ , tot  $n = 1/d$ ) geldig zijn.

Indien we nu mogen veronderstellen dat de hoofdbijdrage der som  $\sum_n$  verkregen wordt voor die  $n$  waarvoor  $|n| \leq 1/d$  is, en de bijdrage tot  $\sum_n$  voor alle  $|n| > 1/d$  verwaarloosd mag worden, dan kunnen we stellen dat het verschil der twee veld distributies neerkomt op een schijnbare verandering der effectieve gleufbreedte  $d$ .

### I.5.2

Toepassing van variatierekening.

Hy neman (zie lit. 1) heeft voor een rechthoekige golfpijp met transversale gleuven in de brede wand, variatieformules aangegeven en gebruikt ter vereenvoudiging van de integraalvergelijking. De resultaten van deze benadering stemden goed overeen met metingen aan een dergelijke structuur. Vanwege de overeenkomst tussen de door Hijman beschouwde structuur en de hier behandelde structuur, kunnen de variatieprocedures ook hier worden toegepast. De eerste benadering luidt:

$$\iint_{\text{gleuf}} E_z(z) \left\{ H_\varphi^e - H_\varphi^i \right\}_{\varphi=a} dS = 0. \quad (\text{I.33})$$

Deze integraalvergelijking heeft stationaire eigenschappen voor  $\gamma'$  voor kleine variaties van  $E_z(z)$  om de correcte waarde van  $E_z(z)$ , onder voorwaarde dat  $1/\lambda$  naar nul nadert en  $\gamma'$  complex is.

Deze integraalvergelijking is in feite een energievergelijking voor het gebied van de gleuf; geëist wordt dat het verschil tussen binnenkomende en uitgestraalde energie gemiddeld gelijk is aan nul., daar in de gleuf natuurlijk geen energie kan worden opgeslagen.

Substitutie van de in vergelijking (I.25) gevonden magnetische veldcomponenten en de singuliere benadering voor het elektrische gleufveld geeft als oplossing:

$$\sum_n \frac{1}{\beta_n} \left\{ \frac{H_1^{(2)}}{H_0^{(2)}} - \frac{J_1}{J_0} \right\} \cdot J_0^e \left( \frac{n\pi d}{l} \right) = 0 \quad (\text{I.34})$$

Wordt de benadering gebruikt, waarbij  $E_z(z)$  constant genomen wordt, dan wordt

$$J_0^2(n\pi d/l) \text{ vervangen door } \left( \frac{\sin(n\pi d/l)}{n\pi d/l} \right)^2$$

I.5.3.

Als derde benadering wordt ook een variationele formule gebruikt die aangegeven is door Hyneman.

Wordt integraalvergelijking (I.24) geschreven als

$$\int_{-d/2}^{d/2} E_z(z') \cdot K(z|z') dz' = 0$$

$$\text{met } K(z|z') = \sum_n \frac{1}{\beta_n} \left\{ \frac{H_1^{(2)}}{H_0^{(2)}} - \frac{J_1}{J_0} \right\} e^{j\gamma_n(z'-z)} \quad (\text{I.35})$$

kan worden aangetoond, dat de vergelijking

$$\int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} E_z^*(z') \cdot E_z(z) \cdot K(z|z') dz dz' = 0 \quad (\text{I.36})$$

stationaire eigenschappen heeft voor  $\gamma$  voor kleine variaties van  $E_z(z)$  om de correcte waarde van  $E_z(z)$  (De ster betekent dat de complex geconjugeerde waarde is genomen.)

Dit geldt echter onder voorwaarde :

$$K(z|z') = K^*(z'|z) \quad (\text{I.37})$$

In paragraaf I.6.1 wordt aangetoond dat aan deze gelijkheid slechts voldaan wordt indien de voortplantingsconstante  $\gamma$  imaginair is en groter dan  $k$ :  $|-j\gamma| > k$ . Door deze voorwaarde ontstaan oplossingen die slechts geldig zijn voor oppervlaktegolven.

Oplossing van vergelijking (I.36) geeft nu :

$$\sum_n \frac{1}{\beta_n} \left\{ \frac{H_1^{(2)}}{H_0^{(2)}} - \frac{J_1}{J_0} \right\} J_0^2(n\pi d/l) = 0. \quad (\text{I.38})$$

indien de asymptotische benadering voor  $E_z(z)$  gekozen wordt. Wordt de constante benadering gekozen dan wordt de Besselfunctie weer vervangen door een sinusfunctie.

## I.5.4.

Convergentie der reeksen voor grote n.

1). Voor  $\beta_n$  geldt volgens (I.17) en (I.9) :

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - (-j\gamma + 2n\pi/l)^2}$$

Voor grote n (zodat k en  $\gamma$  te verwaarlozen zijn) zal  $\beta_n$  zich dus evenredig met n gedragen.

2). Voor grote  $\beta_n$ , dus voor grote n, is het asymptotisch gedrag der Hankel en Besselfuncties te schrijven als :

$$H_m^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j(z - m\pi/2 - \pi/4)}$$

$$J_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - m\pi/2 - \pi/4)$$

Hieruit volgt dat de quotiënten der Bessel- en Hankelfuncties in vergelijking (I.34) geen gedrag bezitten voor grote n, dat de convergentie der reeks kan versnellen.

3) De laatste termen zijn:

$J_0(n\pi d/l)$ ,  $J_0^2(n\pi d/l)$ ,  $\frac{\sin n\pi d/l}{n\pi d/l}$  en  $(\frac{\sin n\pi d/l}{n\pi d/l})^2$   
en deze termen zullen voor grote n convergeren als resp.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2};$$

Het totale convergerende gedrag zal dus voor grote n evenredig zijn met  $1/n^{3/2}$ ,  $1/n^2$ , of  $1/n^3$  afhankelijk van de keuze der vereenvoudiging.

Welke benaderde oplossingen de beste resultaten geven kan slechts door vergelijking van berekende en gemeten resultaten worden bepaald.

Als bijzondere moeilijkheid treedt het feit op dat  $\beta_n$  in het algemeen complex zal zijn voor leaky-wave-modes; (voor oppervlaktegolven is  $\beta_n$  reëel. (Zie par. 1.6):)

De oplossing van (I.34) is dus zeker geen eenvoudige zaak en zal aanzienlijke programmering en rekenwerk met zich mee brengen, daar veel termen moeten worden meegenomen om nauwkeurig de som der reeks te bepalen voor een bepaalde keuze van  $\gamma$ , waarna met bijv. een iteratieve methode de waarde van  $\gamma$  bepaald moet worden waarvoor de som der reeks nul wordt.

Van een oplossing der vergelijking is dan ook afgezien.

Resumerend kan dus worden aangenomen dat de bepaling van  $\gamma$  voor leaky-waves geen eenvoudig werk is vanwege de slechte convergentie der reeks, en het feit dat  $\beta_n$  complex is. Wanneer we de structuur willen gebruiken om antenne-ontwerpen te realiseren, zijn we bovendien geïnteresseerd in de eigenschappen van  $\gamma$  als functie van de straal  $a$ , de gleufbreedte, en de afstand der gleuven, waardoor veel berekeningen moeten worden uitgevoerd. Indien  $\gamma$  bekend is voor deze structuren is het verder mogelijk om met methodes als bijv. door Honey (zie lit. 9) aangegeven zijn antenne-ontwerpen te verwezenlijken.

#### I.6. Oppervlaktegolven.

Deze golven planten zich langs een bepaalde structuur voort met een imaginaire voortplantingsconstante  $\gamma$ , en een snelheid die kleiner is dan de lichtsnelheid, terwijl de elektromagnetische veldvectoren in de radiale richting een exponentieel karakter bezitten, waarbij geen energie in de radiale richting wordt uitgestraald. De in de vorige paragraaf afgeleide vergelijkingen ter bepaling van  $\gamma$  zijn ook geldig indien  $\beta_n$  imaginair is. De Bessel en Hankelfuncties kunnen dan worden vervangend door z.g. I en K-functies; de gemodificeerde Bessel en Hankelfuncties voor imaginaire argumenten. Het verband tussen de gewone en de gemodificeerde Besselfuncties is; (zie bijv. lit. 2 of 4)

$$J_m(z) = e^{-j m \pi / 2} I_m(jz)$$

$$H_m^{(2)} = j \frac{2}{\pi} e^{j m \pi / 2} K_m(jz) \quad (I.39)$$

$$\text{Stel } \beta_n = -j \sigma_n \quad (I.40)$$

dan wordt vergelijking (I.38):

$$\sum_n \frac{1}{\sigma_n} \frac{K_1(\sigma_n a)}{K_0(\sigma_n a)} + \frac{I_1(\sigma_n a)}{I_0(\sigma_n a)} J_0^2(n\pi d/l) = 0 \quad (I.41)$$

Tussen de functies  $I_m$  en  $K_m$  bestaat nog een betrekking die deze vergelijking nog kan vereenvoudigen.

Er geldt nl. (zie lit. 4) de relatie van Wronski:

$$\mathcal{W}(I_m, K_m) = I_m K_m' - I_m' K_m = -\frac{1}{\sigma_n a}$$

Het accent betekent hierin differentiatie naar het argument. Verder geldt als  $m = 0$  genomen wordt:  $I_0' = +I_1$  en  $K_0' = -K_1$  dus

$$-\mathcal{W}(I_0, K_0) = I_0 K_1 + I_1 K_0 = \frac{1}{\sigma_n a}$$

Substitutie hiervan in vergelijking (I.41) geeft dan als vereenvoudiging:

$$\sum_n \frac{J_0^2(n\pi d/l)}{\sigma_n^2 K_0(\sigma_n a) \cdot I_0(\sigma_n a)} = 0 \quad (I.42)$$

Voor deze vergelijking is het natuurlijk weer mogelijk om

$J_0^2(n\pi d/l)$  te vervangen door

$$\left( \frac{\sin(n\pi d/l)}{n\pi d/l} \right)^2 \quad \text{indien de gleufveldverdeling met constante ampli-}$$

tude wordt gebruikt. Het is ook mogelijk een vergelijking op te stellen voor benaderingen als in (I.5.1) dan wordt afhankelijk van de gleufveldverdeling  $J_0^2(m\pi d/l)$  vervangen door  $J_0^2(n\pi d/l)$  of

$\frac{\sin n\pi d/l}{n\pi d/l}$ . Voor deze twee laatste waarden is een dergelijke vergelijking als (I.42) .1 gegeven door Pensiper (zie lit. 4).

De hier gevonden vergelijkingen bezitten als voordeel t.o.v. de vergelijkingen die zijn afgeleid in de paragraaf I.5.1 en I.5.2, het feit dat slechts oplossingen behoeven te worden gezocht voor waarden van  $\sigma_n$  die reëel zijn, wat een grote vereenvoudiging voor het bepalen der oplossing  $\mathcal{J}'$  tengevolge heeft.

#### I.6.1 De verboden gebieden voor $\mathcal{J}'$ .

Bij de toepassing van het variatieprocédé in Par. I.5.3 is als voorwaarde gesteld, dat moet worden voldaan aan de eis dat:

$$K(z|z') = K^*(z'|z). \quad (I.37)$$

$K(z|z')$  gegeven is in formule (I.35).

Eenvoudig kan worden aangetoond, dat slechts voor reële  $\gamma'_n$ , en imaginaire  $\beta_n$  aan deze voorwaarde wordt voldaan: voor dit geval geldt:

$$K(z|z') = \sum_n \frac{1}{-j\sigma_n} \frac{jK_1(\sigma_n a)}{K_0(\sigma_n a)} - \frac{jI_1(\sigma_n a)}{I_0(\sigma_n a)} e^{j\gamma'_n(z'-z)} = K^*(z'|z) .$$

Voor de oppervlaktegolven moeten de parameters  $\gamma'$ ,  $\gamma'_n$  en  $\sigma_n$  dus aan bepaalde eisen voldoen, waardoor gebieden kunnen worden aangewezen waarbinnen geen oplossingen voor kunnen bestaan, de z.g. verboden gebieden.

Deze voorwaarden zijn resumerend:

$$\begin{aligned} \sigma_n = \sqrt{\gamma_n^2 - k^2} & \text{ moet reëel zijn} \\ \gamma_n = -j\gamma' + 2n\pi/l & \text{ moet reëel zijn} \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

Stel  $\gamma' = j\beta \rightarrow \gamma_n = \beta + 2n\pi/l$  .

Deze laatste voorwaarde houdt tevens in dat  $\gamma'$  imaginair moet zijn.

Uit de eerste voorwaarde volgt dat:

$$|\gamma_n| > k \quad \text{voor alle waarden van } n;$$

of

$$|\beta + n \cdot 2\pi/l| > k \quad \text{voor alle waarden van } n. \quad (\text{I.44})$$

en zowel positief als negatieve  $\beta$  .

Onderzoek van deze ongelijkheid voor positieve waarden van  $n$  geeft:

$$\beta > -n2\pi/l \quad \text{dan is } \beta + n2\pi/l > k \quad \text{of} \quad \beta > k - n2\pi/l$$

$$\beta < -n2\pi/l \quad \text{dan is } -\beta - n2\pi/l > k \quad \text{of} \quad \beta < -k - n2\pi/l$$

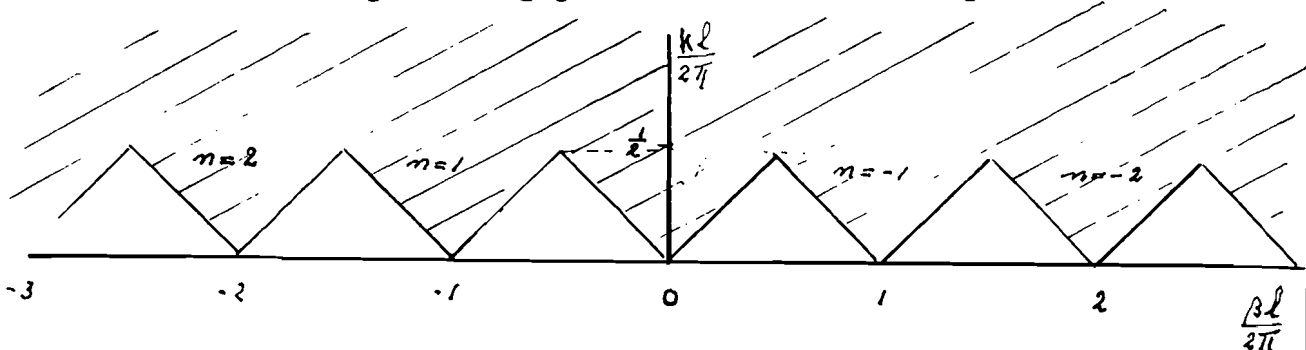
wordt  $n$  negatief gekozen:

$$\beta > -n2\pi/l \quad \text{dan is } \beta + n2\pi/l > k \quad \text{of} \quad \beta > k - n2\pi/l$$

$$\beta < -n2\pi/l \quad \text{dan is } -\beta - n2\pi/l > k \quad \text{of} \quad \beta < -k - n2\pi/l$$

Deze oplossingen kunnen ook anders worden geschreven: voor een bepaalde  $n$  (positief of negatief) is het voor  $\beta$  verboden gebied bepaald door: verboden gebied  $-k - n2\pi/l < \beta < k - n2\pi/l$  (I.45)

Deze uitdrukking is weergegeven in onderstaande figuur:



waarin het voor  $\beta$  verboden gebied gearceerd is aangegeven.

