

MASTER

Ruwheid en de modellering van ruwheid

Vermeulen, W.P.

Award date:
1987

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

BB 443005

Ruwheid en de modellering van ruwheid

=====

W.P. Vermeulen

Deelrapport eindstudie II

April 1987

VF-code: A2

WPA-rapport 0397

Voorwoord

=====

Dit verslag is een deelrapport over het afstudeerwerk van ondergetekende, student aan de Technische Universiteit Eindhoven, faculteit der Werktuigbouwkunde, vakgroep Productietechnologie en -Automatisering, werkeenheid bewerkingsprocessen en materialen.

Het onderzoek is grotendeels verricht bij Hoogovens te Beverwijk, in samenwerking met voornoemde werkeenheid van de TUE.

Het onderzoek beoogt meer inzicht te verschaffen in contactverschijnselen bij lage vlaktedrukken, zoals die o.a. bij dieptrekprocessen optreden, met name de preciese werking van een smeermiddel.

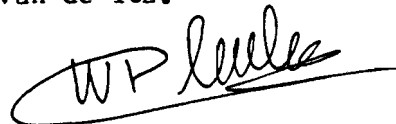
De totale rapportage omvat 6 delen. Het eerste deel behandelt smeermiddelen, de volgende drie behandelen elk een aspect van de modelvorming en de resultaten daarvan en de vijfde rapporteert over gedane experimenten. Het laatste rapport is een samenvoeging van de eerste vijf onderdelen tot een afgerond geheel:

- | | | |
|---|--|----------|
| 1 | Smeermiddelen voor metaalomvormen | WPA-0351 |
| 2 | Numeriek oplossen van de Reynoldsvergelijking voor
microscopische oppervlakte-elementen | WPA-0396 |
| 3 | Ruwheid en de modellering van ruwheid | WPA-0397 |
| 4 | Hydrodynamische draagkracht van hypothetische
ruwheidsprofielen | WPA-0398 |
| 5 | Hydrodynamisch gedrag van dunne plaat | WPA-0399 |
| 6 | Modelvorming voor tribologie bij lage contactdrukken | WPA-0400 |

Dit rapport gaat over het modelleren van een reeel ruwheidsprofiel met als input enige ruwheidsparameters. Eerst volgt een korte verhandeling over oppervlakte-ruwheid, waarna wordt overgegaan tot de conversie van ruwheidsparameters in modelparameters.

Graag wil ik bij deze iedereen bedanken die op enige wijze bij de realisatie van dit werk betrokken is geweest, met name Ir.W.C. Emmens van Hoogovens en Dr.Ir.J.A.H. Ramaekers van de TUE.

Hilversum, april 1987



Wim Vermeulen

Inhoud blz
 =====

Voorwoord i
 Inhoudsopgave ii

Hoofdstuk I - Ruwheid
 1-1 Inleiding in de ruwheidsmeting 1
 1-2 Ruwheidsparameters 2
 1-3 Relevantie van ruwheidsparameters 4

Hoofdstuk II - Modelleren van een reeel ruwheidsprofiel
 2-1 Betekenis van ruwheidsparameters 6
 2-2 Modelvorming 6
 2-3 Verdelingsparameters en ruwheidsparameters 7
 2-4 Invloed van de verdeling op ruwheidsparameters 8
 2-5 De standaardberg 10
 2-6 Golving 11

Literatuuropgave 13
 Symbolenlijst 14

Bijlagen

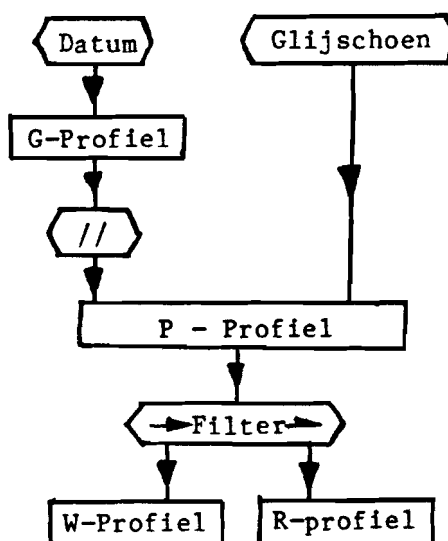
Bijlage 1 - Ruwheidsparameters wiskundige functies
 1-1 Inleiding B1-1
 1-2 Analytische berekeningen B1-1
 1-3 Numerieke integratie B1-4
 Bijlage 2 - Berekening verdelingsparameters B2-1
 Bijlage 3 - Benadering ruwheidsprofielen met polynomen
 3-1 Overzicht van de benaderde functies B3-1
 3-2 Bepaling polynomen door ruwheidsparameters B3-5

Hoofdstuk I - Ruwheid [1],[2]

I-1 - Inleiding in de ruwheidsmeting

Indien we een meetsignaal G over een lengte L door meting van een ruwheidsprofiel verkregen hebben, kunnen we dit signaal op verschillende manieren bewerken. (zie figuur 1.1)

Allereerst moeten we de eventueel tussen profiel en datum (=externe rechte referentie) optredende onevenwijdigheid corrigeren. Dit doen we door het profiel te beschrijven ten opzichte van de beste kleinste kwadratenlijn door dit profiel, de zogenaamde middellijn. Er volgt het P-profiel. Bij meetapparatuur met een glij schoen wordt automatisch een P-profiel verkregen.



Figuur 1.1 - Ruwheidsprofielen

Vervolgens wil men vaak langgolvlige verschijnselen in dit P-profiel ($\lambda > \lambda_{co}$) verwijderen, dan wel apart bekijken. Daartoe kan men dit signaal door middel van filtering splitsen in een Ruwheidssignaal (R-Profiel) en een 'Welligheid'-signaal (W-Profiel). Filtering kan plaats vinden door de glij schoen (juiste keuze van de glij schoenradius), via elektronische weg (b.v. RC-filter) of door digitale bewerking van digitaal opgeslagen meetgegevens (b.v. via FC-filter, een fase-gecorrigeerd filter). NB Normale glij schoenradius = $50 \times \lambda_{co}$.

Uit het R-Profiel (soms het P-Profiel) kunnen vele ruwheidsparameters berekend worden, b.v. R_a , R_q , S_m . Indien deze parameters uit een P-Profiel berekend worden, worden ze resp. P_a , P_q en S_m genoemd.

De ruwheidsparameters zijn grofweg in twee groepen te splitsen, de zg. 'verticale' en 'horizontale' parameters. Onder 'verticale' verstaan we vorm en hoogte van de ruwheid, onder 'horizontale' periodiciteit, gemiddelde golflengte etc.

Enige veel gebruikte ruwheidsparameters wil ik hierna even kort in herinnering roepen, waarbij de volgende gronddefinities gelden:

Middellijn = Nulllijn door het profiel, bestaande uit de per co-
lengte berekende kleinste kwadraten-lijnen.

Meetlengte : $L_t = \text{aftastlengte} = 8 * \lambda_{co}$
 $L_v = \text{inlooptengte ("voorloop")} = 1.5 * \lambda_{co}$
 $L_m = \text{meetlengte} = 5 * \lambda_{co}$
 $L_n = \text{uitlooptengte ("naloopt")} = 1.5 * \lambda_{co}$
 $L_t = L_v + L_m + L_n$
 Vaak wordt L_m nog gesplitst: $L_m = 5 * L_e$
 $L_e = \text{co} = \text{eenheidslengte}$

I-2 - Ruwheidsparameters [3] (= [7]), [4], [5], [6]

Verticale ruwheidsparameters (discreet)

R_y [μm] : Hoogteverschil tussen hoogste top en diepste dal over de
(= R_t) gehele meetlengte L_m . $R_y = R_p + R_m$ [3] ([4])

R_p [μm] : Bepaal de 5 hoogste toppen t.o.v. M, R_{pi} . Dan:
 R_p [μm] = $(R_{pi})_{\text{max}}$ [3]
 R_{pm} [μm] = $(\sum R_{pi})/5$

R_v [μm] : analoog aan R_p , echter voor de dalen t.o.v. M) [3]

(R_z DIN) [μm] : Bepaal per L_e de R_y -waarde, R_{yi} of Z_i . Dan:
 R_{y5i} (= R_{zdin}) [μm] = $(\sum R_{yi})/5$ [3] ([4])
 R_y (= R_{max}) [μm] = $(R_{yi})_{\text{max}}$ [3] ([4])

R_z (ISO) [μm] : Bepaal de 5 hoogste toppen en de 5 diepste dalen
t.o.v. M (resp. Y_{pi} en Y_{vi}). Dan:
 R_z (= R_{ziso}) [μm] = $\{\sum (Y_{pi} + Y_{vi})\}/5$ [3]

R_{3z} (DB) [μm] : Bepaal per L_e de afstand tussen de 2 na hoogste
top ('Dritthochsten') en het twee na diepste dal
(('Drittittiefsten'), $3Z_i$. Dan:
 R_{3z} [μm] = $(\sum 3Z_i)/5$ [8]
 R_{3zm} [μm] = $(3Z_i)_{\text{max}}$ [8]

Verticale ruwheidsparameters (continu)

R_a [μm] = gemiddelde ruwheid: $R_a = \left(\int_0^{L_m} |y| \cdot dx \right) / L_m$ [3]

R_q [μm] = kwadratisch gemiddelde ruwheid: $R_q = \left\{ \left(\int_0^{L_m} y^2 \cdot dx \right) / L_m \right\}^{1/2}$ [3]

S_k [-] = "skewness" of scheefheid
van de hoogteverdeling: $S_k = \left(\int_0^{L_m} y^3 \cdot dx \right) / (L_m \cdot R_q^3)$ [3]

K_u [-] = "kurtosis" of spitsheid
van de hoogteverdeling: $K_u = \left(\int_0^{L_m} y^4 \cdot dx \right) / (L_m \cdot R_q^4)$

Men kan natuurlijk ook sommeren i.p.v. integreren.