In de verboden gebieden is aangegeven door welke  $n$  dit gebied bepaald wordt.

Oplösungen van  $\beta$  blijken slechts mogelijk te zijn, indien

$$\frac{k}{2\pi/l} < \frac{1}{2} \quad \text{of indien } l < \lambda/2.$$

Dit is een gebruikelijke voorwaarde, wanneer geëist wordt dat de hoofdstralingsrichting samenvalt met de  $z$ -as. (zie bijv. lit. 10).

Is voor het systeem  $l$  bepaald, dan zijn dus alleen oppervlaktegolven mogelijk indien de frequentie kleiner blijft dan de grensfrequentie.

Soortgelijke voorwaarden treden ook op bij andere periodieke structuren. (zie bijv. lit. 2 en 4).

Bij de oplossing van vergelijking (I.42) behoeven dus slechts die waarden van  $\beta$  beschouwd te worden, die in de geoorloofde gebieden liggen. Methoden waarmee een oplossing van vergelijking (I.42) verkregen kunnen worden zijn gegeven door Sensiper (lit. 4).

Voor oppervlaktegolven is het oplossen van vergelijking (I.42) eenvoudiger, dan de overeenkomstige oplossing voor de leaky-wave modes, vanwege het feit, dat slechts reële parameters optreden in de vergelijking, en vanwege het feit dat  $\beta$  slechts in de geoorloofde gebieden mag liggen.

Zowel voor leaky-wave-modes als voor oppervlaktegolven zijn de voortplantingsconstanten niet bepaald, vanwege het aanzienlijke rekenwerk dat voor de oplossing nodig is.

HOOFDSTUK II. Eigenschappen van één omtreksgeleuf.Inleiding:

Daar de in hoofdstuk I gebruikte methode ter bepaling van de eigenschappen der omtreksgeleuven niet tot een eenvoudige bruikbare oplossing heeft geleid, wordt het probleem nu op een andere manier benaderd.

De eigenschappen der omtreksgeleuven worden nu onderzocht met behulp van het theorema van Lorentz. De reeds in hoofdstuk I genoemde vereenvoudigingen der structuur worden ook hier weer toegepast.

Aanvankelijk wordt uitgegaan van een golfpijp met één geleuf en getracht wordt dit model te vervangen door een transmissielijnmodel, waarin de geleuf door een impedantienetwerk wordt voorgesteld.

Dit is slechts mogelijk wanneer we aannemen dat in de golfpijp slechts één  $TM_{0n}$  mode kan propageren; we kiezen hiervoor de  $TM_{01}$  mode.

In par. 1 wordt het stralingsdiagram en het totale uitgestraalde vermogen berekend indien de geleuf een opgedrukte spanning  $V$  bezit. In de volgende drie paragrafen wordt daarna het transmissielijnmodel opgesteld voor de golfpijp met één geleuf. In paragraaf 5 wordt voor een periodieke structuur opgebouwd als in hoofdstuk I, en de complexe voortplantingsconstante is berekend voor diverse afstanden der geleuven.

In de laatste paragraaf worden tenslotte enkele stralingsdiagrammen berekend voor een speciale combinatie van enkele omtreksgeleuven.

PAR. 1.Berekening van het door een geleuf uitgestraalde vermogen

Om voor de onderstaande structuur een transmissielijnmodel samen te stellen is het nodig dat de door de geleuf uitgestraalde vermogen bekend is (zie Lit. 5).



Ter vereenvoudiging van het probleem worden weer de volgende veronderstellingen gemaakt:

- a) de golfpijp is  $\infty$  lang.
- b) de gleufbreedte  $d$  wordt klein genomen, zodat in de gleuf alleen  $E_z$  kan optreden, en  $E_\varphi = 0$  is.
- c) de wanden der pijp zijn  $\infty$  goed geleidend en zonder dikte verondersteld.

Evenals in hoofdstuk I, wordt nu het uitwendige (en voor het gemak ook maar het inwendige) veld berekend als functie van het elektrische veld in de gleuf.

Het uit- en inwendige veld kunnen we ons opgebouwd denken door het elektrische veld  $E_a$  in de gleuf. Doordat de randvoorwaarden overal onafhankelijk zijn van  $\varphi$ , zal nergens een  $E_\varphi$  worden opgewekt.

De nu volgende berekening maakt gebruik van de magnetische vectorpotential  $\underline{A}$ , die voor alle cirkelsymmetrische modes  $E_\varphi = 0$  geeft.

Stellen we de tijdsafhankelijkheid weer als:

$$e^{+j\omega t} \tag{II.1}$$

dan voldoet  $\underline{A}$  aan de golfvergelijking:

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = 0 \tag{II.2}$$

$$\text{met } k^2 = \omega^2 \epsilon \mu . \tag{II.3}$$

Tussen de veldcomponenten en de magnetische vectorpotential  $\underline{A}$  bestaan de volgende betrekkingen:

$$\underline{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \nabla \times \underline{A} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \nabla \cdot \underline{A} - j\omega\mu \underline{A}$$

$$\underline{H} = \nabla \times \underline{A} \tag{II.4}$$

$$\text{Kies nu } \underline{A} = A_z(\rho, z) \bar{a}_z, \text{ dan ontstaan TM}_{on} \text{ modes die onafhankelijk zijn van } \varphi . \tag{II.5}$$

Voor de verdere berekeningen is het nodig (II.4) uit te werken in cylinder en bol-coördinaten: dit levert (m.b.v. II.5).

Voor bol-coördinaten:

$$\underline{H} = E_\varphi = \frac{-1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_z \sin \theta) \bar{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_z \cos \theta) \bar{e}_r \right\} \tag{II.6}$$

$$E = \begin{vmatrix} E_r \\ E_\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial H_\rho}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} H_\rho \\ - \frac{\partial H_\rho}{\partial r} - \frac{1}{r} H_\rho \end{vmatrix} \quad (\text{II.6})$$

in cilindercoördinaten:

$$H = H_\rho = - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

$$E = \begin{vmatrix} E_\rho \\ E_z \end{vmatrix} = \frac{i}{j\omega\epsilon} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} A_z \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \end{vmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Alle andere veldcomponenten zijn = 0 en weggelaten.

De golfvergelijking (II.2) kan ook nog worden uitgedrukt in cilindercoördinaten :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z = 0 \quad (\text{II.8})$$

Deze golfvergelijking moet nu worden opgelost voor het in- en uitwendige gebied van de golfpijp, waarbij moet worden voldaan aan de volgende randvoorwaarden:

Eerste randvoorwaarde.

1)  $H_\rho$  moet bij de gleuf continu verlopen, of:

$$H_\rho \text{ int.} \Big|_{\rho=a} = H_\rho \text{ ext.} \Big|_{\rho=a} \quad (\text{II.9})$$

Voor alle  $|z| \leq d/2$

2) Voor  $\rho = a$  moet  $E_z$  overal = 0 zijn, behalve in de gleuf, daar moet de waarde  $E_a$  worden aangenomen.

Deze randvoorwaarde kunnen we een netter pakje aantrekken door gebruik te maken van Fourieranalyse:

$$E_z \Big|_{\rho=a} = \begin{cases} E_a(z) & -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ 0 & |z| > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$E_a$  kan alleen een functie zijn van  $z$ , daar alles onafhankelijk van  $\varphi$  is.  $E_z(a, \varphi, z)$  is nu geen harmonische functie van  $z$  zoals in Hoofdstuk I, dus moeten in plaats van Fourierreeksen, Fourier-transformatie toegepast worden. Nu kan gedefiniëerd worden: (zie bijv. Litt.3)

$$E_z(a, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\gamma_n) e^{-j\gamma_n z} d\gamma_n \quad (\text{II.11})$$

$$\text{met } E(\gamma_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(a, \varphi, z') e^{j\gamma_n z'} dz' \quad (\text{II.12})$$

Deze laatste integraal kan met (II.10) worden vereenvoudigd, en worden gesubstitueerd in (II.11).

$$E_z(a, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_a(z') e^{j\gamma_n(z'-z)} d\gamma_n dz' \quad (\text{II.13})$$

De functie  $E_z(a, \varphi, z)$  wordt dus opgebouwd uit een oneindig aantal continu veranderlijke modes met voortplantingsconstanten  $\gamma_n$ . In combinatie met (II.7) vinden we dus als tweede rand.

$$\text{voorwaarde: } E_z(a, \varphi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right) \quad (\text{II.14})$$

$\rho = a$

We kunnen nu golfvergelijking (II.8) gaan oplossen voor het binnen-gebied der golfgeleider.

Als oplossing voor  $A_{\text{int}}$  vinden we (zie ook Hoofdstuk I):

$$A_{\text{int}} = c(\gamma_n) \cdot J_0(\beta_n \rho) \cdot e^{-j\gamma_n z}$$

Hierin is de orde van de Besselfunctie = 0 daar de modes cirkel-symmetrisch zijn en verder is:

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \gamma_n^2} \quad (\text{II.15})$$

Algemener kan voor  $A_z$  worden geschreven.

$$A_z = \int_{-\infty}^{\infty} c(\gamma_n) \cdot J_0(\beta_n \rho) \cdot e^{-j \gamma_n z} d\gamma_n$$

Deze oplossing moet voldoen aan de tweede randvoorwaarde (II.14).

$$E_z(a, \rho, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} c(\gamma_n) \cdot \beta_n^2 \cdot J_0(\beta_n a) e^{-j \gamma_n z} d\gamma_n \quad (\text{II.16})$$

Door deze integraal te vergelijken met (II.13) kunnen we  $c(\gamma_n)$  bepalen, door de functies onder het integraalteken aan elkaar gelijk te stellen. Het kan echter ook eleganter.

(II.16) heeft dezelfde vorm als (II.11). (II.12) kan dus ook worden toegepast, en levert:

$$\frac{1}{j\omega\epsilon} c(\gamma_n) \cdot \beta_n^2 \cdot J_0(\beta_n a) = \frac{1}{2\eta} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_a(z') e^{j \gamma_n z'} dz'$$

Met deze  $c(\gamma_n)$  wordt  $A_z$ :

$$A_{z \text{ int}}(\rho, z) = \frac{j\omega\epsilon}{2\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_a(z') \frac{J_0(\beta_n \rho)}{\beta_n^2 J_0(\beta_n a)} e^{-j \gamma_n(z-z')} d\gamma_n dz' \quad (\text{II.17})$$

Bij de bepaling van  $A_{z \text{ ext}}$  gaat alles volkomen analoog; alleen worden de Besselfuncties vervangen door Hankelfuncties van de tweede soort. (vanwege II.1).

Dus:

$$A_{z \text{ ext}}(\rho, z) = \frac{j\omega\epsilon}{2\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_a(z') \frac{H_0^{(2)}(\beta_n \rho)}{\beta_n^2 \cdot H_0^{(2)}(\beta_n a)} e^{-j \gamma_n(z-z')} d\gamma_n dz' \quad (\text{II.18})$$

Voor de bepaling van  $E_a(z')$  kan de eerste randvoorwaarde (II.9) worden toegepast. Met behulp van: (II.17), (II.18), (II.7), (I.16) wordt de oplossing:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{E_a(z')}{\beta_n} \left\{ \frac{J_1(\beta_n a)}{J_0(\beta_n a)} - \frac{H_1^{(2)}(\beta_n a)}{H_0^{(2)}(\beta_n a)} \right\} e^{-j \gamma_n'(z-z')} d\gamma_n' dz' = 0 \quad (\text{II.18})$$

Voor alle  $|z| \leq d/2$

Deze integraalvergelijking vertoont overeenkomst met de overeenkomstige vergelijking (I.20) uit hoofdstuk I. Deze integraalvergelijking is ook niet langs analytische weg op te lossen.

Voor het elektrische veld in de gleuf kan, evenals in Hoofdstuk I, daar de gleufbreedte  $d$  klein is verondersteld, in vergelijking met de golflengte, een constante veldverdeling worden aangenomen. In dit geval stellen we:

$$E_a(z') = \frac{V_0}{d} \cdot e^{j\zeta} \quad (\text{II.19})$$

waarin  $V_0$  het amplitude, en  $\zeta$  de fase is van het gleufveld.

Toevoeging van een exponentiële  $z$ -afhankelijkheid zoals in hoofdstuk I is gesteld, is in dit geval zinloos.

Door deze keuze kan in (II.18) het van  $z'$  afhankelijke integraalgedeelte worden opgelost.

$$A_{z_{\text{ext}}}(\rho, z) = \frac{j\omega\epsilon}{\pi d} V_0 e^{j\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(2)}(\beta_n \rho)}{H_0^{(2)}(\beta_n a)} \frac{e^{-j\gamma_n' z}}{\beta_n \cdot \gamma_n'} \sin \frac{\gamma_n' d}{2} d\gamma_n' \quad (\text{II.20})$$

Voor grote  $r$ : d.w.z. als  $r \rightarrow \infty$  kan deze integraal benadord worden; daarbij wordt tevens overgegaan op bolcoördinaten.

(Zie Harrington. Lit. 5, blz. 275).

Voor willekeurige  $I(n)$  geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\gamma_n) H_0^{(2)}(\beta_n \rho) \cdot e^{-j\gamma_n' z} d\gamma_n' \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2e^{-jkr}}{r} \cdot j \cdot I(-k \cos \theta)$$

dan wordt:

$$A_z(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2\omega\epsilon V_0 e^{j\zeta}}{d} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\sin(\frac{dk}{2} \cos \theta)}{k^3 \sin^2 \theta \cos \theta \cdot H_0^{(2)}(a k \sin \theta)} \quad (\text{II.21})$$

Met (II.6) kan nu  $H_\varphi$  berekend worden. Daar we nu het gebied beschouwen met grote  $r$ , kunnen van de differentialen de termen die evenredig zijn met  $\frac{1}{r}$  worden weggelaten, want  $A_z$  is ook omgekeerd evenredig met  $r$ . (n.l. totaal zou dit  $\frac{1}{r^2}$  worden, wat te verwaarlozen is ten opzichte van een totale factor  $r^2 \cdot \frac{1}{r}$ .)

Voor grote  $r$  wordt (II.6) :

$$H_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_z \cos \theta) - \frac{A_z \sin \theta}{r} - \sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

dus:

$$H_\varphi \underset{r \rightarrow \infty}{=} -\frac{2j \omega \epsilon V_0 e^{jz}}{\pi k^2 d} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\sin\left(\frac{dk}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta \cdot \cos \theta H_0^{(2)}(ak \sin \theta)} \quad (\text{II.22})$$

waarbij dus alle termen met orde  $\frac{1}{r^2}$  en hoger zijn weggelaten. Uit (II.6) volgt dat  $E_r$  ook omgekeerd evenredig is met  $r^2$  en dus verdwijnt voor grote  $r$ .

Voor  $E_\theta$  wordt voor grote  $r$  gevonden  $E_\theta = \frac{-1}{j \omega \epsilon} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r}$ .

$$E_\theta(r, \theta) \underset{r \rightarrow \infty}{=} -\frac{2j V_0 e^{jz}}{\pi k d} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\sin\left(\frac{dk}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta \cdot \cos \theta H_0^{(2)}(ak \sin \theta)} \quad (\text{II.23})$$

Uit vergelijking (II.22) en (II.23) blijkt dat:

$$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\text{II.24})$$

en dit is inderdaad het verband tussen  $E_\theta$  en  $H_\varphi$  in de zogenaamde golfzone, waar we met een vlakke golf te doen hebben.

Daar nu  $E_\theta$  en  $H_\varphi$  bekend zijn, kan de Poynting vector  $\underline{S}$  worden berekend, die in dit geval een energietransport geeft in de radiale richting.

Voor de over de tijd gemiddelde energiestroom  $\underline{S}$  geldt:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} (\underline{E} \times \underline{H}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{E}_\theta \times \underline{H}_\varphi^*)$$

met (II.24) volgt:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_\theta \cdot E_\theta^*$$

met (II.23) wordt S nu:

$$S = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \left( \frac{V_0}{\pi k d} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left( \frac{\sin(\frac{dk}{2} \cos \theta)}{\sin \theta \cdot \cos \theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_0^2(ak \sin \theta) + N_0^2(ak \sin \theta)}$$

Per oppervlakte-eenheid van een bol met straal r wordt de energiestroom:

$$S \times r^2 \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

En hiermee wordt dus de totaal uitgestraalde vermogen:

$$P_{\text{str}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{4}{\pi k^2 d^2} \cdot V_0^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2(\frac{dk}{2} \cos \theta)}{\sin \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot \{ J_0^2(ak \sin \theta) + N_0^2(ak \sin \theta) \}} d\theta \quad (II.25)$$

Opmerkingen:

1) Gedrag der integrand als  $\theta = \pi/2$ . dan is  $\cos \theta = 0$ .

Ontwikkeling van de integrand in de buurt van  $\theta = \pi/2$ , met verwaarlozing der hogere orde-verschijnselen geeft:

$$\begin{aligned} \text{Integrand} &= \frac{\sin^2(\frac{dk}{2}(\frac{\pi}{2} - \theta))}{(\frac{\pi}{2} - \theta)^2 \{ J_0^2(ak) + N_0^2(ak) \}} = \frac{(\frac{dk}{2})^2 \cdot (\frac{\pi}{2} - \theta)^2}{(\frac{\pi}{2} - \theta)^2 \{ J_0^2(ak) + N_0^2(ak) \}} \\ &= \frac{(\frac{dk}{2})^2}{J_0^2(ak) + N_0^2(ak)} \end{aligned}$$

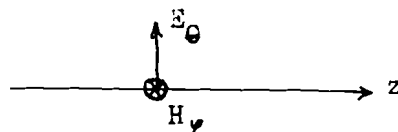
voor  $\theta = \pi/2$  blijft de integrand dus eindig.

2) In feite is er ook geïntegreerd over de doorsnede van de golfpijp in de integraal (II.25). Daar r echter naar  $\infty$  nadert, naderen de grenzen der integraal naar 0 en  $\pi$ . Voor  $\theta = 0$  of  $\pi$  wordt de integrand oneindig (zie II.26). Er heeft dus een groot vermogens-transportplaats langs de wand van de golfpijp. Dit is echter wel mogelijk daar:

a) de veldcomponenten die het vermogenstransport veroorzaken:

$H_\varphi$  en  $E_\theta$ , kunnen bestaan op de golfpijpwand.

Voor  $r = \infty$  staat  $E_\theta \perp$  op de golfpijpwand en  $H_\varphi$  loopt // aan de golfpijpwand.



- b) de integraal blijkt voor kleine waarden van  $\theta$  analytisch op te lossen (zoals op de volgende blz. is aangegeven) en geeft een eindelijk vermogenstransport voor  $\theta$  tussen 0 en bijv.  $1^\circ$ .
- 3) De integrand is symmetrisch (zoals te verwachten was) om  $\theta = \pi/2$ .  
Dus geldt: 
$$\int_0^\pi = 2 \int_0^{\pi/2}$$
- 4) De berekening der integraal zal dus bestaan uit twee gedeelten:  
a) numerieke benadering tussen  $\theta = 90^\circ$  en  $\theta = 1^\circ$   
b) analytische oplossing tussen  $\theta = 0$  en  $\theta = 1^\circ$
- 5) De integrand levert als functie van  $\theta$  tevens het stralingsdiagram van de gleuf.

#### Berekening van de integraal.

Als straal der golfpijp is genomen:  $a = 14$  mm.

De frequentie is 9250 MHz.

#### 1) Analytische berekening:

Voor kleine waarden van  $\theta$  geldt:  $\sin \theta = \theta$

$$\cos \theta = 1$$

$$J_0(ak \sin \theta) = 1$$

$$N_0(ak \sin \theta) = N_0(ak \theta)$$

Litt.8 voor  $x \ll 1$  geldt:

$$N_0(x) = \frac{-2}{\pi} \ln \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{met } \ln \sqrt{x} = 0,5772.$$

(II.26)

Dan wordt de integraal:

$$W = 8,906 \cdot 10^{-8} \frac{v_0^2}{d^2} \int_0^{\theta_1} \frac{\sin^2 \left( \frac{dk}{2} \right)}{\theta \left\{ 1 + N_0^2(ak \theta) \right\}} d\theta$$

$$= \sin^2 \left( \frac{dk}{2} \right) \int_0^{\theta_1} \frac{d ak \theta}{ak \theta \left\{ 1 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2 \left( \frac{2}{\sqrt{ak \theta}} \right) \right\}}$$



ak  $\theta$  uit de noemer brengen we achter de differentiaal, dit wordt dan d.ln ak  $\theta$ .

Na vermenigvuldiging met - wordt de differentiaal  $d \ln \frac{1}{ak\theta}$

Dus:

$$P = - \int_0^{\theta_1} \frac{d \ln \frac{1}{ak\theta}}{1 + \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{ak\theta}\right)^2}$$

$$= - 8,906 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{v_0^2}{d^2} \cdot \sin^2 \left( \frac{dk}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{2} \left[ \arctan \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{ak\theta} \right]_0^{\theta_1}$$

Als we  $\theta_1 = 1^\circ$  kiezen, dan is de nauwkeurigheid van (II.26) 0,2 % dit is een afwijking van 0,1 % om de gemiddelde waarde.

Nu wordt W berekend:

$$P_{0^\circ - 1^\circ} = 37,50 \cdot 10^{-8} \cdot \sin^2 \left( \frac{dk}{2} \right) \cdot \frac{v_0^2}{d^2} \pm 0,1 \% \quad (\text{II.27})$$

Voor diverse waarden van d is deze functie uitgezet in Tabel I.

#### Numerieke berekening:

Deze wordt toegepast tussen  $1^\circ$  en  $90^\circ$ .

Als interval k is  $1^\circ$  gekozen.

De benaderingsformule:

$$P_{1^\circ - 90^\circ} = \int_{1^\circ}^{90^\circ} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2} k (f_1 + f_{90}) + k(f_2 + f_3 + \dots + f_{89})$$

Berekening van de integrand, voor iedere waarde van  $\theta$ , in vier cijfers nauwkeurig, levert een uitkomst die ook ongeveer in 4 cijfers nauwkeurig is, daar de integrand als functie van  $\theta$  in dit gebied slechts langzaam varieert.

Voor diverse waarden van d is deze som  $P_{1^\circ - 90^\circ}$  uitgezet in Tabel I.

Uit het bovenstaande volgt, dat de fout in de berekende  $P_{\text{totaal}}$  kleiner is dan 0,1 %.

Daar voor deze numerieke berekening de integrand voor diverse waarden van  $\theta$  berekend is, is tevens het stralingsdiagram bekend. Zie hiervoor Tabel II.

Tabel I.  $P = Y \cdot V_0^2$

d mm.	Y $0^\circ-1^\circ$ in A/V	Y $1^\circ-90^\circ$ in A/V	Y <sub>tot</sub> $0^\circ-180^\circ$ A/V	$\Delta Y_{tot}$ in %
0,1	0,003501	0,006149	$1,9300 \cdot 10^{-2}$	+ 0,5 %
0,5	0,003501	0,006143	$1,9288 \cdot 10^{-2}$	+ 0,5 %
1	0,003501	0,006138	$1,9278 \cdot 10^{-2}$	+ 0,5 %
1,5	0,003495	0,006110	$1,9210 \cdot 10^{-2}$	+ 0,3 %
2	0,003480	0,006108	$1,9176 \cdot 10^{-2}$	0 %
2,5	0,003453	0,006084	$1,9074 \cdot 10^{-2}$	- 0,5 %
3	0,003425	0,006056	$1,8962 \cdot 10^{-2}$	-1 %
4	0,003350	0,005978	$1,8656 \cdot 10^{-2}$	-3 %

Opmerkingen:

- 1) Vergelijking van kolom 1 met kolom 2 laat zien dat ruim 1/3 van het totale vermogen uitgestraald wordt in het gebied waarvoor geldt: (Er is dus een groot end-fire effect).

$$0^\circ < \theta < 1^\circ$$

$$\text{en } 189^\circ < \theta < 190^\circ.$$

- 2) Uit de laatste kolommen blijkt, dat  $Y = 1,9173 \cdot 10^{-2}$  een redelijke benadering is voor bijna alle gleufbreedtes. Het uitgestraalde vermogen is dus praktisch onafhankelijk van de gleufbreedte.

- 3) In de tabellen is Y uitgezet, waarvoor geldt:

$$P_{str} = Y \cdot V_0^2 \quad [AV]$$

de dimensie van  $V_0$  is Volt. (II.29)

Voor enkele waarden van d en  $\theta$  volgt hieronder het stralingsdiagram.

$$X = 3(\theta) r^2 \cdot \sin \theta = \text{functie van } \theta.$$

TABEL II.

$$X = S(\theta) \cdot r^2 \cdot \sin \theta.$$

$\theta^\circ$	X als d=0,1 mm	X als d=1 mm	X als d=2 mm	X als d=4 mm
0				
1	0,00151 · $V_0^2$	0,001502 · $V_0^2$	0,00149 · $V_0^2$	0,001435 · $V_0^2$
5	0,000800 · $V_0^2$	0,000796 · $V_0^2$	0,000790 · $V_0^2$	
10	0,000678 · $V_0^2$	0,000650 · $V_0^2$	0,000670 · $V_0^2$	0,000645 · $V_0^2$
20	0,000615 · $V_0^2$	0,000612 · $V_0^2$	0,000607 · $V_0^2$	0,000587 · $V_0^2$
30	0,000595 · $V_0^2$	0,000593 · $V_0^2$	0,000590 · $V_0^2$	0,000572 · $V_0^2$
40	0,000586 · $V_0^2$	0,000585 · $V_0^2$	0,000581 · $V_0^2$	0,000569 · $V_0^2$
50	0,000581 · $V_0^2$	0,000580 · $V_0^2$	0,000579 · $V_0^2$	0,000569 · $V_0^2$
60	0,000579 · $V_0^2$	0,000578 · $V_0^2$	0,000576 · $V_0^2$	0,000571 · $V_0^2$
70	0,000577 · $V_0^2$	0,000577 · $V_0^2$	0,000576 · $V_0^2$	0,000574 · $V_0^2$
80	0,000577 · $V_0^2$	0,000576 · $V_0^2$	0,000576 · $V_0^2$	0,000575 · $V_0^2$
90	0,000577 · $V_0^2$	0,000576 · $V_0^2$	0,000576 · $V_0^2$	0,000576 · $V_0^2$

Het verband tussen X en P-straling is dus:

$$P_{\text{str}} = 2\pi \int_0^\pi X \, d\theta$$

Het stralingsdiagram is uitgezet in grafiek I.

Opmerkingen:

- 1) Het stralingsdiagram blijkt onafhankelijk te zijn van de gleufbreedte. Uit de tabel blijkt, dat slechts zeer kleine verschillen optreden voor de straling bij de diverse gleufbreedtes.
- 2) Uit de tabel blijkt ook, dat de straling tussen  $30^\circ$  en  $150^\circ$  praktisch even groot is.

P.S.:

$\mathcal{J}_n$  en  $\beta_n$  worden van nu af aan anders gedefiniëerd dan in het voorgaande gedeelte.

PARAGRAAF 2.

TM<sub>on</sub> modes van de gesloten ronde-golfpijp.

Bij de bepaling van het transmissielijnmodel in Par. 3 wordt van de TM<sub>on</sub> modes gebruik gemaakt.

Deze modes worden nu afgeleid en tevens genormeerd, daar deze normering van pas komt bij energie-vergelijkingen.

Als oplossing van vergelijking (II.2) voor de magnetische vector potentiaal vinden we voor de n<sup>de</sup> mode:

$$A_z = B \cdot J_0(k_n \rho) \cdot e^{-\gamma_n z}$$

De randvoorwaarde is nu: E<sub>z</sub> = 0 als ρ = a.

Dus met: (II.7) en  $k_n^2 = k^2 + \gamma_n^2$

$$\frac{B}{j\omega\epsilon} \cdot k_n^2 \cdot J_0(k_n a) e^{-\gamma_n z} = 0.$$

Om aan deze voorwaarde te voldoen moet  $k_n a$  dus een wortel zijn van de vergelijking  $J_0(k_n a) = 0$ .

Stel de wortels van de vergelijking:  $J_0(z) = 0$ , zijn  $d_1, d_2, d_3$  enz. dan moet dus gelden:

$$k_n a = d_n \quad k_n = \frac{d_n}{a} \quad (II.31)$$

Er zijn dus alleen oplossingen als n geheel is.