Horizontale ruwheidsparameters (discreet)

Piekdichtheden Nr, D, Pc, T1, T2, S:

- Nr [/10mm] : Boven resp. onder M lopen twee lijnen parallel aan M, op afstand C1 resp. C2. Een piek wordt geteld indien achtereenvolgens de bovenste en de onderste lijn over- resp. onderschreden worden.
- D [/Lm] : Analoog aan Nr, alleen per Lm i.p.v. per 10 [mm].
beiden: [1]
- Pc [/10mm] : Analoog aan Nr, met C1=C2. [2]
T1 = Pc
- T2 [/10mm] : Analoog aan Nr, met C2=0. [2]
- S [/10mm] : Een piek wordt geteld indien het profiel een lijn, evenwijdig aan M op afstand C1 overschrijdt.
[2] ([3]: anders, namelijk "örtlich")

Gemiddelde piekafstanden Sm, (Smo):

- Sm [um] : $S_m = 10 / S$; $S = S([3])$
[3]
- Sm [um] : Pc, geteld met C1 = C2 = Ra/2. Dan: $S_m = 10 / Pc$
[2]
- Sm [um] : Nr, met zelf te definiëren C1, C2. Dan: $S_m = 10 / Nr$
[1]
- (Smo [um] : S, met C1=0. Dan: $S_{mo} = 10 / S$ [Hoogovens])

(Breedtes Lmp, Lmv: [Hoogovens])

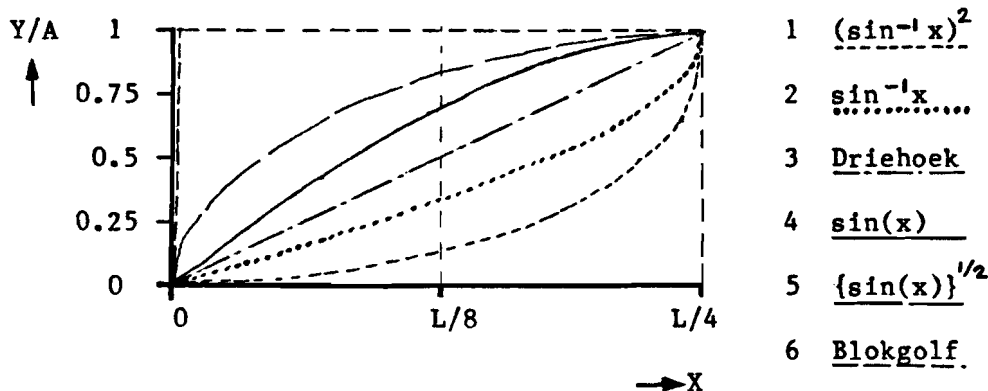
- Lmp [um] = gemiddelde piekbreedte (overschrijden M=piek)
Lmv [um] = gemiddelde dalbreedte (onderschrijden M = dal)

Horizontale ruwheidsparameters (continu)

- $\Delta a [-]$ = gemiddelde profielhelling. $\Delta a = \left(\int_0^{L_m} |dy/dx| \cdot dx \right) / L_m$
[3],[2]
- $\Delta q [-]$ = gemiddelde kwadratische profielhelling. $\Delta q = \left\{ \int_0^{L_m} (dy/dx)^2 \cdot dx \right\} / L_m^{1/2}$
[3],[2]
- $\lambda_a, \lambda_q [um]$ = rekenkundig resp. kwadratisch gemiddelde golflengte betrokken op hun amplitude:
[3],[2]
 $\lambda_a = 2 \cdot \pi \cdot Ra / \Delta a$ $\lambda_q = 2 \cdot \pi \cdot Rq / \Delta q$
- Lr [%] = profiellengteverhouding. Indien Lo de lengte is van het uitgestrekte profiel ($Lo = \int_0^{L_m} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \cdot dx$, dan:
 $Lr = Lo / L_m \times 100$ [%]
[3],[2]

I-3 - Relevantie van ruwheidsparameters

Na deze expose van ruwheidsparameters is het verstandig de betekenis van deze parameters nader te bekijken. Daartoe zijn voor een aantal wiskundige functies enige ruwheidsparameters bepaald. Deze functies zijn geschetst in figuur 1.2 en de (deels numeriek) berekende ruwheidsparameters zijn weergegeven in tabel 1.3 (A = amplitude = Ymax). Voor meer details van de berekeningen zie bijlage 1.



Figuur 1.2 - 1/4 periode van de gebruikte functies

F	Ra	Rq	Ku	Δa	Δq	$\lambda a/4$	$\lambda q/4$	Lr
1	0.189	0.281	4.342	1.000	2.906*	0.298	0.152*	1.597*
2	0.363	0.435	2.194	1.000	1.674*	0.571	0.408*	1.464*
3	0.500	0.577	1.800	1.000	1.000	0.785	0.907	1.414*
4	0.637	0.707	1.500	1.000	1.111	1.000	1.000	1.464*
5	0.763	0.798	1.234	1.000	2.210*	1.198	0.567*	1.549*
6	1.000	1.000	1.000	1.000	(100*)	1.571	0.016*	2.000*

Tabel 1.3 - Ruwheidsparameters voor enige functies (*=numeriek)
(A=1, L=4)

Uit het voorgaande moge duidelijk zijn dat alle functies een gelijke R_p en R_y hebben (resp. 1 en 2) zodat deze parameters in dit verband niet interessant zijn. Ook de Skewness is in dit geval niet interessant, daar deze nul is voor puntsymmetrische functies.

R_a geeft de hoogte van het genormeerde ruwheidsprofiel aan. Indien men y als een normale (Gaussische) verdeling rond $y=0$ beschouwd, is R_q de standaardafwijking S van die verdeling. Indien y zuiver normaal verdeeld is rond 0, is K_u gelijk aan 3.

K_u is in feite een amplitude-onafhankelijke maat voor de spitsheid van het profiel. (Zoals gezegd: $K_u = 3$ bij normale verdeling). Dit is in te zien door K_u als volgt te schrijven:

$$R_4 = \{(\sum y_i^4)/N\}^{1/4} \quad \text{Dan:} \quad K_u = (R_4/R_q)^4$$

Indien we de top van een functie iets uitrekken zal R_4 sterker veranderen dan R_q zodat K_u toeneemt.

Wat Δa betreft valt het op dat deze voor alle functies gelijk is, en wel 1 in dit geval. Blijkbaar geldt dat voor iedere monotoon stijgende functie met gelijk begin en eindpunt dat Δa gelijk is aan de helling van de verbindingslijn tussen die twee punten.

Zijn vriendje Δq geeft aan in hoeverre de helling van de functie afwijkt van het gemiddelde. Per definitie moet dus gelden $\Delta q > \Delta a$. (Δq is minimaal bij een vlakke helling, en is dan gelijk aan Δa .)

De beide golflengtes λ_a en λ_q zijn lastig te interpreteren, behalve dat je kunt zeggen dat ze voor een sinus juist gelijk zijn aan zijn periode en dus 'kloppen'.

L_r geeft mooi aan hoe "gekromd" de functie is (hol dan wel bol). Overigens hebben de op deze manier genormeerde \sin en \sin^{-1} natuurlijk een gelijke L_r !

Hoofdstuk II - Modelleren van een reeel ruwheidsprofiel

II-1 - Betekenis van ruwheidsparameters

In hoofdstuk I hebben we op academische wijze naar ruwheidsparameters gekeken. Een reeel ruwheidsprofiel vertoont echter vele vervelende onregelmatigheden; de 'bergen' zijn niet allen van gelijke hoogte, hebben niet dezelfde periode (piekbreedte), hebben geen monotoon stijgende flanken (er zitten bergjes en putjes op de helling) etc. Dit laatste zorgt er bijvoorbeeld voor dat de gemiddelde helling Δa niet meer gelijk is aan top-dal-hoogte/piekbreedte.