Uit vergelijking (II.7) en bovenstaande algemene oplossing voor A<sub>z</sub> vinden we nu voor de veldcomponenten:

$$H_{n\rho} = B \cdot \frac{d_n}{a} \cdot J_1\left(\frac{d_n \rho}{a}\right) \cdot e^{-\gamma_n z} = h'_n(\rho) \cdot I_n(z) = \frac{h_n(\rho)}{a} \cdot e^{-\gamma_n z}$$

$$E_{n\rho} = B \cdot \frac{j\gamma_n}{\omega\epsilon} \cdot \frac{d_n}{a} \cdot J_1\left(\frac{d_n \rho}{a}\right) \cdot e^{-\gamma_n z} = \frac{e_n(\rho)}{a} \cdot \nabla_n(z) = \frac{e_n(\rho)}{a} \cdot e^{-\gamma_n z}$$

$$E_{nz} = \frac{B}{j\omega\epsilon} \cdot \left(\frac{d_n}{a}\right)^2 \cdot J_0\left(\frac{d_n \rho}{a}\right) \cdot e^{-\gamma_n z} \quad (II.32)$$

In deze vergelijking is B een constante die we nu zodanig kiezen,

dat

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{h'_n(\rho)}{a} \cdot e^{-\gamma_n z} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi = 1 \text{ als } n = m$$

$$= 0 \text{ als } n \neq m \quad (II.33)$$

Uit (II.32) volgt verder:

De karakteristieke impedantie van de  $n^{\text{de}}$  mode:

$$Z_n = \frac{E_\varphi}{H_\varphi} = \frac{-j\mathcal{I}_n}{\omega \epsilon} = \frac{\sqrt{k^2 - \left(\frac{d_n}{a}\right)^2}}{\omega \epsilon} \quad (\text{II.34})$$

Verder is:

$$\underline{h}'_n = \frac{\underline{h}'_n}{-n} = B \cdot \frac{d_n}{a} J_1\left(\frac{d_n \rho}{a}\right)$$

en dus ook:  $I_n(z) = e^{-\mathcal{I}_n z}$

$$V_n(z) = Z_n e^{-\mathcal{I}_n z} = Z_n I_n(z) \quad (\text{II.35})$$

Verder is direkt duidelijk dat:  $\underline{h}'_n = \underline{a}_z \times \underline{a}_n$  (II.36)

Aan voorwaarde (II.33) moet nu worden voldaan:

dus:

$$2\pi B^2 \left(\frac{d_n}{a}\right)^2 \int_0^a J_1^2(d_n \rho / a) \cdot \rho d\rho \stackrel{!}{=} 1. \quad (\text{II.37})$$

In Litt. 3 (deel III.2 blz. 457) is afgeleid dat geldt:

$$\int_0^a J_0^2(d_n \rho / a) \cdot \rho d\rho = \frac{a^2}{2} J_1^2(d_n) \quad (\text{II.38})$$

De gezochte integraal (II.37) moet nu dus worden teruggebracht tot de bovenstaande bekende integraal.

(II.37) kan worden geschreven als :

$$\frac{1}{2\pi B^2 \left(\frac{d_n}{a}\right)^2} = \frac{a}{d_n} \int_0^a J_1(d_n \rho / a) \cdot \rho d\rho J_0(d_n \rho / a)$$

Partiele-

- integratie en uitwerken geeft (met (II.38) en (I.16)):

$$\frac{1}{2 B^2 \left(\frac{d_n}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{2} J_1^2(d_n)$$

$$\text{dus: } B = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot d_n J_1(d_n)}$$

Met deze waarde van B vinden we nu voor de mode-vectoren:

$$\mathbf{a}'_n = \mathbf{h}'_n = \frac{1}{a\sqrt{\kappa}} \frac{J_1(d_n \rho/a)}{J_1(d_n)} \quad (\text{II.39})$$

De vergelijking (II.38) kunnen we dus nu opnieuw opschrijven:

$$\mathbf{H}_{n\varphi}^+ = A_n \cdot \frac{1}{a\sqrt{\kappa}} \frac{J_1(d_n \rho/a)}{J_1(d_n)} e^{-\gamma_n z} = \mathbf{h}'_n \cdot e^{-\gamma_n z} = \mathbf{h}'_n \cdot \mathbf{I}_n^+(z)$$

$$\mathbf{E}_{n\varphi}^+ = A_n \cdot Z_n \cdot \frac{1}{a\sqrt{\kappa}} \frac{J_1(d_n \rho/a)}{J_1(d_n)} e^{-\gamma_n z} = \mathbf{e}'_n \cdot e^{-\gamma_n z} = \mathbf{e}'_n \cdot \mathbf{V}_n^+(z) \quad (\text{II.40})$$

Hierbij is  $A_n$  = een amplitudeconstante.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n^+(z) &= A_n e^{-\gamma_n z} \\ \mathbf{V}_n^+(z) &= A_n e^{-\gamma_n z} \cdot Z_n = Z_n \cdot \mathbf{I}_n^+(z) = \frac{-1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial \mathbf{I}_n^+(z)}{\partial z} \end{aligned}$$

We kunnen stellen dat bovenstaande modes in de positieve z-richting propageren; er vindt energietransport plaats in de +z-richting.

Dit is aangeduid door plustekens bij de veldcomponenten, de stralen en de spanningen.

Voor modes die in de negatieve z-richting propageren kan een zelfde stel vergelijkingen worden afgeleid. (vervanging van  $\gamma_n$  door  $-\gamma_n$ ).

$$\mathbf{H}_{n\varphi}^- = B_n \cdot \frac{1}{a\sqrt{\kappa}} \frac{J_1(d_n \rho/a)}{J_1(d_n)} e^{+\gamma_n z} = \mathbf{h}'_n e^{+\gamma_n z} = \mathbf{h}'_n \cdot \mathbf{I}_n^-(z)$$

$$\mathbf{E}_{n\varphi}^- = -B_n \cdot \frac{Z_n}{a\sqrt{\kappa}} \frac{J_1(d_n \rho/a)}{J_1(d_n)} e^{+\gamma_n z} = +\mathbf{e}'_n \cdot e^{+\gamma_n z} = \mathbf{e}'_n \cdot \mathbf{V}_n^-(z) \quad (\text{II.41})$$

en dus ook:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n^-(z) &= B_n \cdot e^{+\gamma_n z} \\ \mathbf{V}_n^-(z) &= -B_n \cdot Z_n \cdot e^{+\gamma_n z} = \frac{-1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial \mathbf{I}_n^-(z)}{\partial z} \end{aligned}$$

Opmerking:

De afmetingen van de golfpijp kiezen we zodanig dat slechts de  $TM_{0,1}$  mode kan propageren.

$$(II.31) \quad -j \gamma'_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{d_n}{a}\right)^2}$$

Er vindt alleen propagatie plaats als  $\gamma'_n$  is; dus als  $k > \frac{d_n}{a}$  of  $a > \frac{d_n}{k}$

Voor voortplanting van de  $TM_{0,1}$  mode moet dus gelden:

$$a > \frac{2,405}{k} = \frac{d_1}{k}$$

Opdat hogere modes zich niet kunnen voortplanten moet:

$$a < \frac{d_2}{k} = \frac{5,520}{k}$$

Dus:  $2,405 < a k < 5,520$  (II.42)

Voor  $f = 9250$  MHz, en  $a = 14$  mm is aan deze voorwaarde voldaan.

PAR. 3. De eigenschappen van een gleuf in de golfpijp.

3.1. We gaan uit van de ronde  $\infty$  lange golfpijp met de gleuf op plaats  $z = 0$ . Een in de pijp aanwezige E.M.-golf zal een veld in de gleuf opbouwen, en dit veld zal op zijn beurt in de pijp een aantal al of niet propagerende modes opwekken die zich voortplanten in de  $+z$  en  $-z$  -richting.

Voor de transversale componenten van het totale opgewekte veld in de golfpijp kan worden geschreven:

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}^+ &= \sum_n a_n \underline{E}_n^+ \\ \underline{H}^+ &= \sum_n a_n \underline{H}_n^+ \end{aligned} \right\} z > d/2 \quad (II.43)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}^- &= \sum_n b_n \underline{E}_n^- \\ \underline{H}^- &= \sum_n b_n \underline{H}_n^- \end{aligned} \right\} z < -\frac{d}{2}$$

$\underline{E}_n^+$ ,  $\underline{H}_n^+$  en  $\underline{E}_n^-$ ,  $\underline{H}_n^-$  zijn de transversale veldcomponenten der normaalmodes van de golfpijp die zich voortplanten in de +z, resp. -z-richting, en zijn gedefiniëerd in (II.40) resp. (II.41).

De coëfficiënten  $a_n$  en  $b_n$  zijn te berekenen met behulp van het theorema van Lorentz, dat voor een bronvrije ruimte luidt:

$$\nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = 0.$$

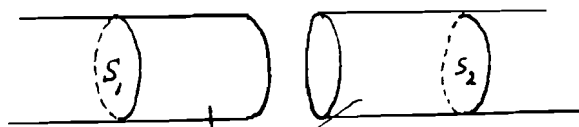
Dit is ook te schrijven als oppervlakte-integraal voor een gesloten oppervlak S:

$$\iint_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{n} \cdot ds = 0 \tag{II.44}$$

Hierin zijn  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{H}_1$ ;  $\underline{E}_2$ ,  $\underline{H}_2$  twee verschillende velden die voldoen aan de vergelijking van Maxwell voor deze bronvrije ruimte, en  $\underline{n}$  is de normaalvector op het oppervlak S naar buiten gericht.

Voor S kiezen we een oppervlak bestaande uit:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \text{gleuf.} \quad (\text{zie figuur})$$



$S_1$  en  $S_2$  bevinden zich op  $z < -\frac{d}{2}$  resp.  $z > +\frac{d}{2}$

Neem nu voor  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{H}_1$  het door de veldverdeling in de gleuf opgewekte veld in de golfpijp, dus:

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_1 &= \sum_n a_n \underline{e}_n e^{-\gamma_n z} \\ \underline{H}_1 &= \sum_n a_n \underline{h}_n e^{-\gamma_n z} \end{aligned} \right\} z > \frac{d}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_1 &= \sum_n -b_n \underline{e}_n e^{\gamma_n z} \\ \underline{H}_1 &= \sum_n b_n \underline{h}_n e^{\gamma_n z} \end{aligned} \right\} z < -\frac{d}{2}$$



en voor het andere veld wordt genomen: een in de  $+z$ -richting propagerende normaalmode met rangnummer  $n$ . dus:

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_n^+ = \underline{e}_n e^{-\gamma_n z}$$

$$\underline{H}_2 = \underline{H}_n^+ = \underline{h}_n e^{-\gamma_n z}$$

Substitutie van deze velden in integraalvergelijking (II.44) levert na oplossing:

$$2 b_n \iint_{S_1} \underline{e}_n \times \underline{h}_n \cdot \underline{a}_z \, da = \iint_{\text{gleuf}} \underline{E}_1 \times \underline{H}_n^+ \cdot \underline{n} \, da.$$

$$b_n = \frac{-1}{2 S_n} \iint_{\text{gleuf}} \underline{E}_1 \times \underline{H}_n^+ \cdot \underline{n} \, da.$$

$a_n$  wordt op dezelfde manier berekend; nu kiezen we echter voor  $\underline{E}_2 \cdot \underline{H}_2$  een in de negatieve  $z$ -richting propagerende normaalmode.

Dan volgt:

$$a_n = \frac{-1}{2 S_n} \iint_{\text{gleuf}} \underline{E}_1 \times \underline{H}_n^- \cdot \underline{n} \, da.$$

In deze twee vergelijkingen voor  $a_n$  en  $b_n$  is  $\underline{E}_1$  het elektrisch veld in de gleuf; dus evenals in (II.19) stellen we:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}(z) / \rho = a = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{d} \quad (\text{II.19})$$

$\underline{H}_n^+$  en  $\underline{H}_n^-$  zijn de magnetische velden in de gleuf. Hiervoor kan dus ook worden geschreven: met (II.40) en (II.41):

$$\begin{aligned} \underline{H}_n^+ &= \underline{H}_n^+ \rho = \underline{h}_n \cdot e^{-\gamma_n z} \\ \underline{H}_n^- &= \underline{H}_n^- \rho = \underline{h}_n \cdot e^{\gamma_n z} \end{aligned}$$

En met deze substituties worden  $a_n$  en  $b_n$  (II.45)

$$a_n = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{2 S_n \cdot d} \iint_{\text{gleuf}} \underline{h}_n \cdot e^{\gamma_n z} \, da$$

$$b_n = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{2 S_n \cdot d} \iint_{\text{gleuf}} \underline{h}_n \cdot e^{-\gamma_n z} \, da$$

De coëfficiënten  $a_n$  en  $b_n$  zijn nu bekend als functie van de diverse veld- en gleuf-parameters. Daar  $\underline{h}_n$  onafhankelijk is van  $z$ , en vanwege de symmetrie van het integratiegebied t.o.v.  $z = 0$ , is het duidelijk dat geldt:

$$a_n = b_n = \frac{V_0 e^{j\beta z}}{2S_n \cdot d} \int_{\text{gleuf}} \underline{h}_n \cdot e^{j\beta_n z} \, d\varphi \, dz$$

Worden de afmetingen der golfpijp zodanig gekozen dat slechts de  $TM_{01}$ -mode kan propageren, dan zijn slechts de coëfficiënten  $a_1$  en  $b_1$  van belang.

$\beta_1$  is dan imaginair. Stel  $\beta_1 = j\beta_1$ .

Nemen we als oorspronkelijke  $TM_{01}$ -mode, een mode met amplitude  $A_1$  die in de  $+z$  richting propageert, dan zijn de mode-vector  $\underline{h}_1$ , en de energieterm  $S_1$  hierdoor bepaald.

Vergelijk (II.40) geeft:

$$\underline{h}_1 = A_1 \cdot \frac{1}{a \sqrt{\pi'}} = \frac{I_1(d_n \beta/a)}{I_1(d_n)}$$

en

$$S_1 = \iint_{\text{doorsnede}} \underline{e}_1 \times \underline{h}_1 \cdot \underline{a}_z \, da = A_1^2 Z_1 \iint_{\text{doorsnede}} e_1' h_1' \cdot da = A_1^2 Z_1$$

doorsnede

doorsnede

Substitutie hiervan in bovenstaande vergelijking geeft na uitwerking:

$$a_n = b_n = 2 \sqrt{\pi'} \cdot \frac{V_0 e^{j\beta z}}{A_1} \cdot \frac{\sin \beta_1 d/2}{Z_1 \cdot \beta_1 d} \quad (\text{II.46})$$

Op volkomen analoge wijze vinden we voor een  $TM_{01}$  mode die met amplitude  $A_1'$  in de negatieve  $z$ -richting propageert:

$$A_1' = b_1' = 2 \sqrt{\pi'} \cdot \frac{V_0' e^{j\beta z}}{A_1'} \cdot \frac{\sin \beta_1 d/2}{Z_1 \beta_1 d} \quad (\text{II.47})$$

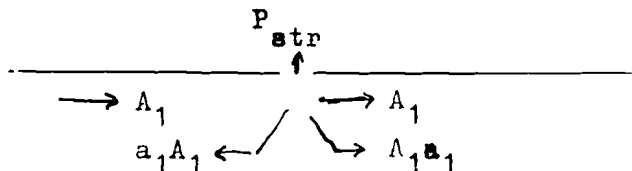
waarbij  $a_1'$  en  $b_1'$  betrekking hebben op secundaire golven die propageren in resp. de  $-z$  en  $+z$ -richting.

### 3.2 Verband tussen $V_0$ en $A_1$

Er moet voor deze structuur nog een verband bestaan tussen  $V_0 e^{j\beta z}$  en  $A_1$ . (We kiezen  $A_1$  reëel ter vereenvoudiging).

De vermogensvergelijking voor oppervlak  $S = S_1 + S_2 + S_3 +$  gleuf kan nu worden opgesteld (zie figuur op blz. II.17).

De amplitudes der modes die links en rechts van de gleuf optreden zijn aangegeven in nevenstaande figuur. Met behulp van:



$$P = 1/2 \operatorname{Re} \int_{\text{doorsnede}} \underline{E}_p \times \underline{H}_p^* \cdot \underline{n} \cdot da \quad (\text{II.48})$$

wordt voor de vermogensvergelijking gevonden;

$$1/2 Z_1 A_1^2 = 1/2 Z_1 A_1^2 \cdot a_1 a_1^* + 1/2 Z_1 A_1^2 \cdot \operatorname{Re} (1+a_1)(1+a_1^*) + P_{str}.$$

In par. II.1 is gegeven dat  $P_{str} = Y \cdot V_0^2$  en verder is  $a_1$  bekend als functie van  $A_1$  en  $V_0 e^{j\omega t}$  volgens formule (II.46). Substitutie hiervan in bovenstaande vermogensvergelijking geeft;

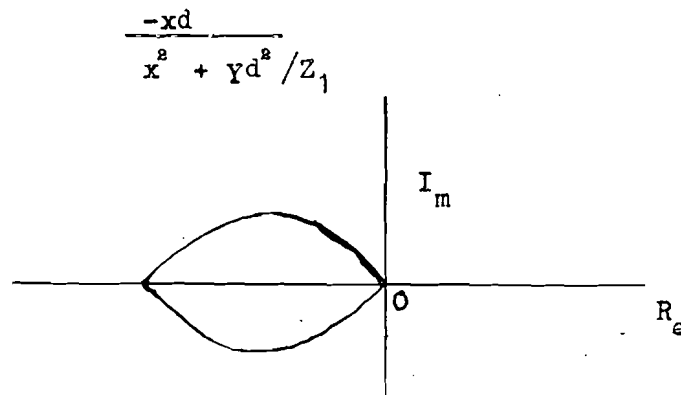
$$\frac{V_0 e^{j\omega t}}{A_1} = \frac{-x \cdot d \cdot \cos \beta_1 \cdot e^{j\omega t}}{(x^2 + Yd^2 / Z_1)} \quad (\text{II.49})$$

met

$$x = \frac{2 \sqrt{\pi}}{Z_1 \beta_1} \cdot \sin \beta_1 \cdot d/2 \quad (\text{II.50})$$

Deze algemene oplossing kan worden afgebeeld in het complexe vlak en geeft dan de meetkundige plaats aan van alle waarden van  $V_0 e^{j\omega t} / A_1$  die aan de vermogensvergelijking voldoen.

Deze meetkundige plaats bestaat uit een ten opzichte van de reële negatieve as gespiegelde sinusperiode tussen de reële uitersten 0 en



De oplossing van de vermogens vergelijking levert dus niet helemaal de samenhang tussen  $V_0 e^{j\zeta}$  en  $A_1$ . Op de manier zoals het probleem hier is behandeld, is het ook niet mogelijk een nader verband tussen  $V_0 e^{j\zeta}$  en  $A_1$  te vinden; daarvoor moet nl. het veld in de nabije omgeving van de gleuf worden onderzocht met methoden die oplossingen geven voor de integraalvergelijking zoals die gegeven is in (II.18<sup>1</sup>).

Voor de nog onbekende waarde van  $\zeta$  kiezen we  $\zeta = 0$ , dan wordt

$$\frac{V_0 e^{j\zeta}}{A_1} = \text{reëel} \quad \text{en dan is} \quad \text{in de gleuf het elektrisch veld } \mathcal{E}_z \text{ in} \quad \text{(II.51)}$$

fase met het magnetisch veld  $H_\rho$ . In feite is dit een willekeurige keuze uit de mogelijkheden die het polaire diagram hiervoor biedt. De keuze is echter op grond van de kennis die bestaat ten aanzien van het nabije veld van de gleuf wel annemelijk. Stevenson heeft nl. op nauwkeurige wijze bepaald dat voor resonante transversale gleuven in de brede wand der golfpijp het elektrisch en magnetisch veld ook in fase zijn.

Door de gekozen voorwaarde dat  $\zeta = 0$  is, en  $\frac{V_0 e^{j\zeta}}{A_1} = \text{reëel}$ , worden diverse betrekkingen aanzienlijk vereenvoudigd.<sup>A1</sup>

Dan gelden voor  $V_0/A_1$  en  $a_1$ , de vereenvoudigde betrekkingen:

$$\frac{V_0}{A_1} = \frac{-xd}{x^2 + d^2 Y / Z_1} \quad \text{(II.52)}$$

en

$$a_1 = b_1 = \frac{-x^2}{x^2 + d^2 Y / Z_1} = \frac{-1}{1 + \frac{d^2}{x^2} \frac{Y}{Z_1}}$$

Daar  $x$  voor kleine gleufbreedtes evenredig is met  $d$ , zijn de coëfficiënten  $a_1$  en  $b_1$  praktisch onafhankelijk van de gleufbreedte  $d$ .

Precies dezelfde vergelijkingen kunnen worden opgesteld indien uitgegaan wordt van een mode die met amplitude  $A_1'$  propageert in de  $-z$ -richting.

Het door de gleuf uitgestraalde vermogen is ook uit te drukken in  $A_1$ . De formules (II.25) en (II.51) geven na substitutie:

$$P_{\text{str}} = \frac{A_1^2 Y}{\left( \frac{x}{d} + \frac{d}{x} \frac{Y}{Z_1} \right)^2} \quad \text{(II.53)}$$

Met de gegevens die in deze paragraaf gevonden zijn:  
kan nu worden overgegaan tot het bepalen van het transmissielijnmodel.

PAR. 4. Transmissielijnmodel.

Zoals bekend, kunnen de van  $z$ -afhankelijke eigenschappen van de transversale mode-componenten worden beschreven met behulp van een transmissielijnmodel. Dit model is slechts geldig voor één bepaalde mode. Voor dit geval is dit de  $TM_{01}$  mode.

De transversale componenten van een in de positieve  $z$ -richting propagerende mode kunnen geschreven worden als: (zie II.40).

$$\begin{aligned} \underline{E}_t = \underline{E}_1 e^{-j \beta_1 z} &= \underline{e}_1 \cdot e^{-j \beta_1 z} = Z_1 \cdot \underline{e}_1' \cdot e^{-j \beta_1 z} \\ \underline{H}_t = \underline{H}_1 e^{-j \beta_1 z} &= \underline{h}_1' \cdot e^{-j \beta_1 z} \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

met:

$$Z_1 = \frac{\beta_1}{\omega \epsilon} \quad (\text{II.55})$$

Treden ergens om een of andere reden, reflecties op, dan kunnen we deze schrijven als: (zie II.41).

$$\begin{aligned} \underline{E}_t &= -R_1 \cdot Z_1 \cdot \underline{e}_1' \cdot e^{j \beta_1 z} \\ \underline{H}_t &= R_1 \cdot \underline{h}_1' \cdot e^{j \beta_1 z} \end{aligned}$$

waarbij deze mode propageert in de negatieve  $z$ -richting.

Het totale veld is nu:

$$\begin{aligned} \underline{E}_t &= Z_1 \underline{e}_1' (e^{-j \beta_1 z} - R_1 e^{j \beta_1 z}) = \underline{e}_1' \cdot V(z) \\ \underline{H}_t &= \underline{h}_1' (e^{-j \beta_1 z} + R_1 e^{j \beta_1 z}) = \underline{h}_1' \cdot I(z) \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

waarvoor dus geldt:

$$\begin{aligned} V(z) &= Z_1 (e^{-j \beta_1 z} - R_1 e^{j \beta_1 z}) \\ I(z) &= (e^{-j \beta_1 z} + R_1 e^{j \beta_1 z}) \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

en deze vergelijkingen zijn juist de stroom- en spanningsvergelijkingen voor een transmissielijn, waarvan  $Z_1$  de karakteristieke impedantie is.

We moeten nu proberen de gleuf te vervangen door een netwerk in deze transmissielijn.

Zoals in de vorige paragraaf wordt de golfpijp ook nu weer gevoed door een  $TM_{0,1}$  mode met amplitude  $A_1$ , en door het veld in de gleuf worden  $TM_{0,1}$  modes met amplituden  $a_1 A_1$  opgebouwd die propageren in de  $+z$  en  $-z$  richting.

We veronderstellen dat de gleuf zo smal is, dat aangenomen kan worden dat de gleuf zich bevindt op punt  $z = 0$ .

Van de opgewekte mode kunnen de veldcomponenten nu worden opgeschreven voor de gebieden  $z > 0$  en  $z < 0$ :

$$\begin{aligned} z \ll 0 \quad \underline{E}_t &= A_1 (e^{-j\beta_1 z} - a_1 e^{j\beta_1 z}) \cdot \underline{e}_1' \cdot Z_1 \\ \underline{H}_t &= A_1 (e^{-j\beta_1 z} + a_1 e^{-j\beta_1 z}) \cdot \underline{h}_1' \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

en voor:

$$\begin{aligned} z \gg 0 \quad \underline{E}_t &= A_1 (1+a_1) e^{-j\beta_1 z} \cdot \underline{e}_1' \cdot Z_1 \\ \underline{H}_t &= A_1 (1+a_1) e^{-j\beta_1 z} \cdot \underline{h}_1' \end{aligned}$$

Voor de mode-spanningen en stromen van het transmissielijnmodel moet nu dus gelden:

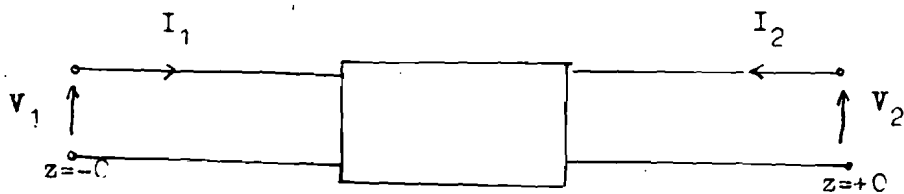
$$\begin{aligned} z \ll 0 \quad V &= A_1 (e^{-j\beta_1 z} - a_1 e^{j\beta_1 z}) \cdot Z_1 \\ I &= A_1 (e^{-j\beta_1 z} + a_1 e^{j\beta_1 z}) \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

$$\begin{aligned} z \gg 0 \quad V &= A_1 (1+a_1) e^{-j\beta_1 z} \cdot Z_1 \\ I &= A_1 (1+a_1) e^{-j\beta_1 z} \end{aligned}$$

Indien in de golfpijp als voedende mode, een in de negatieve  $z$ -richting propagerende mode met amplitude  $A_1'$  optreedt, dan hebben de door het veld in de gleuf opgewekte sekundaire modes amplitudes  $a_1' A_1'$ , terwijl ze propageren in de  $+z$  en  $-z$  richting. De mode-spanningen en -stromen voor het totale veld in de pijp zijn dan: (zie II.41).

$$\begin{aligned}
 & V = -A_1' (1 + a_1') \cdot e^{j\beta_1 z} \cdot Z_1 \\
 z < 0 \\
 & I = A_1' (1 + a_1') e^{j\beta_1 z} \\
 & V = -A_1' (e^{j\beta_1 z} - a_1' e^{-j\beta_1 z}) \cdot Z_1 \\
 z > 0 \\
 & I = A_1' (e^{j\beta_1 z} + a_1' e^{-j\beta_1 z})
 \end{aligned} \tag{II.60}$$

De spanningen en stromen zijn nu dus aan beide zijden van de gleuf bekend. We beschouwen de gleuf als een vierpool tus en de punten  $z = -0$  en  $z = +0$ ; met als in- en uitgangspanningen- en stromen, de som van de desbetreffende componenten uit de vergelijkingen (II.59) en (II.60).



De stromen en spanningen aan de in- en uitgang van de vierpool werden nu voor  $z = 0$ :

$$V_1 = Z_1 A_1 (1 - a_1) - Z_1 A_1' (1 + a_1')$$

$$V_2 = Z_1 A_1 (1 + a_1) - Z_1 A_1' (1 - a_1')$$

(II.61)

$$I_1 = A_1 (1 + a_1) + A_1' (1 + a_1')$$

$$I_2 = -A_1 (1 + a_1) - A_1' (1 + a_1')$$

Deze vergelijkingen kunnen ook met behulp van matrices worden geschreven:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [U] \\ [S] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ -A_1' \end{bmatrix} \cdot Z_1$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [U] \\ -[S] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ -A_1' \end{bmatrix}$$

(II.62)

Waarbij:  $\{U\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$        $\{S\} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1+a_1' \\ 1+a_1 & -a_1' \end{pmatrix}$

De matrix  $\{S\}$  geeft het verband tussen invallende en gereflecteerde golven.

De elementen van  $\{S\}$  zijn de reflectie en transmissie coëfficiënten.

De matrix  $\{S\}$  noemt men ook wel de verstrooiingsmatrix. Het gedrag van de spanningen en stromen aan in- en uitgang van de vierpool zijn nu bekend. Nu moeten de elementen van de vierpool worden berekend.

In het algemeen kan voor een vierpool de admittantie-matrix worden opgeschreven.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = (Y) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_1} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.63})$$

Uit (II.62) volgt:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (U) - (S) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (U) + (S) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \frac{1}{Z_1} \quad (\text{II.64})$$

De admittanties volgen nu uit vergelijking van de twee bovenstaande vergelijkingen. Uitwerking hiervan geeft:

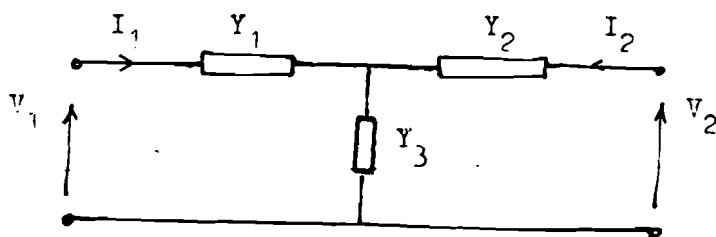
$$Y_{11} = Y_{22} = \frac{2 + 2a_1}{-4a_1} = \frac{1 + a}{-2a} \quad (\text{II.65})$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{2 + 2a_1}{4a_1} = \frac{1 + a}{2a} \quad (\text{II.66})$$

Hierbij is  $a_1 = a_1'$  gesteld, hetgeen volgt uit (II. 4) en (II.33).

Het netwerk dat aan(II.65)voldoet kan nu worden opgesteld.

Een T schakeling





Voor deze vierpool geldt:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 = \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_1 - \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_2$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 = \frac{-Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_1 + \frac{Y_2(Y_1 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_2$$

Uit (II.67) kan  $Y_1, Y_2$  en  $Y_3$  berekend worden.

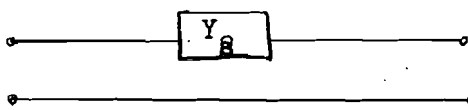
Dan wordt hiervoor gevonden:

$$Y_1 = Y_2 = \frac{a_1 + 1}{-a_1}$$

$$Y_3 = 0$$

Deze admittanties zijn gereduceerd t.o.v.  $Z_1$ .

De vierpool wordt nu dus:



$$\text{met } Y_s = \frac{a_1 + 1}{-2a_1} = \frac{Y_1}{2} \quad (\text{II.67})$$

Het transmissielijnmodel ter vervanging van de golfpijp met gleuf is nu compleet.