Voor het modelleren van zo'n profiel is het dus van belang na te gaan hoe deze 'verstoringen' de verschillende ruwheidsparameters beïnvloeden en dus of (en zo ja hoe) dezen in het model moeten worden ingebracht.

II-2 - Modelvorming

Om bij het analyseren van de ruwheidsparameters niet stuurloos te zijn en dus veel te veel werk te doen met niet relevant resultaat, is het nodig die parameters te bekijken met het uiteindelijk doel, een model, als filter en/of oogkleppen. Daartoe zullen we eerst de grove lijnen van het model moeten schetsen.

In dit geval willen we het model gebruiken om een hydrodynamische draagkracht uit te rekenen, met behulp van modellen die numeriek hanteerbaar zijn, als beschreven in [10]. Voor deze modellen geldt:

- We werken met 'enkelvoudige' bergen; putten en pukfels hebben, mits niet in de orde grootte van de berg, weinig invloed.
- De gemiddelde helling van de flank is bijzonder belangrijk, de flankvorm speelt echter ook een rol van betekenis.
- We willen een stukje ruwheid samenstellen uit meerdere bergen met verschillende tophoogtes en verscheidene gemiddelde hellingen. We zullen dus minstens twee verdelingen te weten moeten komen uit de verzameling van mogelijke drie: tophoogte-verdeling, golflengte-verdeling, gemiddelde hellingverdeling.
- De macroscopische golving van het ruwheidsprofiel is, i.v.m. de 'vrijloop' van van de bergen, ook van belang. We hebben dus een soort macroscopische hoogteverdeling nodig, ofwel de hoogteverdeling van het golfprofiel (W-profiel).

Om het model enigszins hanteerbaar te houden willen we van de volgende veronderstellingen uitgaan, die deels gevoelsmatig zijn gedaan:

- 1 De 'bergen' hebben bij gegeven top-dal-hoogte en piekbreedte een gelijke flankvorm; een monotoon stijgende functie.
- 2 De piekbreedte is recht-evenredig met de piekhoogte, oftewel piekhoogte- en golflengte-verdeling zijn gelijk en rechtstreeks gekoppeld.

- 3 De vrijloop boven de toppen is een superpositie van golving en tophoogte-verdeling.
- 4 Indien verdelingsfuncties niet bekend zijn wordt een normale verdeling verondersteld, tenzij dit duidelijk niet zo is of niet mogelijk is.

II-3 - Verdelingsparameters en ruwheidsparameters

Als invoer voor het model hebben we het volgende nodig:

- De flankvorm van de bergen
- De piekbreedte- of de piekhoogte-verdeling en respectievelijk de gemiddelde piekhoogte of gemiddelde piekbreedte.
- De macroscopische hoogteverdeling (golving).

Indien alle toppen even hoog zouden zijn, zou de flankvorm in voldoende mate te bepalen zijn uit de Kurtosis van het profiel. Aangezien dit niet zo is, en de tophoogte-verdeling de Kurtosis beïnvloed, zullen we als eerste naar die verdeling van de tophoogte moeten kijken.

We hadden in de vorige paragraaf al gewaarschuwd: indien geen verdeling bekend is nemen we (indien redelijkerwijs aannemelijk) een normale (μ, S) verdeling aan. Daarvan wil ik nu gebruik maken. Laten we dus aannemen dat de tophoogtes normaal verdeeld zijn rond μ , met standaardafwijking S . (relatieve standaardafwijking $\alpha = S/\mu$) We zoeken nu dus een gemiddelde piekbreedte, een gemiddelde tophoogte en een standaardafwijking op een van beide.

Voor de gemiddelde piekbreedte liggen er twee mogelijkheden waarvan van we er een nog niet besproken hebben:

- Een van de "peakcount"-parameters, bijvoorbeeld S_m ; De piekbreedte B is dan gelijk aan $S_m/2$ ($S_m = \text{piekafstand}!$).
- De "main frequency" die volgt uit Fourier-analyse van het oppervlak (mogelijk op de TUE).

De gemiddelde piekhoogte T zouden we kunnen bepalen m.b.v. Δa ; voor monotoon stijgende functies geldt immers: $\Delta a = 2.T/B$, ofwel $T = B.\Delta a/2$. Dit zal echter hoogstwaarschijnlijk tot grote fouten leiden daar de flanken van de bergen geen monotoon stijgende functies zijn, en wij weliswaar kleine putten en dalen verwaarlozen maar de ruwheidsparameter $\Delta a (= \int |dy/dx|!)$ zal dit zeker niet.

Een andere mogelijkheid zou $R_a.K_u$ kunnen zijn, R_a is namelijk de gemiddelde hoogte van de bergen, terwijl K_u een (niet amplitude-afhankelijke) maat is voor de vorm van die gemiddelde bergen. We zullen dit voor de in hoofdstuk 1 gebruikte standaardfuncties even nagaan: Voor F_i levert $R_a.K_u$ respectievelijk ($i=1,6$) 0.82, 0.80, 0.90, 0.96, 0.94, 1.00 op. Dit lijkt in de goede richting te wijzen. Een bewijs of verklaring dat dit voor iedere mogelijke verdeling geldt valt echter niet te leveren zodat het gevaarlijk lijkt dit mogelijke verband te gebruiken.

Een derde mogelijkheid is R_z en R_y te gebruiken. R_z is namelijk het gemiddelde van de grootste top-dal hoogtes, en R_y is de som van hoogste top en diepste dal.

Het interval $[R_y - 2(R_y - R_z), R_y]$, met lengte $L_i = 2(R_y - R_z)$, bevat dus 5 van de totaal N toppen die zich op de meetlengte L_m bevinden en vertegenwoordigt zo de 'staart' van de cumulatieve verdelingsfunctie $\varphi(x)$.

N is eenvoudig te bepalen: $N = L_m / S_m$ (meetlengte/gemiddelde piekafstand) zodat $N = 5 \lambda_{co} / S_m$. De fractie $f = 5/N$ die de vijf hoogste toppen vertegenwoordigen is dan: $f = S_m / \lambda_{co}$.

Met $L_i = S \cdot \Delta x$ kunnen we nu S middels een cumulatieve tabel bepalen (uit $x(f)$), mits we eerst de x -waarde van de grootste topdalafstand, R_y , vastleggen. Zeg deze is X_o . Dan moet gelden: $\varphi(X_o) - \varphi(X_f) = f$, zodat we hieruit X_f kunnen bepalen. S volgt dan uit ($S = L_i / \Delta x$): $S = L_i / (X_o - X_f)$.

Dit is echter nogal bewerkelijk en (in formulevorm) onhanteerbaar door het verplicht tabelgebruik. Indien we X_o op 2 stellen ($R_y = u + 2S$), kunnen we deze staart van de normale verdeling benaderen door: $\varphi(x) = 0.15 \cdot (2 - x)$ en dan geldt met $\Delta x = X_o - X_f = 2 - x$: $\varphi(\Delta x) = 0.15 \cdot \Delta x = f$, zodat voor S volgt: $S = L_i / \Delta x = L_i / (f / 0.15) = 0.15 L_i / f = 0.3 \lambda_{co} (R_y - R_z) / S_m$. μ is dan: $\mu = R_y - 2S$

Deze afleiding is echter betrokken op topdalhoogtes en wij willen slechts toppen. Aangezien we toppen en dalen punt-symmetrisch hebben verondersteld is dat echter geen probleem en volgt:

$$\begin{array}{lll} St = 0.15 \lambda_{co} (R_y - R_z) / S_m & [\mu m] & -1- \\ \mu t = Ts = R_y / 2 - 2St & [\mu m] & -2- \end{array}$$

Nu hebben we voldoende mogelijkheden om uit een stel ruwheidsparameters, zijnde S_m , R_t , R_z , (λ_{co}) een gemiddelde berghoogte en basisbreedte en een verdeling daarop te bepalen.

II-4 - Invloed van de verdeling op ruwheidsparameters

We willen toe naar een standaardberg die we -geometrisch gelijkvormig geschaald- normaal willen verdelen. We weten nu hoe we aan de verdeling moeten komen, maar hoe moeten we de ruwheidsparameters die o.a. betrekking hebben op de flankvorm (R_a , R_q , K_u , etc.) van het profiel vertalen naar parameters voor de standaardberg. Daar zullen we ons dus nu eerst mee bezig houden.