Enige numerieke waarden der afgeleide uitdrukkingen kunnen worden berekend indien we kiezen:

gleufbreedte =  $d = 1$  mm.

straal der golfpijp  $a = 14$  mm.

frequentie  $f = 9250$  Mhz.

dan geldt:

$$Y_s = 0,531$$

$$Z_1 = 174,6 \Omega$$

$$\beta_1 = -j\beta$$

$$\beta_1 = 89,85 \text{ m}^{-1}$$

$$a_1 = -0,485$$

$$P_{\text{inp}} = 87,3 \text{ A}^2$$

$$P_{\text{str}} = 43,6 \text{ A}^2$$

$$P_{\text{transm.}} = 0,265 W_{\text{inp}}$$

$$P_{\text{refl}} = 0,235 P_{\text{inp}}$$

$$P_{\text{str}} = 1/2 P_{\text{inp}}$$

(II.68)

Deze eigenschappen zijn praktisch onafhankelijk van de gleufbreedte  $d$ .

Voor  $d < 4$  mm zijn bovenstaande waarden binnen enkele procenten nauwkeurig.

Uit de twee laatste cijfers blijkt, dat de uitgestraalde energie de helft bedraagt van de energie der primaire mode,  $1/4$  deel wordt gereflecteerd en  $1/4$  deel wordt getransmitteerd.

Voor een gleuf is het dus niet mogelijk het uitgestraalde vermogen te regelen door gleufparameters te veranderen.

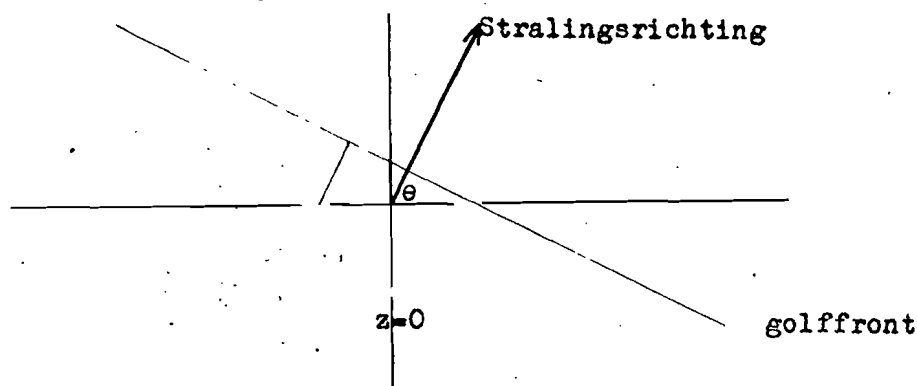
## Par.5

## Stralingsdiagram van twee in tegenfase stralende gleuven.

Veronderstel een oneindig lange golfpijp waarin zich twee gleuven bevinden op afstand  $l$ . De gleuven bevinden zich symmetrisch ten opzichte van het voedingspunt, van waaruit  $TM_{01}$  modes worden geëxciteerd in de  $+z$  en  $-z$  richting; waarbij verondersteld wordt dat beide modi in fase zijn op plaats  $z=0$  (het voedingspunt). In de twee gleuven ontstaan dan elektrische velden die een tegengestelde fase bezitten, wat tot gevolg heeft dat in het transversale vlak de straling nul wordt.

Bij de beschouwing is de golfpijp oneindig lang gedacht, of afgesloten beschouwd met de golfimpedantie. Ook aan de beide ingangszijden is de afsluiting ideaal gedacht, zodat getransmitteerde en gereflecteerde golven verwaarloosd kunnen worden.

Voor de berekening van het stralingsdiagram kan onderstaande figuur ter oriëntering gebruikt worden.



Het golffront bevindt zich op oneindig grote afstand van de oorsprong. Het faseverschil, voor de van beide gleuven afkomstige elektrische velden, bedraagt op het golffront;  $k.l.\cos\theta + \pi$ .

Met behulp van  $E_0(\theta)$  die gegeven is in (II.23), kan nu het stralingsdiagram worden berekend. Het stralingsdiagram is gegeven in Grafiek 2 en in onderstaande Tabel, voor diverse waarden van  $l$ , ( $l = \lambda/2, 3\lambda/4, \lambda$ ) indien het ingangsvermogen voor beide modi 1 Watt bedraagt.

Naar aanleiding van de gegeven diagrammen kunnen de volgende opmerkingen gemaakt worden.

- 1) Zoals reeds is aangegeven wordt door de speciale keuze der symmetrische voeding bereikt dat in het transversale vlak geen straling optreedt, daar de velden voor  $\theta = 90$  in tegenfase zijn, en elkaar opheffen. Indien voor de afstanden der gleuven tot de oorsprong resp.  $l/2$ , en  $l/2 + \lambda/2$  gekozen wordt, dan zijn de gleufvelden in fase en treedt versterking op in het transversale vlak.

Tabel voor de stralingsdiagrammen.

hoek $\theta$	$S(\theta) \cdot r^2 \cdot \sin \theta$ (in $10^{-3}$ Watt)		
	$l = \lambda/2$	$l = 3\lambda/4$	$l = \lambda$
0			0
1	146	77	
5	89,5	41	
10	70,5	37,5	0,1
20	62,5	40,5	3,3
30	57	48,5	9,8
40	51	57	26,9
50	43,5	62	49
60	29	57	60,2
70	16	31	46,7
80			16
90	0	0	0

2 )  $l = \lambda/2$ . De elektrische velden zijn voor de axiale richtingen ( $\theta = 0$  of  $180$ ) in fase, en het stralingsdiagram zal versterkt worden in de axiale richtingen.

3 )  $l = \lambda$ . De velden zijn in de axiale richtingen in tegenfase, en zullen elkaar opheffen. Er ontstaan cirkelsymmetrische stralingslobben met de hoofdrichting voor  $\theta = 60$ , daar voor deze richting de velden afkomstig van de beide gleuven in fase zijn.

4 ) Het stralingsdiagram voor  $l = 3\lambda/4$  laat duidelijk het overgangsstadium zien wat ontstaat door  $\lambda/2 < l < \lambda$  te kiezen. De hoofdstralingsrichting treedt op voor  $\theta = 48$ .

5 ) Het uitgestraalde vermogen wordt bepaald door integratie van de in het stralingsdiagram uitgezette waarde  $S(\theta) \cdot r^2 \cdot \sin \theta$ .

naar  $\theta$  ;

$$P_{\text{str}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} S(\theta) \cdot r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

Uit de stralingsdiagrammen blijkt duidelijk dat het uitgestraalde vermogen afhankelijk is van de gleufafstand  $l$ .  $P_{\text{str}}$  is n.l. niet gelijk aan de som van het door de beide gleuven afzonderlijk uitgestraalde vermogen.  $P_{\text{str}}$  kan voor de diverse gleufafstanden analytisch worden berekend, indien het stralingsdiagram van een gleuf wordt vereenvoudigd tot de bolvorm. Dan is;

$S(\theta) \cdot r^2 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \cdot E_0 \cdot r^2 \cdot \sin \theta = \text{Constant}$  en onafhankelijk van  $\theta$ . Stel het van de gleuven afkomstige elektrische veld  $E_0$  (in de golfzone) gelijk aan resp.  $E_1$  en  $E_2$ . De absolute waarden van  $E_1$  en  $E_2$  zijn gelijk, doch er treedt een faseverschil op volgens;

$$E_2 = E_1 \cdot e^{j\gamma} \quad \text{met } \gamma = kl \cos \theta + \pi.$$

Voor het totale uitgestraalde vermogen geldt dan;

$$P_{\text{str}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon'}}{\mu} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E_1^2 (1 + e^{j\gamma})(1 + e^{-j\gamma}) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi r^2 \frac{\sqrt{\epsilon'}}{\mu} E_1^2 \sin \theta \left( \pi + \int_0^\pi \cos \theta \, d\theta \right)$$

Uitwerking der laatste integraal is mogelijk met behulp van;

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos u) \, du$$

Dan wordt hiermee voor  $P_{\text{str}}$  gevonden;

$$P_{\text{str}} = 2\pi^2 r^2 E_1^2 \frac{\sqrt{\epsilon'}}{\mu} \sin \theta \left\{ 1 - J_0(2\pi l/\lambda) \right\}$$

De eerste term in deze uitdrukking is twee maal zo groot als het vermogen dat door één afzonderlijke gleuf wordt uitgestraald. De gevonden uitdrukking geeft ook een juist beeld indien  $l=0$  wordt.  $P_{\text{str}}$  is dan ook nul daar de twee in tegenfase verkerende gleufvelden elkaar opheffen. Deze benaderde oplossing voor  $P_{\text{str}}$  geeft voor de berekende stralingsdiagrammen de grootte orde der afwijkingen inde uitgestraalde energieën op redelijke wijze weer.

#### Par. 6. Structuren met meerdere gleuven.

In het transmissielijn-model kunnen meerdere gleuven eenvoudig worden ondergebracht, door op de plaatsen der gleuven de aequivalente serieadmittantie  $Y_g$  aan te brengen. Als noodzakelijke voorwaarde om met het transmissielijn-model te kunnen rekenen, beschouwen we de structuur als opgebouwd uit individuele gleuven, waarvan de eigenschappen reeds zijn behandeld. Daar we de structuur opgebouwd denken uit individuele gleuven, moet de plaatsing der gleuven zodanig zijn, dat de eigenschappen van een gleuf niet beïnvloed worden door de aanwezigheid van een andere gleuf. Beïnvloeding kan plaatsvinden via het interne, en het externe gebied.

##### a) interne gebied.

Deze beïnvloeding kan slechts plaatsvinden via andere veldvormen dan de propagerende  $TM_{01}$ -mode. Zoals is afgeleid in Par. 1, treden in de directe omgeving van de gleuf allerlei veldvormen op die tesamen het gleufveld opbouwen, Al deze velden kunnen echter (op de  $TM_{01}$ -mode na) niet propageren en zullen exponentieel gedempt zijn. Naburige gleuven worden nu zover uit elkaar geplaatst, dat mag worden aangenomen, dat de gedempte velden volledig verdwenen zijn op de plaats waar de naburige gleuf zich bevindt.

Dan zal via het interne gebied geen beïnvloeding der gleufeigenschappen optreden, door de aanwezigheid van meerdere gleuven.

b) Externe gebied.

Over de beïnvloeding die optreedt via het externe gebied zijn geen gegevens bekend, en deze beïnvloeding wordt verwaarloosd. Het is moeilijk te zeggen in hoeverre deze veronderstelling juist is. Bezien we het stralingsdiagram van één gleuf dan mag verwacht worden dat een tweede gleuf zeker invloed zal ondervinden via het externe stralingsveld, daar de optredende straling in de axiale richting aanzienlijk is. Om de grootte der beïnvloeding te bepalen moet het nabije veld van de gleuf bekend zijn en dit veld kan slechts nauwkeurig bepaald worden door oplossingen te zoeken voor de integraalvergelijkingen. Daar de integraalvergelijkingen in Hoofdstuk I<sup>o</sup> en II niet zijn opgelost, is het nabije veld onbekend, en is over de wederzijdse beïnvloeding niets bekend.

We veronderstellen nu, dat de gleuven zover van elkaar zijn verwijderd, dat geen wederzijdse beïnvloeding optreedt. Dit is een noodzakelijke voorwaarde voor de bruikbaarheid van de transmissielijnmodelmethode. De juistheid van de gemaakte veronderstelling kan slechts aangetoond worden door metingen aan gleufstructuren. Met behulp van het transmissielijnmodel met de dwarsadmittantie  $Y_S$  kunnen de diverse gleufvelden berekend worden. We moeten er echter wel aan denken dat energiedissipatie in  $Y_S$  geen maat is voor het totale uitgestraalde vermogen; (zie vorige paragraaf.) Het uitgestraalde vermogen kan slechts berekend worden door integratie van de Poynting vector in de golfzone.

PAR. 6.1.

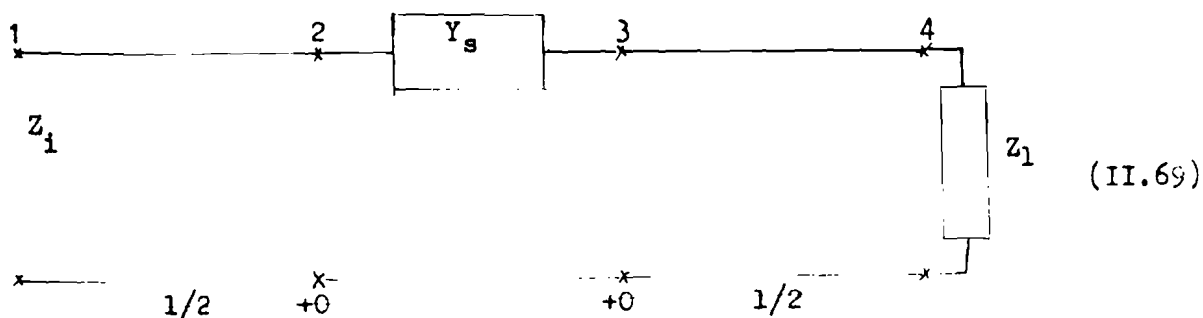
Periodieke gleufstructuur.

We gaan nu weer de golfpijpstructuur van Hoofdstuk I bekijken, en ontwerpen een transmissielijnmodel voor deze structuur, dat bestaat uit een kettingschakeling van vierpolen.

We nemen aan dat de met periode  $l$  geplaatste gleuven elkaar niet beïnvloeden.

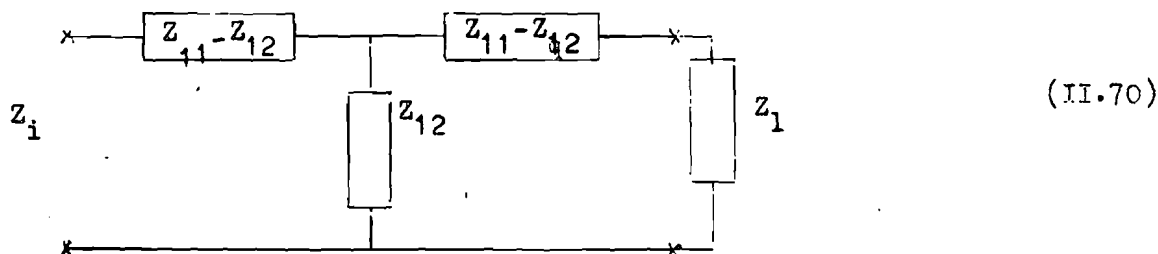
De pijp wordt verdeeld in periodieke stukken met lengte  $l$ , bestaande uit een gleuf en aan beide zijden een stuk gesloten golfpijp met lengte  $\frac{l}{2}$ .

Het transmissielijnaequivalent van dit stuk pijp ziet er dus als volgt uit:



De stukken pijp tussen punt 1 en 2 hebben een gereduceerde karakteristieke impedantie  $= 1$ .