Onze standaardberg definiëren we als volgt: $y(x) = f(x)$, $x: [0, \lambda]$. Voor deze standaardberg (met $B = B_s$, $T = T_s$ en $\lambda = \lambda_s$) geldt:

$$R_{a-s} = (1 / \lambda_s) \int_0^{\lambda_s} |y| \cdot dx ; \text{ Analoog voor } R_{q-s} \text{ en } K_{u-s}$$

Schalen we de berg met een factor Δi tot berg i , dan geldt voor deze i -de berg:

$$Y_i = \Delta i \cdot f(x / \Delta i), x: [0, L_i] \quad (\text{met } L_i = \lambda_s \cdot \Delta i)$$

Nu berekenen we voor een willekeurige verzameling bergen, N stuks, elk geschaald met een factor Δi t.o.v. onze standaardberg, R_{a-n} , R_{q-n} en K_{u-n} : (Zie ook bijlage 2)

$$\begin{aligned}
 R_{a-n} &= (1/L) \int_{x=0}^L |y| \cdot dx = (1/\sum_{i=1}^N L_i) \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{x=0}^{L_i} \Delta i \cdot |f(x/\Delta i)| \cdot dx \right\} \\
 &= \left\{ 1/\sum_{i=1}^N (\lambda_s \cdot \Delta i) \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\int_{x=0}^{L_i} \Delta i \cdot |f(x/\Delta i)| \cdot dx \right) \right\}
 \end{aligned}$$

met $z_i = x/\Delta i$ gaan de integralen over in:

$$\begin{aligned}
 R_{a-n} &= \left\{ 1/(\lambda_s \cdot \sum_{i=1}^N \Delta i) \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N \Delta i^2 \int_{z_i=0}^{\lambda_s} |f(z_i)| \cdot dz_i \right\} \\
 &= \left\{ 1/(\sum_{i=1}^N \Delta i) \right\} \cdot \left\{ 1/\lambda_s \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N \Delta i^2 \right\} \cdot \left\{ \int_{z_i=0}^{\lambda_s} |f(z_i)| \cdot dz_i \right\}
 \end{aligned}$$

zodat:

$$R_{a-n} = \left[\left(\sum_{i=1}^N (\Delta i^2) \right) / \left(\sum_{i=1}^N \Delta i \right) \right] \cdot R_{a-s}$$

Voor R_{q-n} en K_{u-n} volgt na stug volhouden iets dergelijks, zodat het totaalbeeld er als volgt uit ziet:

$$\begin{aligned}
 R_{a-n} &= R_{a-s} \cdot (\sum \Delta i^2 / \sum \Delta i) &= A \cdot R_{a-s} &-3- \\
 R_{q-n} &= R_{q-s} \cdot \left\{ (\sum \Delta i^3 / \sum \Delta i)^{1/2} \right\} &= Q \cdot R_{q-s} &-4- \\
 K_{u-n} &= K_{u-s} \cdot \left\{ (\sum \Delta i) \cdot (\sum \Delta i^5) / ((\sum \Delta i^3)^2) \right\} &= K \cdot K_{u-s} &-5-
 \end{aligned}$$

Het blijkt dus dat R_{a-n} , R_{q-n} en K_{u-n} onafhankelijk van de flankvorm van de standaardfunctie te berekenen zijn uit de profiel-ruwheidsparemeters. Ergo, indien de verdeling $\{\Delta i\}$ bekend is, kunnen we uit de ruwheidsparemeters van het verdeelde profiel eenvoudig de ruwheidsparemeters voor de standaardberg berekenen:

$$R_{a-s} = R_{a-n}/A, \quad R_{q-s} = R_{q-n}/Q, \quad K_{u-s} = K_{u-n}/K$$

Nemen we een (op 20 fracties gediscrètiseerde) α -normale verdeling, ($\alpha = S/\mu$) dan zijn de factoren uit onderstaande tabel toepasbaar:

α	A_α	Q_α	K_α	Sf
0.010	1.000113	1.000169	1.000450	1.000
0.020	1.000450	1.000675	1.001797	1.000
0.030	1.001013	1.001518	1.004033	1.000
0.040	1.001801	1.002697	1.007146	1.000
0.050	1.002813	1.004211	1.011116	1.000
0.060	1.004051	1.006059	1.015922	1.000
0.070	1.005514	1.008238	1.021535	1.000
0.080	1.007202	1.010746	1.027924	1.000
0.090	1.009116	1.013581	1.035054	1.000
0.100	1.011254	1.016741	1.042886	1.000
0.200	1.045015	1.065386	1.149885	1.000
0.300	1.101285	1.141864	1.277142	1.000
0.400	1.180062	1.241042	1.391572	1.000
0.500	1.258227	1.345874	1.506937	1.018
1.000	1.772632	1.967669	1.796127	1.199

Tabel 2.1 - Omrekeningsfactoren voor R_a , R_q , K_u

Er is een poging gedaan deze "functies" van α exponentieel te benaderen, maar daar dit jammerlijk mislukte zullen we het met voorgaande tabel moeten doen.

Overigens is S_f gelijk aan $(1/N)\sum \Delta_i$. Dit zou bij een normale verdeling -onafhankelijk van $\alpha - 1$ moeten opleveren. Te zien is dat dit voor grote α niet meer klopt. De oorzaak is eenvoudig: Voor grote α wordt $\Delta_i (= 1 + \alpha \cdot x_i)$ negatief. Aangezien we een negatieve berg beschouwen als een dal waarbij ook een spiegelbeeld, berg, hoort, sommeren we in S_f dus niet Δ_i , maar $|\Delta_i|$ hetgeen tot voornoemde afwijking in S_f leidt.

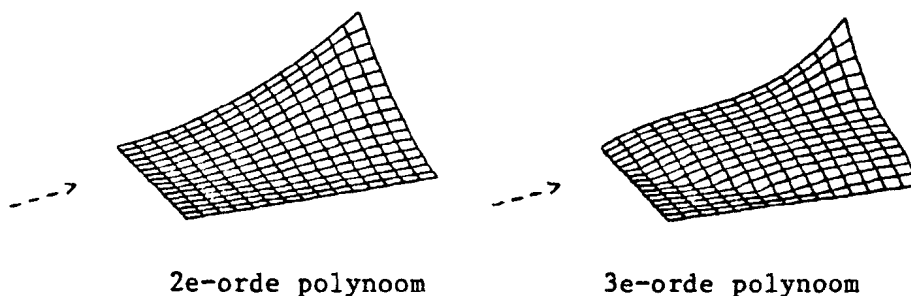
II-5 - De standaardberg

Nu rest ons nog het bepalen van de flankvorm van de standaardberg uit R_a -s, R_q -s en K_u -s.

In bijlage 3 worden een 2e en 3e orde polynoom berekend uit B , T , R_a respectievelijk B , T , R_a , R_q . Dit is gedaan voor de reeds eerder gebruikte wiskundige functies en ook voor 16 plaatmaterialen van Hoogovens. (In het laatste geval voor de standaardberg, dus S, μ -gecorrigeerd).

Uit de resultaten blijkt het volgende:

- a- Beide functies hebben een beperkt gebied waarbinnen een niet-dalende functie te realiseren is die aan gestelde voorwaarden (m.b.t. ruwheidsparameters) voldoet: De $(\sin^{-1})^2$ (F1) en $\sqrt{\sin^{-1}}$ (F5) passen in geen van de polynomen; de \sin (F4) past niet in het 3e-orde polynoom. Van de hoogovensmaterialen passen er slechts 2 niet, d.w.z. niet in de 2e-orde benadering.
- b- Sommige derde orde "fits" zien er zeer onrealistisch uit, zie figuur 2-2 (een 2e- en 3e-orde fit voor Hoogovenmateriaal A).



Figuur 2-2 - Benaderde flankvormen

- c- De kurtosis wordt door geen van beide fits echt goed benaderd.

Naar aanleiding van punt c zijn in tabel 2-3 voor de hoogovensmaterialen invoer (dus gewenste R_a, R_q, K_u), en relatieve afwijking van de benaderingen naast elkaar gezet. (Uitgebreider te zien in bijlage 3) Het blijkt dat de 2e-orde fit een iets betere benadering voor de K_u geeft dan de 3e-orde fit, maar daartegenover staan de afwijkingen in R_q voor de 2-orde fit (in de orde van 5%), die in de 3e-orde natuurlijk niet voorkomen.

No	Top [um]	B [um]	Ra [um]	Rq [um]	Ku [-]	alf [-]	Rq2/Rq [-]	Ku2/Ku [-]	Ku3/Ku [-]
HO-A	3.60	58	1.32	1.57	2.55	.04	1.08	0.99	0.97
HO-B	2.65	39	0.96	1.17	2.75	.06	1.05	0.93	0.93
HO-C	2.70	33	1.04	1.26	2.61	.10	1.04	0.92	0.90
HO-D	1.80	33	0.65	0.83	2.75	.11	1.02	0.92	0.92
HO-E	3.40	40	1.31	1.57	2.46	.06	1.05	0.97	0.95
HO-F	3.80	42	1.51	1.81	2.50	.09	1.04	0.92	0.91
HO-G	3.55	38	1.41	1.69	2.33	.10	1.04	0.99	0.97
HO-H	4.45	37	1.68	2.02	2.45	.05	1.05	1.00	0.98
HO-I	4.80	65	1.78	2.14	2.37	.02	1.06	1.05	1.03
HO-J	5.30	62	1.93	2.35	2.59	.03	1.06	0.98	0.97
HO-K	5.65	61	2.06	2.51	2.57	.04	1.05	0.99	0.98
HO-L	5.45	58	2.06	2.49	2.42	.04	1.05	1.01	0.99
HO-M	7.20	84	2.32	2.95	3.33	.02	nf	nf	0.89
HO-N	8.65	102	3.08	3.84	2.98	.02	1.04	0.86	0.87
HO-O	11.05	96	3.64	4.66	3.44	.01	nf	nf	0.83
HO-P	12.10	105	4.46	5.52	2.72	.01	1.03	0.92	0.92

N.B nf betekent: Geen fit mogelijk (no fit)

Tabel 2-3 - Numerieke resultaten curve-fitting

Al het voorgaande beschouwende lijkt het het meest realistisch de 2e orde fit toe te passen indien dit mogelijk is, waarbij we de niet exacte Rq-waarde voor lief nemen tegenover het realistische profiel, en de betere Ku-waarden. In geval van nood (indien geen 2e-orde fit voldoet) zullen we de 3e-orde fit toepassen.

II-6 - Golving

Het laatste verschijnsel waar we mee te maken krijgen is het feit dat er vaak langgolfige hoogtevariatiën voorkomen in het ruwheidsprofiel, golving. Doordat deze golving door filtering van het R-profiel gescheiden wordt beïnvloedt dit niet de ruwheidsparameters, maar wel de vrijloop van individuele bergen, en dus de draagkracht van het profiel. Hier zullen we dus rekening mee moeten houden.

Hoe we deze golving zullen verrekenen zal sterk afhangen van gemiddelde golflengte en amplitude daarvan. Indien bijvoorbeeld de golflengte in de orde ligt van de lengte en breedte van het contactoppervlak, zullen we er vrijwel geen invloed aan hoeven toe te kennen. Is echter $\lambda^2 \ll A_c$ (Contactoppervlak), dan zullen dit zeker mee moeten nemen in onze berekeningen.

Zoals voorgesteld denken we ons een ruwheidsprofiel opgebouwd uit een herhaling van een set (naar hoogte normaal verdeelde) standaardbergen. De golving kunnen we nu, indien nodig, verrekenen door niet uit te gaan van 1 set van N bergen, maar een herhaling van M sets van N bergen. Deze M sets ontstaan door aan de eerste set - normaal verdeelde - supplementaire vrijlopen toe te voegen. Deze verdeling zullen we op de een of andere manier uit een registratie van het golfprofiel (W-profiel) moeten halen.

Indien we het W-profiel kunnen verwerken als het R-profiel (op de TUE mogelijk), dan geldt als redelijke benadering:

$$y(Ho) = \bar{Ho} = Wy/2 \quad [um] \quad -6-$$

$$S(Ho) = Wq \quad [um] \quad -7-$$

Nemen we bijvoorbeeld $N = M = 6$ dan zouden de zes sets van de volgende supplementaire vrijlopen moeten worden voorzien: (tabel 2-4)

Set no	Ho (supp)	(Berekening)
1	0	$Ho(max) = Wy + 1,65xWq$
2	$0.95 Wq$	$Ho = Homax - (Wy + 0,705xWq)$
3	$1.43 Wq$	$Ho = Homax - (Wy + 0,220xWq)$
4	$1.87 Wq$	$Ho = Homax - (Wy - 0,220xWq)$
5	$2.36 Wq$	$Ho = Homax - (Wy - 0,705xWq)$
6	$3.30 Wq$	$Ho = Homax - (Wy - 1.650xWq)$

Tabel 2-4 - Vrijloop-verdeling bij golving

Indien we nu voor een ruwheidsprofiel de gemiddelde druk (= draagkracht) willen uitrekenen moeten we de druk boven 36 (6x6) bergen berekenen. Dat is veel werk. Het is te hopen dat dit aantal te verminderen is, bijvoorbeeld door verbanden tussen druk en vrijloop wiskundig vast te leggen of te benaderen. In een volgend deelverslag, een soort verkenning voor de uit te voeren experimenten, zullen we dit nader bezien.

Literatuurverwijzing

=====

- [1] Handleiding bij ruwheidsmeter "Hommeltester" (Hommel)
- [2] Handleiding bij ruwheidsmeter "Perthometer" (Perthen)
- [3] DIN-norm DIN 4762/1 E - DIN 10-'86
(= [7] met DIN-kanttekeningen)
- [4] DIN-norm DIN 4768/1 - DIN 08-'74
- [5] DIN-norm DIN 4776 E - DIN 11-'85
- [6] DIN-norm DIN 7471 - DIN
- [7] ISO/DIS-norm ISO/DIS 4287/1 E - ISO/DIS '84
- [8] DB-norm N31007 - Daimler Benz
- [9] Euronorm 49-83 E - Euronorm
- [10] Numeriek oplossen van de Reynoldsvergelijking voor microscopi-
sche oppervlakte-elementen - W.P.Vermeulen
WPA-0396

Lijst van veel gebruikte symbolen

		standaard eenheid
A	= verdelingsfactor t.g.v. spreiding in tophoogte	-
$A\alpha$	= schalingsfactor van R_a a.g.v.	-
B	= basisbreedte van het bergprofiel	[um]
G	= factor m.b.t. golving van het ruwheidsprofiel	-
$h(x,y)$	= berghoogte ter plaatse (x,y) t.o.v. het grondvlak	[um]
$H(x,y)$	= afstand van de berg tot het tegenloopvlak in (x,y)	[um]
H_o	= vrijloop van de top	[um]
H_p	= plafondhoogte = $T + H_o$	[um]
H_r	= relatieve vrijloop = H_o/T	-
K_u	= kurtosis (ruwheidsparameter)	-
L_r	= profiellengteverhouding (ruwheidsparameter)	%
p	= druk	[N/mm ²]
P_a, P_q	= ruwheidsparameters t.o.v. het P-profiel	[um]
R_a, R_q	= ruwheidsparameters t.o.v. het R-profiel	[um]
S	= standaardafwijking van een normale verdeling	divers
S_m	= gemiddelde piekafstand (ruwheidsparameter)	[um]
T	= tophoogte van het bergprofiel	[um]
V	= snelheid	[m/s]
W_y, W_q	= ruwheidsparameter t.o.v. het W-profiel	[um]
ξ	= relatieve factor vij normale verdeling	-
α	= verdelingsparameter voor normale verdeling	-
$\Delta a, \Delta q$	= hellingsparameters van een ruwheidsprofiel	-
Δi	= lineaire schalingsfactor	-
ΔA_i	= oppervlaktefractie	-
η	= dynamische viscositeit	[Ns/m ²]
Φ	= cumulatieve kans c.q. debiet	[-] cq [m ³ /s]
λ_a, λ_q	= golflengteparameters van een ruwheidsprofiel	[um]
λ_{co}	= "Cut-off"-golflengte bij ruwheidsmetingen	[um]
μ	= wrijvingscoefficient (c.q. gemiddelde)	-
ν	= kinematische viscositeit	[cSt]
τ	= schuifspanning	[N/mm ²]

Veel gebruikte indices:

b	: de berg betreffend
d	: het dal betreffend
gem	: gemiddeld
max	: maximaal
n	: de normale verdeling betreffend
o	: referentiegrootheid
s	: standaard

Bijlage I - Ruwheidsparameters van wiskundige functies

1-1 Inleiding

We hebben 6 functies uitgekozen, zodanig genormeerd dat voor iedere functie geldt: Tophoogte = $y(L/4) = A$ en $B/2 =$ halve basisbreedte = $1/4$ golflengte = $L/4$.

Dan:

$$F1: Y = (4A/\bar{u}^2) [\sin^{-1}(4X/L)]^2$$

$$F2: Y = (2A/\bar{u}) [\sin^{-1}(4X/L)]$$

$$F3: Y = (A)[4X/L] \quad \text{voor } -L/4 \leq X \leq L/4 \quad (\text{Driehoek})$$

$$F4: Y = (A)[\sin(2\bar{u} X/L)]$$

$$F5: Y = (A)[\sin(2\bar{u} X/L)]^{1/2}$$

$$F6: \begin{aligned} Y &= 1 \quad \text{voor } 2z < X < 2z+1; & z &\in \mathbb{Z} \\ Y &= 0 \quad \text{voor } X=z \\ Y &= -1 \quad \text{voor } 2z-1 < X < 2z & & (\text{blok}) \end{aligned}$$

Van deze functies willen we de volgende ruwheidsparameters berekenen: R_a , R_q , K_u , Δ_a , Δ_q , λ_a , λ_q , L_r .