Sluiten we deze vierpool bij punt 4 af met een gereduceerde impedantie  $Z_1$ , dan is de gereduceerde ingangsimpedantie  $Z_i$ . We proberen nu de bovenstaande configuratie te vervangen door een T-schakeling die dus het gedrag van de structuur over een lengte  $l$  weergeeft.  $Z_{11}$  en  $Z_{12}$  zijn impedanties:



Door gelijkstelling van  $Z_i$  en  $Z_i$  voor deze beide tekeningen kunnen we  $Z_{11}$  en  $Z_{12}$  berekenen als functie van  $Y_s$  en  $\beta_1$ .

In de theorie der lange leidingen geldt algemeen voor gereduceerde impedanties en voor een leiding met lengte  $l$ .

$$Z_i = \frac{Z_1 + \tanh j\beta_1 l}{Z_1 \tanh j\beta_1 l + 1}$$

Met behulp van deze formule kunnen we nu fig. (II.69) in enkele stappen bewerken.

Voor de impedantie op punt 3 vinden we (naar rechts kijkend).

$$a_{3i} = \frac{Z_1 + t}{Z_1 t + 1} \quad \text{met } t = \tanh j\beta_1 (1/2) \quad (\text{II.71})$$

Voor de impedantie op punt 2 kan gevonden worden:

$$Z_{2i} = \frac{Z_1 (Y_s + t) + (Y_s t + 1)}{Z_1 \cdot Y_s t + Y_s}$$

en voor  $Z_i$ :

Gelijkstelling der  $Z_1$ 's in de twee schema's (II.69) en (II.70) geeft dan:

$$Z_1 = \frac{Z_1(Y_s + t + Y_s t^2) + (2Y_s t + 1)}{Z_1(2Y_s t + t^2) + (Y_s t^2 + t + Y_s)} = Z_1 = \frac{(Z_{11}^2 - Z_{12}^2) + Z_{11} Z_1}{Z_{11} + Z_1}$$

Uitwerking van deze gelijkheid levert voor  $Z_{11}$  en  $Z_{12}$ :

$$Z_{11} = \frac{Y_s + t + Y_s t^2}{2Y_s t + t^2} \quad (II.72) \quad Z_{11}^2 - Z_{12}^2 = \frac{2Y_s t + 1}{2Y_s t + t^2} \quad (II.73)$$

en na enig rekenwerk volgt uit deze vergelijkingen voor  $Z_{12}$ :

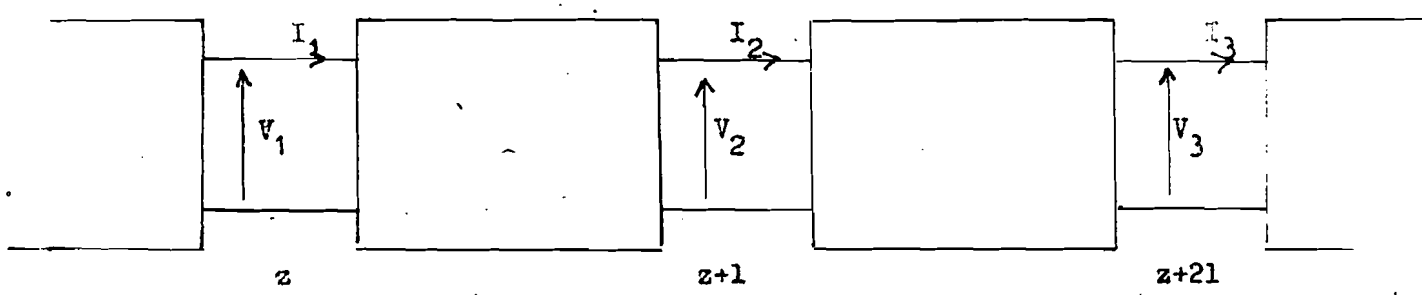
$$Z_{12} = \frac{+ Y_s (t^2 - 1)}{2Y_s t + t^2} \quad (II.74)$$

Op blz. II.34, wordt aangetoond dat het plusteken in deze vergelijking moet vervallen.

De karakteristieke impedantie van het vervangingsnetwerk kan nog bepaald worden; d.w.z. Afsluiting van het netwerk met de karakteristieke impedantie  $Z_0$ , geeft als ingangsimpedantie ook  $Z_0$ . Dus stel  $Z_0 = Z_1 = Z_i$ ; dan wordt gevonden:

$$Z_0^2 = Z_{11}^2 - Z_{12}^2 = \frac{2Y_s t + 1}{2Y_s t + t^2} \quad (II.75)$$

Nu zijn alle netwerk-elementen bekend, en kan de periodieke gleufstructuur worden vervangen door een  $\infty$  lange kettingschakeling van de berekende T-netwerken.



Daar deze structuur periodiek is, met periode 1, geldt weer het theorema van Floquet.

Voor alle golfverschijnselen kan dan worden geschreven:

$$F(z) = \phi(z) \cdot e^{\gamma z} = \phi(z+1) \cdot e^{-\gamma z}$$

waarin  $\gamma$  de complexe voortplantingsconstante is.

De in het transmissielijn-model optredende spanningen en stromen bestaan uit de twee componenten k en l, waarbij k en l golven voorstellen die in resp. de +z, en -z richting propageren.

We kunnen nu formeel schrijven (zie bijv. (II.59));

$$V_1 = k_1 - l_1$$

$$I_1 = k_1 + l_1$$

(waarbij met betrekking tot (II.57) hier de impedantie  $Z_1$  is vervallen, daar bovenstaande transmissielijnmodel genormeerd is t.o.v.  $Z_1$ ).

Evenzo geldt:

$$V_2 = k_2 - l_2$$

$$I_2 = k_2 + l_2$$

waarvoor met behulp van het theorema von Floquet ook kan worden geschreven:

$$\begin{aligned} I_2 &= k_2 + l_2 = (k_1 + l_1) e^{-\gamma l} \\ V_2 &= k_2 - l_2 = (k_1 - l_1) e^{-\gamma l} \end{aligned} \quad (II.77)$$

Voor figuur (II.74) gelden de genormeerde vierpoolbetrekkingen.

$$V_1 = Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{12}I_1 - Z_{11}I_2$$

Substitutie van (II.75) en (II.77) in deze vierpoolvergelijkingen

levert:

$$\begin{aligned} k_1 - l_1 &= Z_{11}(k_1 + l_1) - Z_{12}(k_1 + l_1) e^{-\gamma l} \\ (k_1 - l_1) e^{-\gamma l} &= Z_{12}(k_1 + l_1) - Z_{11}(k_1 + l_1) e^{-\gamma l} \end{aligned}$$

Dit kan ook geschreven worden als

$$0 = k_1 (Z_{11} - Z_{12} e^{-\gamma l} - 1) + l_1 (Z_{11} - Z_{12} e^{-\gamma l} + 1)$$

$$0 = k_1 (Z_{12} - Z_{11} e^{-\gamma l} - e^{-\gamma l}) + l_1 (Z_{12} - Z_{11} e^{-\gamma l})$$

Deze homogene vergelijking voor  $k_1$  en  $l_1$  geeft een oplossing die niet nul is, indien de determinant van de coëfficiënten = nul is. Uitwerking hiervan geeft:

$$2Z_{12} e^{-2\gamma l} - 4Z_{11} e^{-\gamma l} + 2Z_{12} = 0 \quad (II.78)$$

De oplossing van deze vierkantvergelijking is:

$$e^{-\gamma l} = \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \pm \frac{1}{4Z_{12}} \sqrt{(4Z_{11})^2 - 4(2Z_{12})^2} \quad (II.79)$$

Delen we (II.78) door  $e^{-2\gamma l}$  dan wordt de oplossing:

$$e^{\gamma l} = \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \pm \frac{1}{4Z_{12}} \sqrt{(4Z_{11})^2 - 4(2Z_{12})^2}$$

Deze twee oplossingen kunnen worden opgeteld en geven dan:

$$\cosh \gamma l = \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \pm \frac{Y_S(1 + t^2) + t}{Y_S(t^2 - 1)} \quad (II.80)$$



We moeten echter nog nagaan of het + en - teken beide geldig zijn in het rechterdeel van deze vergelijking.

Laten we aannemen dat er geen gleuven in de pijp aanwezig zijn; dan zal  $Y_s = \infty$  zijn, en  $\gamma' = j\beta_1$ , Substitutie hiervan geeft in (II.80).

$$\cos \beta_1 l = \pm \frac{1+t^2}{t^2-1} = \pm \frac{1 - \tan^2 \beta_1 \cdot 1/2}{-1 - \tan^2 \beta_1 \cdot 1/2} = \pm - \cos \beta_1 l.$$

Alleen het -teken in (II.80) is dus geldig. en het + teken moet vervallen. Met behulp van vergelijking (II.71) kunnen we nu (II.80) schrijven als

$$\cosh \gamma' l = \cos j\gamma' l = \cos \beta_1 l + \frac{j}{2Y_s} \sin \beta_1 l \quad (\text{II.81}).$$

We kunnen  $\gamma'$  splitsen in een dempings- en een fazecomponent:

$$\gamma' = a + j\beta \quad (\text{II.82})$$

en daarna vergelijking (II.81) nader uitwerken.

Dan wordt het paar vergelijkingen gevonden: (II.83)

$$\left\{ \begin{array}{l} \cosh a l \cdot \cos \beta l = \cos \beta_1 l \\ \sinh a l \cdot \sin \beta l = \frac{-1}{2Y_s} \cdot \sin \beta_1 l. \end{array} \right.$$

of na verdere uitwerking:

$$\sin^2 \beta l = \frac{(4Y_s^2 - 1) \cdot \sin^2 \beta_1 l \pm \sqrt{(4Y_s^2 - 1)^2 \sin^4 \beta_1 l + 16Y_s^2 \sin^2 \beta_1 l}}{8Y_s^2} \quad (\text{II.84})$$

on

$$\sinh a l = \frac{-\sin \beta_1 l}{2Y_s \cdot \sin \beta l}$$

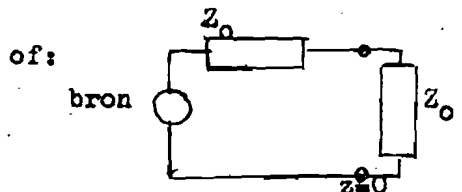
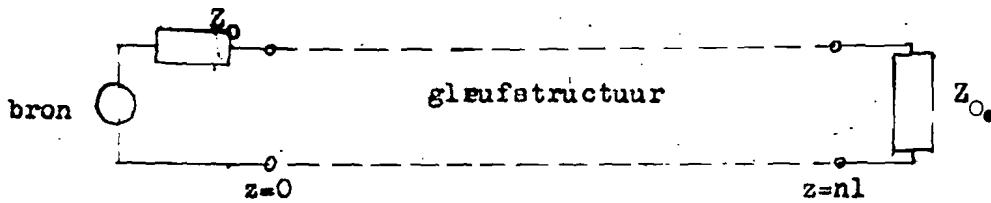
Hiermee zijn de vergelijkingen bekend waaruit de fase- en dempingsconstante van de golfpijp structuur kunnen worden berekend als functie van  $l$  en  $Y_s$ .

Met behulp van de in (II.68) gegeven numerieke waarden van  $Y_s$  en  $\beta_1$ , kan nu  $a l$  en  $\beta l$  worden berekend als functie van  $l$ . Deze waarden zijn uitgezet in Grafiek 3.

#### Opmerkingen:

- 1) De uitgezette waarden  $a l$  en  $\beta l$  zijn periodiek in  $l$  met periode  $\frac{2\pi}{\beta_1} = \lambda_g$ , dit is logisch, daar een stuk golfpijp met lengte  $x$  dezelfde eigenschappen bezit als een stuk met lengte  $x + n\lambda_g$  ( $n$  geheel).

- 2) Uit de grafiek is het faseverschil wat optreedt tussen de naburige gleufvelden (op afstand  $l$ ) direct af te lezen. In de grafiek is tevens  $\beta_1 l$  uitgezet als functie van  $l$ . Voor  $l = n \cdot \lambda_g / 2$  ( $n$  geheel) is  $\beta_1 l$  gelijk aan  $\beta$ .
- 3) Het amplitude-verschil tussen opeenvolgende gleufvelden is gelijk aan  $e^{-\alpha l}$ . Uit de grafiek blijkt dat maximale demping optreedt indien  $l = \lambda_g \cdot (2n+1)/4$ .
- 4) De berekende waarden van  $\alpha l$  en  $\beta l$  zijn niet alleen geldig voor de  $\infty$  lange gleufstructuur, maar zijn ook geldig voor een beperkt aantal gleuven, mits ervoor gezorgd wordt dat de bronimpedantie en de afsluitingsimpedantie gelijk zijn aan  $Z_0$ . In dit geval gedraagt de eindige gleufstructuur zich als een oneindig lange structuur.



Ideale vermogensaanpassing van de bron aan de lijn zou in dit geval verkregen worden indien  $Z_0 = Z_0^{*}$ ;  $Z_0$  moet dus reëel zijn. Volgens (II.75) geldt:

$$Z_0' = \frac{2Y_S t + 1}{2Y_S t - t} = \frac{2jY_S T + 1}{2jY_S T - T} \quad (\text{II.85})$$

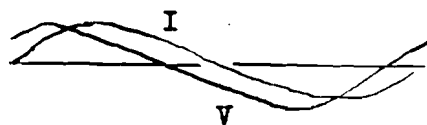
$$\text{met } t = jT = j \tan \beta_1 l / 2 = j \tan \pi l / \lambda_g$$

Hieruit volgt direct dat de ideale vermogensaanpassing niet bereikt wordt daar  $Z_0'$  niet reëel te maken is.

- 5) Bijzondere punten treden op indien  $l = n \cdot \lambda_g / 2$ ; dan is de demping nul en is het veld in alle gleuven even groot. De waarde van  $T$  is in deze gevallen 0 of  $\infty$ . Tussen deze waarden van  $T$  kan onderscheid worden gemaakt.

a).  $T=0$  dan is  $l = n \cdot \lambda_g$  en  $Z_0' = \infty \cdot e^{-j\pi/4}$

In dit geval is het faseverschil tussen stroom en spanning dus  $45^\circ$ . Er treedt een staande golf op met stroomknopen op de plaatsen der gleuven en op plaatsen tussen de gleuven (afh. van  $n$ ).

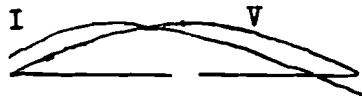


Straling treedt in dit geval niet op daar in de gleuven het magnetisch veld = 0 is.

b).  $T = \pm \infty$  als  $l = (2n+1)\lambda_g/2$ .

dan is  $Z_0 = c \cdot e^{-j\pi/4}$

In dit geval treedt op de plaatsen der gleuven een spannings-buik op.