Voor zover mogelijk zullen deze berekeningen analytisch gebeuren (in 1-2), en in ieder geval numeriek (in 1-3), zodat de analytisch verkregen resultaten gecontroleerd kunnen worden.

Pogingen om L_r analytisch te berekenen zijn overigens niet ondernomen, daar het wel toevallig zou zijn indien die integraal op die manier oplosbaar zou zijn (integrand = $\{1 + [dy/dx]^2\}^{1/2}$!).

1-2 Analytische berekeningen

Vaak wordt geïntegreerd van 0 tot $L/4$, zodat de substitutie $t = 4x/L$ erg handig is, dx gaat dan over in $dt \cdot L/4$

F1 - Arcsinus-kwadraat (m.b.v. standaard-integraal uit CRC-handboek)

$$\begin{aligned} R_a &= (4A/\bar{u}^2) \int_0^1 |(\sin^{-1}t)^2| dt = (4A/\bar{u}^2) [t(\sin^{-1}t)^2 - 2t + 2\sqrt{1-t^2} \sin^{-1}t] \Big|_{t=0}^1 \\ &= A \cdot [1 - 8/\bar{u}^2] = A(0.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_q &= [(16A^2/\bar{u}^4) \int_0^1 (\sin^{-1}t)^4 dt]^{1/2} \\ &= (4A/\bar{u}^2) \cdot \left[\left\{ t(\sin^{-1}t)^4 + 4\sqrt{1-t^2} (\sin^{-1}t)^3 \right\} \Big|_{t=0}^1 \right] - (3\bar{u}^2/A) R_a \Big]^{1/2} \\ &= A \cdot [1 - 48/\bar{u}^2 + 384/\bar{u}^4]^{1/2} = A(0.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Ku &= [4A/\bar{n}^2 Rq]^4 \int_{t=0}^1 (\sin^{-1}t)^8 dt = (\text{na enig rekenwerk}) \\
 &= \frac{[1-56(2/\bar{n})^2 + 168\{(2/\bar{n})^4 - 12(2/\bar{n})^6 + 24(2/\bar{n})^8\}]}{[1-48/\bar{n}^2 + 384/\bar{n}^4]^2} = 4.34
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta a &= (\text{Bijzonder: } \int_{x=a}^b |(dy/dx)| dx = y(x) \Big|_{x=a}^b \text{ voor functies die dif-} \\
 & \hspace{15em} \text{ferentieerbaar en} \\
 & \hspace{15em} \text{monotoon niet-dalend zijn op [a,b])} \\
 &= A.(4/L) \text{ voor alle gebruikte functies, behalve F6.}
 \end{aligned}$$

Δq = een oneigenlijke integraal (Integrand bestaat niet op het gehele interval). Geen convergentie bekend.

$$\lambda_a = 2\bar{n} Ra / \Delta a = 2\bar{n} A(1-8/\bar{n}^2) / (4A/L) = 0.30 L$$

F2 - Arcsinus (met dezelfde standaard-integralen)

$$\begin{aligned}
 Ra &= (2A/\bar{n}) \int_{t=0}^1 |\sin^{-1}t| dt = (2A/\bar{n}) [t \cdot \sin^{-1}t + \sqrt{1-t^2}] \Big|_{t=0}^1 \\
 &= A.[1 - 2/\bar{n}] = A(0.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Rq &= [(4A^2/\bar{n}^2) \int_{t=0}^1 (\sin^{-1}t)^2 dt]^{1/2} \\
 &= [(4A^2/\bar{n}^2) \{t(\sin^{-1}t)^2 - 2t + 2\sqrt{1-t^2} \sin^{-1}t\} \Big|_{t=0}^1]^{1/2} \\
 &= A \sqrt{1-8/\bar{n}^2} = A(0.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Ku &= (2A/\bar{n} Rq)^4 \int_{t=0}^1 (\sin^{-1}t)^4 dt \\
 &= (2A/\bar{n} Rq)^4 \left[\{t(\sin^{-1}t)^4 + 4\sqrt{1-t^2}(\sin^{-1}t)^3\} \Big|_{t=0}^1 - 12 \int_{t=0}^1 (\sin^{-1}t)^2 dt \right] \\
 &= [\bar{n}^4 - 48\bar{n}^2 + 384] / [(\bar{n}^2 - 8)^2] = 2.19
 \end{aligned}$$

$$\Delta a = 4A/L$$

Δq = weer een oneigenlijke integraal, die echter wel te benaderen lijkt:

$$\begin{aligned}
 &= [(16A^2/\bar{n}^2 L) \int_{t=0}^1 \{d/dx(\sin^{-1}t)\}^2 dx]^{1/2} \\
 &= [(16A^2/\bar{n}^2 L) \{(4/L)(\tanh^{-1}t) \Big|_{t=0}^1\}^{1/2}]^{1/2} = (4A/L) 1.85
 \end{aligned}$$

$$\lambda_a = (\bar{n}/2 - 1) \cdot L = L(0.57)$$

$$\lambda_q = L(1.50)$$

F3 - Driehoek

$$Ra = (4/L) \int_{x=0}^{L/4} |y| dx = (8A/L^2) [x^2]_{x=0}^{L/4} = A/2$$

$$Rq = [(4/L) \int_{x=0}^{L/4} y^2 dx]^{1/2} = [(64A^2/3L^3)(x^3)_{x=0}^{L/4}]^{1/2} = A/\sqrt{3} = A(0.58)$$

$$Ku = [(4/LRq^4) \int_{x=0}^{L/4} y^4 dx] = (32A^4/5Rq^4 L^5)(x^5)_{x=0}^{L/4} = 9/5 = 1.8$$

$$\Delta a = 4A/L$$

$$\Delta q = [(4/L) \int_{x=0}^{L/4} (dy/dx)^2 dx]^{1/2} = [(64A^2/L^3)(x)_{x=0}^{L/4}]^{1/2} = 4A/L$$

$$\lambda_a = 2\bar{u}(A/2)/(4A/L) = \bar{u}L/4 = L(0.79)$$

$$\lambda_q = 2\bar{u}(A/\sqrt{3})/(4A/L) = \bar{u}L/2\sqrt{3} = L(0.91)$$

F4 - Sinus (i.v.m. eenvoud slechts beperkte uitwerking)

$$Ra = (2/\bar{u})A = A(0.64)$$

$$Rq = (1/\sqrt{2})A = A(0.71)$$

$$Ku = (\text{iets minder eenvoudig}) = 3/2 = 1.5$$

$$\Delta a = 4A/L$$

$$\Delta q = \sqrt{2} \bar{u} A/L = (4A/L)1.11$$

$$\lambda_a = L \quad \lambda_q = L$$

F5 - Wortel sinus

Ra = analytisch niet mogelijk

$$Rq = A\sqrt{2/\bar{u}} = A(0.80)$$

$$Ku = \bar{u}^2/8 = 1.23$$

$$\Delta a = 4A/L$$

Δq = oneigenlijke integraal

Ra en Δq ontbreken, dus λ_a en λ_q zijn niet te berekenen.

F6 - Blokgolf (ook vrij eenvoudig)

$$Ra = A ; Rq = A ; Ku = 1$$

$$\Delta a = 4A/L$$

$$\Delta q = [(4A/L) \int_{x=0}^{4/L} \{\delta(0)\}^2 dx]^{1/2} = ?$$

$$\lambda_a = 2\bar{u}(A)/(4A/L) = (\bar{u}/2)L = (1.57)L$$

1-3 Numerieke integratie

In het programma (dat hierna volgt) zijn de volgende betrekkingen gebruikt: (midpoint-methode, 10000 stappen)

X-Domein: [stap/2 , (L/4)-stap/2]

$$Ra = (1/N) \sum |Y(Xi)|$$

$$Rq = [(1/N) \sum \{Y(Xi)\}^2]^{1/2}$$

$$Ku = [(1/N) \sum \{Y(Xi)\}^4] / Rq^4$$

$$\Delta a = (1/N) \sum | \{Y(Xi+stap/2) - Y(Xi-stap/2)\} / stap |$$

$$\Delta q = [(1/N) \sum [\{Y(Xi+stap/2) - Y(Xi-stap/2)\} / stap]^2]^{1/2}$$

$$Lr = (\text{pythagoras}) [\sum (\Delta^2 + dy^2)^{1/2}] / (L/4)$$

Uitvoer:

	Ra	Rq	Ku	Da	Dq	La	Lq	Lr
arcsin**2	0.189	0.281	4.342	1.000	2.906	0.298	0.152	1.597
arcsinus	0.363	0.435	2.194	1.000	1.674	0.571	0.408	1.464
driehoek	0.500	0.577	1.800	1.000	1.000	0.785	0.907	1.414
sinus	0.637	0.707	1.500	1.000	1.111	1.000	1.000	1.464
sinus**.5	0.763	0.798	1.234	1.000	2.210	1.198	0.567	1.549
blok	1.000	1.000	1.000	1.000	100.000	1.571	0.016	2.000

Programma: (Ruwheid/modfun/1; in Fortran IV)

```
FILE 11(KIND=DISK,TITLE="UITVOER/RUWHEID/MODFUN/1")
      IMPLICIT REAL(A-H,O-Z), INTEGER(I-N)
      DIMENSION RA(6),RQ(6),RKU(6),DA(6),DQ(6),WA(6),WQ(6),TEKST(6,2),
      /          SLEN(6)
```

C

```
      PI=4.*ATAN(1.)
      N=10000
      RN=FLOAT(N)
      DELT=1./RN
      DE2=DELT/2
      X=-DE2
      DO 10 I=1,6
         RA(I)=0.
         RQ(I)=0.
         RKU(I)=0.
         DA(I)=0.
         DQ(I)=0.
         SLEN(I)=0.
```

```
10 CONTINUE
```

C

Bijlage 2 - Berekening verdelingsparameters

=====

We hebben al afgeleid:

$$A_{\alpha} = \sum R_i^2 / \sum R_i$$

$$Q_{\alpha} = [\sum R_i^3 / \sum R_i]^{1/2}$$

$$K_{\alpha} = \sum R_i^5 \cdot \sum R_i / (\sum R_i^3)^2$$

Verdelen we $\varphi(x)$ in twintig intervallen met elk een fractie 1/20, dan krijgen we: (we stellen $\varphi(x) = 0$ indien $\varphi(x) < 0.001$)

$\varphi(x)$	$U (= \{x-\mu\}/S)$	f	$X_i (= \bar{U})$
0.001	-3.090		
		0.05	-2.3675
0.05	-1.645		
		0.05	-1.4625
0.10	-1.280		
		0.05	-1.1600
0.15	-1.035		
		0.05	-0.9400
0.20	-0.840		
		0.05	-0.7575
0.25	-0.675		
		0.05	-0.6000
0.30	-0.525		
		0.05	-0.4550
0.35	-0.385		
		0.05	-0.3175
0.40	-0.250		
		0.05	-0.1875
0.45	-0.125		
		0.05	-0.0625
0.50	0		
Vervolgens spiegelen rond 0			

M.b.v. het nierna bijgevoegde programma (ruwheid/modfun/l/norm) in Fortran IV kunnen we nu zelf eenvoudig A, Q en K bepalen voor diverse waarden van α .

Uitvoer: (gedeeltelijk)

Alfa	Ca	Cq	Ck	Ln(Ca)	Ln(Cq)	Ln(Ck)	Sf
0.002	1.000005	1.000007	1.000018	0.000005	0.000007	0.000018	1.000
0.003	1.000010	1.000015	1.000041	0.000010	0.000015	0.000041	1.000
0.005	1.000028	1.000042	1.000113	0.000028	0.000042	0.000113	1.000
.							.
.							.
.							.
.							.

```

.
.
.
0.900  1.663530 1.838118 1.763009  0.508942 0.608742 0.567022  1.149
1.000  1.772632 1.967669 1.796127  0.572466 0.676849 0.585633  1.199

```

Alfa-domein : [0.050-0.300]

```

Ca = 0.9904 * (Alfa ** -0.0103)      R =0.042
Cq = 0.9866 * (Alfa ** -0.0145)      R =0.057
Ck = 0.9745 * (Alfa ** -0.0304)      R =0.108

```

Programma:

```

FILE 11(KIND=DISK,TITLE="UITVOER/RUWHEID/MODFUN/1/NORM")
IMPLICIT REAL(A-H,O-Z), INTEGER(I-N)
DIMENSION ALF(22),EALF(22),SOM(22),XREL(10),ALFY(3,22),TEX(3),
/      EALFY(3,22),SOMY(3),SOMY2(3),SOMXY(3),A(3),B(3),S(3)
C =====
C Initieren
  DELT=0.05
  XREL(1)=2.3675
  XREL(2)=1.4625
  XREL(3)=1.16
  XREL(4)=0.94
  XREL(5)=0.7575
  XREL(6)=0.6
  XREL(7)=0.455
  XREL(8)=0.3175
  XREL(9)=0.1875
  XREL(10)=0.0625
  ALF(1)=0.002
  ALF(2)=0.003
  ALF(3)=0.005
  DO 50 I=1,10
    ALF(I+3)=FLOAT(I)*0.01
    ALF(I+12)=FLOAT(I)*0.1
50  CONTINUE
  TEX(1)="a"
  TEX(2)="q"
  TEX(3)="k"
  DO 70 J=1,22
    DO 60 I=1,3
      ALFY(I,J)=0.
60  CONTINUE
  SOM(J)=0.
70  CONTINUE
  SOMX=0.
  SOMX2=0.
  N=0
  K=8
  L=15
  DO 80 I=1,3
    SOMY(I)=0.
    SOMY2(I)=0.
    SOMXY(I)=0.
80  CONTINUE
C =====

```

C Sommatiegedeelte

```

DO 200 I=1,22
  AC=ALF(I)
  DO 100 J=1,10
    X1=ABS(1.-XREL(J)*AC)
    X2=1.+XREL(J)*AC
    SOM(I)=SOM(I)+(X1+X2)*DELT
    ALFY(1,I)=ALFY(1,I)+(X1**2+X2**2)*DELT
    ALFY(2,I)=ALFY(2,I)+(X1**3+X2**3)*DELT
    ALFY(3,I)=ALFY(3,I)+(X1**5+X2**5)*DELT
100  CONTINUE
    ALFY(3,I)=(ALFY(3,I)*SOM(I))/(ALFY(2,I)**2)
    ALFY(1,I)=ALFY(1,I)/SOM(I)
    ALFY(2,I)=SQRT(ALFY(2,I)/SOM(I))
    EALF(I)=ALOG(ALF(I))
    DO 110 J=1,3
      EALFY(J,I)=ALOG(ALFY(J,I))
110  CONTINUE
    IF ((I.LT.K).OR.(I.GT.L)) GOTO 190
    N=N+1
    SOMX=SOMX+EALF(I)
    SOMX2=SOMX2+EALF(I)**2
    DO 120 J=1,3
      SOMY(J)=SOMY(J)+EALFY(J,I)
      SOMY2(J)=SOMY2(J)+EALFY(J,I)**2
      SOMXY(J)=SOMXY(J)+EALF(I)*EALFY(J,I)
120  CONTINUE
190  CONTINUE
200  CONTINUE

```

```

C =====

```

C Kleinste kwadraten

```

DELER=SOMX2-SOMX**2
DO 210 J=1,3
  A(J)=(SOMXY(J)-SOMY(J)*SOMX)/DELER
  BH=SOMY(J)-A(J)*SOMX
  H=(A(J)**2)*SOMX2+SOMY2(J)+BH**2+2.*A(J)*BH*SOMX-2.*BH*SOMY(J)-
/
  2.*A(J)*SOMXY(J)
  B(J)=EXP(BH)
  S(J)=SQRT(H/FLOAT(N-2))
210 CONTINUE

```

```

C =====

```

C Printen

```

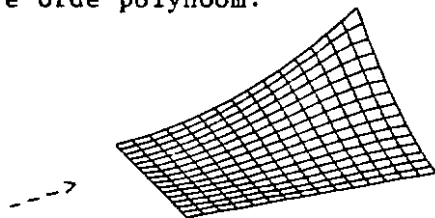
WRITE(11,300)
300  FORMAT(" Alfa",7X,"Ca",7X,"Cq",7X,"Ck",7X,"Ln(Ca)  Ln(Cq)  ",
/
  "Ln(Ck)      Sf",/)
DO 320 I=1,22
  WRITE(11,310)ALF(I),(ALFY(J,I),J=1,3),(EALFY(J,I),J=1,3),SOM(I)
310  FORMAT(F6.3,2X,3F9.6,1X,3F9.6,2X,F6.3)
320  CONTINUE
  WRITE(11,330)ALF(K),ALF(L)
330  FORMAT(1X,//,"Alfa-domein :  [",F5.3,"-",F5.3,"]",/)
DO 350 I=1,3
  WRITE(11,340)TEX(I),B(I),A(I),S(I)
340  FORMAT("      C",A1," = ",F9.4," * (Alfa **",F8.4,")",8X,"R =",
/
  F5.3,)
350  CONTINUE
CLOSE(11,DISP=CRUNCH)
STOP
END

```

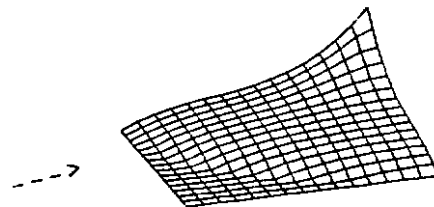
3-1 - Overzicht van de benaderde functies