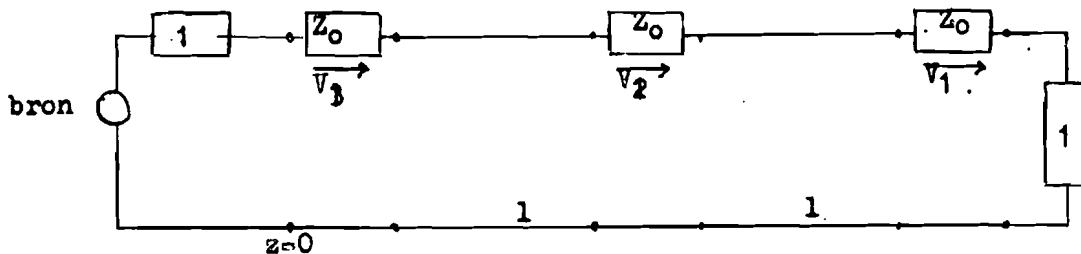


In dit geval zal dus vermogensdissipatie mogelijk zijn in de serie-admittanties  $Y_s$ . De in 4) en 5) behandelde gevallen zijn in de praktijk moeilijk uitvoerbaar, daar voor de golfpijpstructuur aanpassingsproblemen optreden, omdat de impedanties  $Z_0$  niet realiseerbaar zijn.

We zullen nu het geval beschouwen waarbij de bron-en afsluitings-impedantie niet gelijk zijn aan de karakteristieke impedantie, maar gelijk zijn aan de golfimpedantie van de gesloten golfpijp.

6.2. Structuren met meerdere gleuven en afgesloten met de golfimpedantie.

De bron- en afsluitingsimpedantie zijn nu gelijk genomen aan de gereduceerde golfimpedantie  $Z_1=1$ . De golfpijpstructuur is dus óf op geschikte wijze afgesloten gedacht, óf  $\infty$  uitgestrekt gedacht aan weerszijden van de gleufstructuur.



Veronderstellen we de gleufspanning  $V_1$  bekend, dan kunnen  $V_2$  en  $V_3$  daarin worden uitgedrukt. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de voor een stuk lange leiding met lengte  $l$  geldende formule:

$$V_i = V_u \cdot \cosh j\beta_1 l + I_u \cdot \sinh j\beta_1 l$$

$$I_i = V_u \cdot \sinh j\beta_1 l + I_u \cdot \cosh j\beta_1 l$$

Dan kan voor bovenstaande structuur worden gevonden:

$$V_1 = V_1$$

$$V_2 = V_1 \cdot ( (Z_s + 1) \sinh + \cosh ) \quad (\text{II.86}).$$

$$V_3 = V_1 \cdot ( (3Z_s + 2) \sinh \cdot \cosh + (Z_s^2 + Z_s + 1) \cdot \sinh + \cosh )$$

hierin zij de argumenten  $j\beta_1 l$  ter vereenvoudiging weggelaten.  
 Voor de ingangs-impedantie ter plaatse  $z=0$  kan worden gevonden:  
 (naar rechts kijkend )

$$Z_i = \frac{(3Z_s + 1) \cosh^2 + (4Z_s^2 + 3Z_s + 2) \sinh \cdot \cosh + (Z_s^2 + Z_s + 2Z_s + 1) \sinh^2}{\cosh^2 + (3Z_s + 2) \sinh \cosh + (Z_s^2 + Z_s + 1) \sinh^2} \quad (\text{II.87}).$$

Opmerkingen en conclusies:

1) De in (II.86) gevonden spanningen zijn in het algemeen complex en niet in fase.

a) Is  $l = m \lambda_g$ , dan zijn de gleufvelden echter wel in fase, en worden de spanningen.

$$V_1 = V_2 = V_3$$

b) is  $l = \lambda_g \cdot (2m+1)/2$

dan vinden we voor de spanningen:

$$V_3 = -V_2 = V_1$$

De amplituden der opeenvolgende gleufvelden zijn dus even groot.

In beide gevallen wordt  $Z_i = 3 Z_s + 1$ .

Dit duidt op een slechte vermogensaanpassing van de bron aan de lijn; deze aanpassing zal nog slechter worden indien meerdere gleuven worden beschouwd.

2) Indien de afmetingen der golfpijp zodanig veranderd zouden worden, dat  $\lambda_g = 2\lambda$ , dan zouden stralingsdiagrammen van dezelfde vorm als in Grafiek 2 kunnen worden verkregen.

3) De bovenstaande berekeningen zijn natuurlijk eenvoudig uit te breiden voor meer dan 3 gleuven.

4) In plaats van een afsluiting der structuur met de golfimpedantie kan de structuur ook kort gesloten worden, de aanpassing van de bron aan de lijn wordt dan iets beter.

5) Het is niet mogelijk om voor een omtreksgleuvenstructuur een vooropgestelde belichtingsfunctie te realiseren, daar de fase en amplitude van het gleufveld niet onafhankelijk van elkaar geregeld kunnen worden. Het amplitude van een gleufveld neemt af of blijft hoogstens gelijk als functie van de afstand tot de bron.

Voor een verder van de bron verwijderde gleuf zal de veldamplitude dus kleiner of hoogstens gelijk zijn aan de gleufvelden die zich dichterbij de bron bevinden.

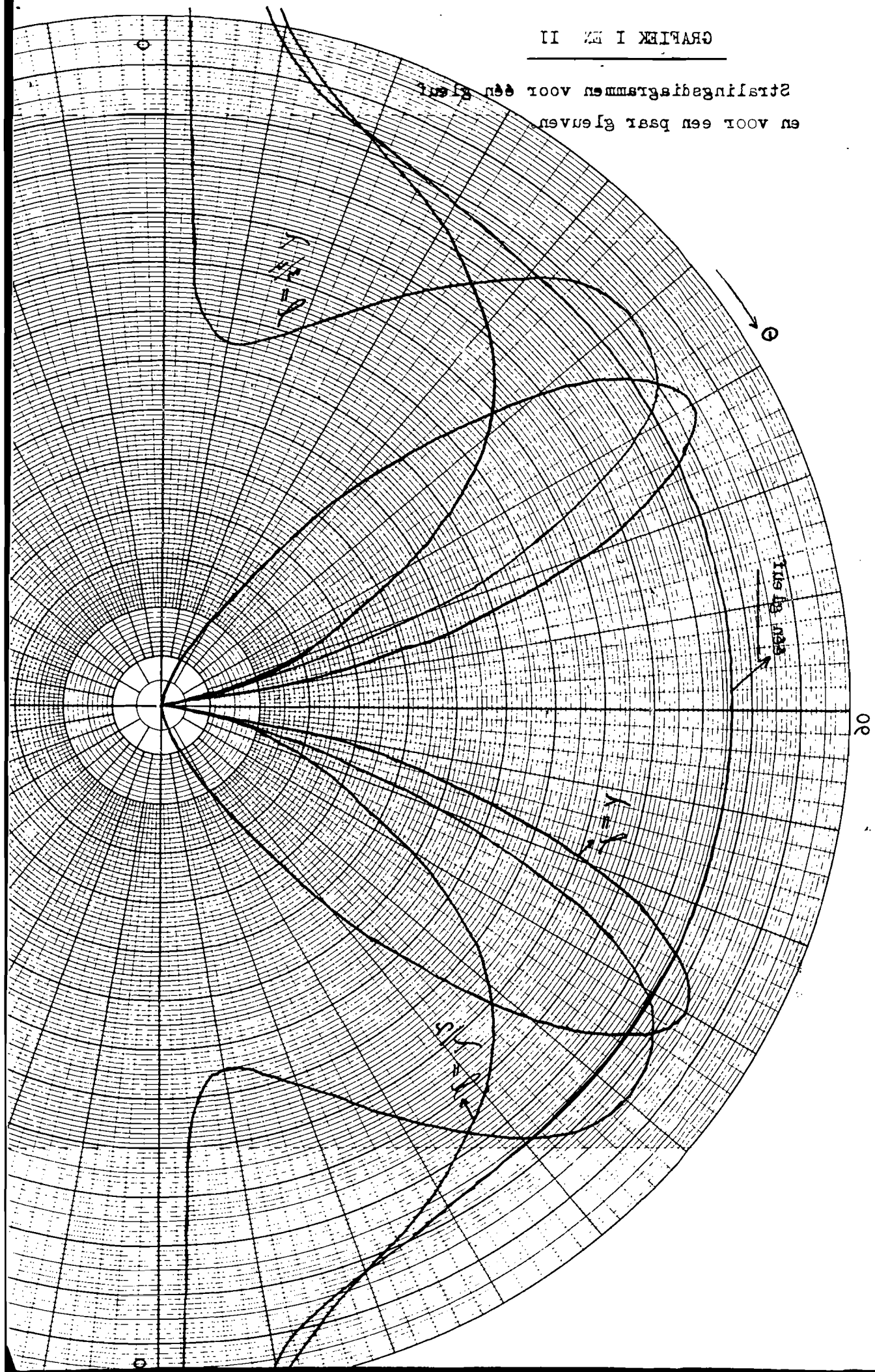
6) Indien de diverse gleufvelden met de bovenstaande methode berekend zijn, is het mogelijk om met een methode als gegeven is in Par. 5, het stralingsdiagram te berekenen.

7) In verband met de diverse onbewezen veronderstellingen die in Hoofdstuk II gemaakt zijn, is het zeker nodig de verkregen resultaten te vergelijken met metingen. Dit is zeker nodig voor de structuren met meerdere gleuven die met behulp van het transmissielijnmodel zijn opgebouwd.

8) De opgestelde transmissielijnmodellen kunnen slechts inlichtingen verschaffen over de waarden die de E.M. velden zullen aannemen, in het interne gebied van de structuur, en zijn niet representatief ter berekening van het uitgestraalde vermogen. De totale uitgestraalde energie is nl. niet gelijk aan de som van het in de serieadmittanties opgenomen vermogen en deze afwijking komt niet tot uitdrukking in het transmissielijnmodel. Het is dus nodig te onderzoeken in hoeverre dit eenvoudige model overeenkomt met de praktijk.

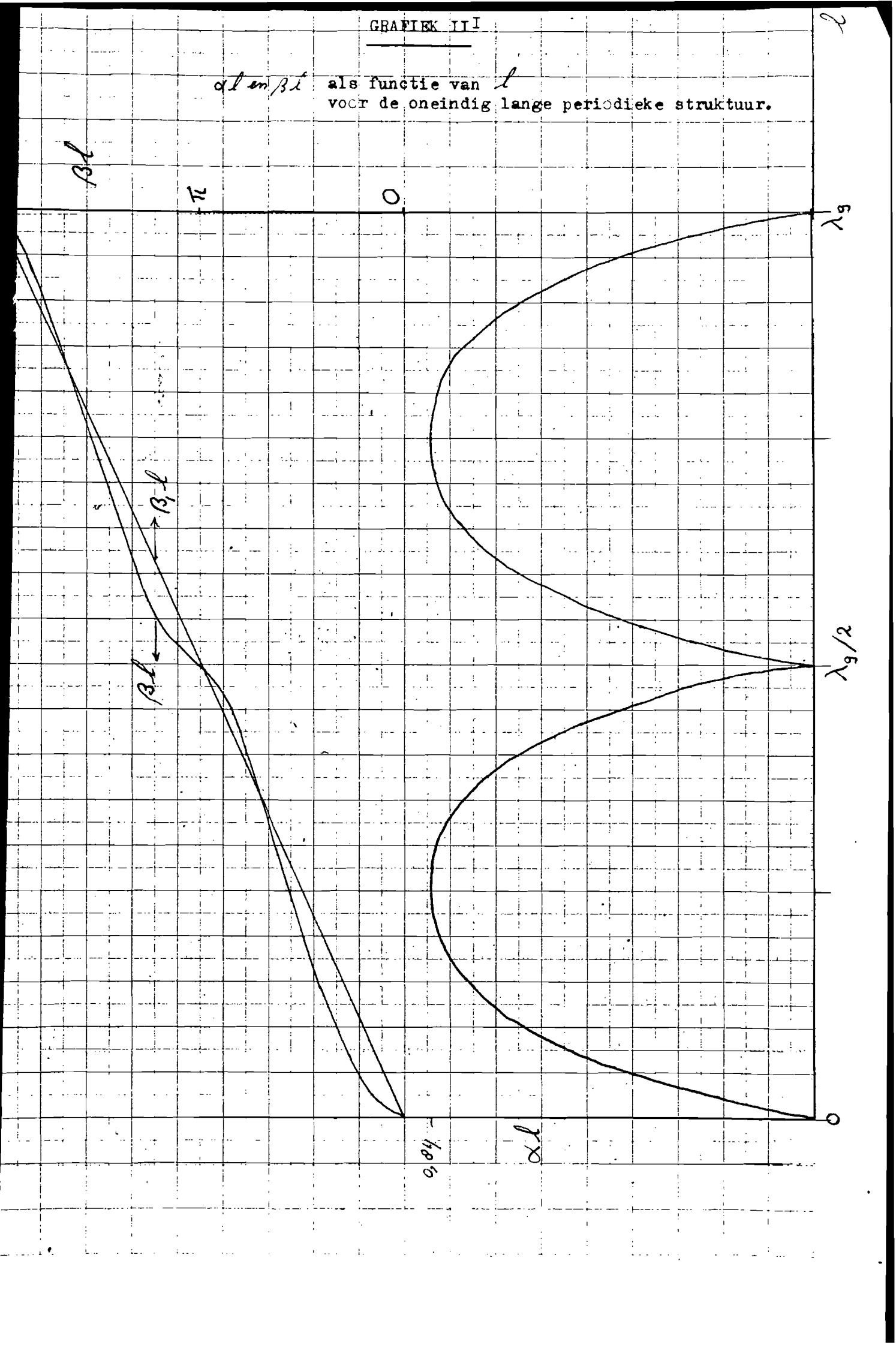
GRAFIEK I EN II

Stralingsdiagrammen voor één glanzpunt en voor een paar glanzpunten



GRAFIEK III

$\alpha l$  en  $\beta l$  als functie van  $l$   
 voor de oneindig lange periodieke structuur.



Literatuuropgave.

1. R.F. Hyneman: Closely-spaced transverse slots in Rectangular Waveguides.  
I.R.E. transactions on antennas and propagation 1959, blz. 335.
2. L. Brillouin Wave propagations in periodic structures.  
Dover, Publ.Inc. New.York 1953.
3. W.J. Smirnov "Lehrgang der höheren Mathematik"  
V.E.B. Deutscher Verlag der Wissenschafte, Berlin 1961.
4. S. Sensiper. Electromagnetic wave propagation on helical conductors.  
Massachusetts , Institute of Technology, 1951.
5. C.I. Bouwkamp: On the diffraction of Electromagnetic waves by small circular disks and holes.  
Philips Research Report. Dec. 1950.
6. P.M. Morse and H.Peshbach Methods of theoretical physics.  
Mc.Graw Hill. New York 1953.
7. G.N. Watson A treatise on the theory of Bessel functions.  
Mcmillan Co., New York 1947.
8. A.Z. Fradin Microwave Antennas  
Pergamon Press. London 1961.
9. R.C. Honey A Flush Mounted Leaky Wave Antenna with Predictable Patterns.  
I.R.E. Trans..on antennas and Propagation..  
October 1959.