No	< INVOER					alf	> UITVOER			
	Top	B	Ra	Rq	Ku		Rq	Ku	Heltop	Heldal
F1	1.00	2.	0.189	0.281	4.342		Geen oplossing uit Rq Stijgende functie			
	2-e orde polynoom:									

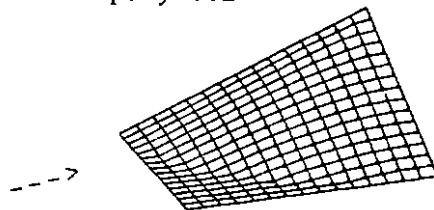
F2 1.00 2. 0.363 0.435 2.194
2-e orde polynoom:



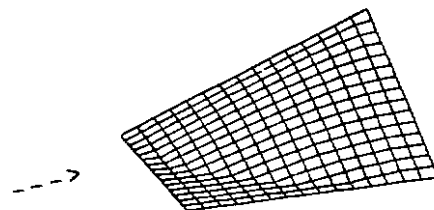
2.502 2.867 1.223
0.468 2.543 1.822 0.178



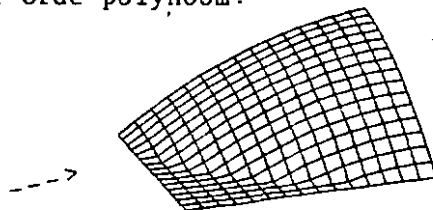
F3 1.00 2. 0.500 0.577 1.800
2-e orde polynoom:



1.798 1.012 1.012
0.577 1.800 1.000 1.000



F4 1.00 2. 0.637 0.707 1.500
2-e orde polynoom:



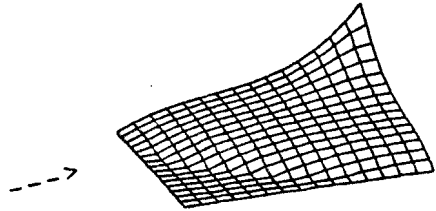
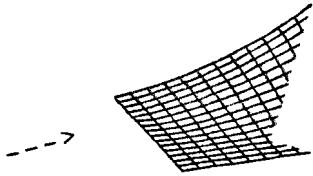
Stijgende functie
0.702 1.469 0.178 1.822

F5 1.00 2. 0.763 0.798 1.234
2-e orde polynoom:

Stijgende functie
Stijgende functie

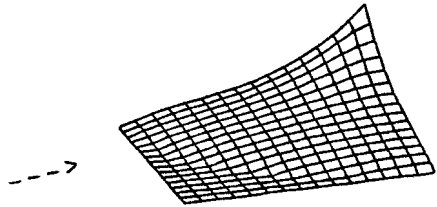
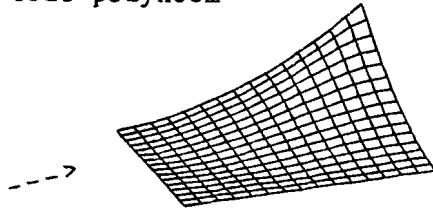
HO-A 3.60 58 1.318 1.569 2.552 .04
 2-e orde polynom

2.466 0.361 0.162
 1.692 2.520 0.2239 0.02441



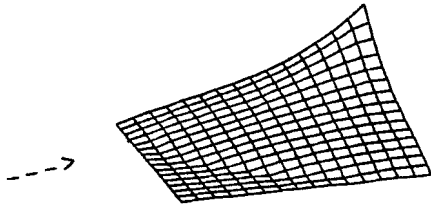
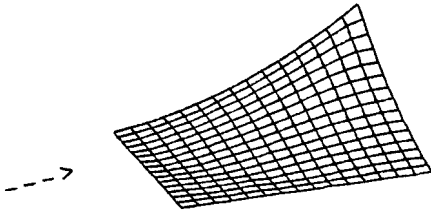
HO-B 2.65 39 0.956 1.173 2.746 .06
 2-e orde-polynom

2.546 0.347 0.120
 1.235 2.560 0.2494 0.02236



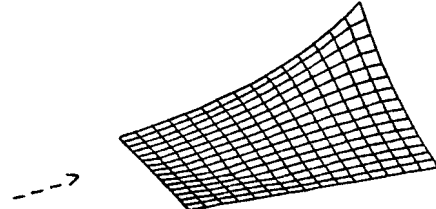
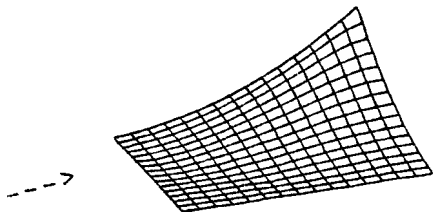
HO-C 2.70 33 1.038 1.259 2.608 .10
 2-e orde polynom:

2.356 0.364 0.137
 1.306 2.390 0.2771 0.05018



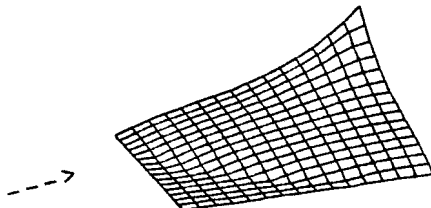
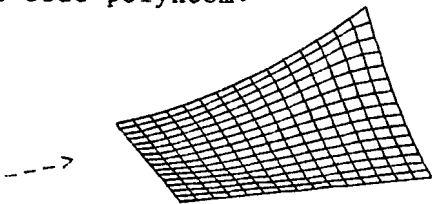
HO-D 1.80 33 0.653 0.826 2.752 .11
 2-e orde polynom:

2.543 0.227 0.047
 .8418 2.545 0.1989 0.01927



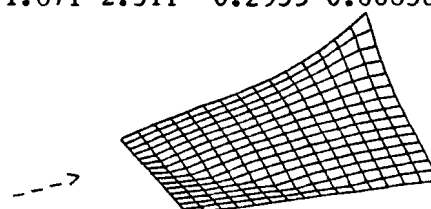
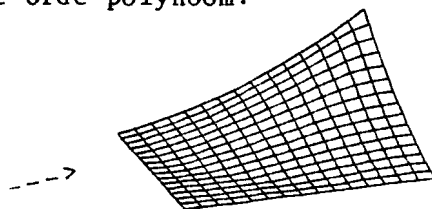
HO-E 3.40 40 1.305 1.570 2.461 .06
 2-e orde polynom:

2.349 0.402 0.165
 1.642 2.394 0.2885 0.05150



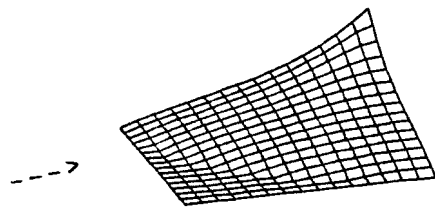
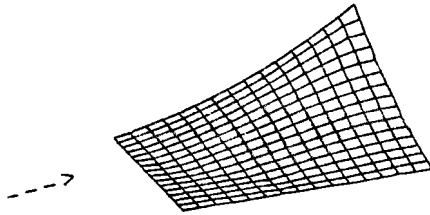
HO-F 3.80 42 1.506 1.805 2.502 .09
 2-e orde polynom:

2.265 0.393 0.168
 1.871 2.311 0.2935 0.06838



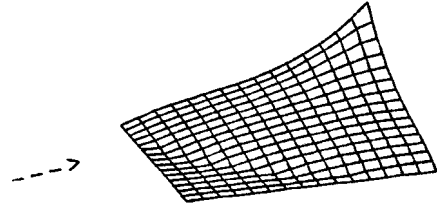
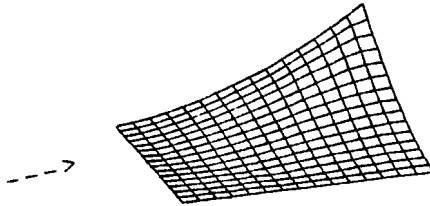
HO-G 3.55 38 1.414 1.692 2.330 .10
 2-e orde polynom:

2.250 0.404 0.176
 1.754 2.298 0.3008 0.07284



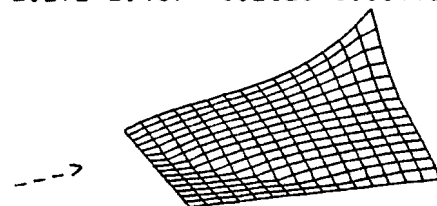
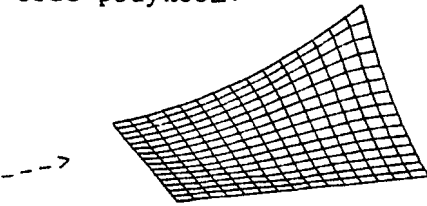
HO-H 4.45 37 1.675 2.021 2.453 .05
 2-e orde polynom:

2.405 0.595 0.238
 2.125 2.445 0.4189 0.06216



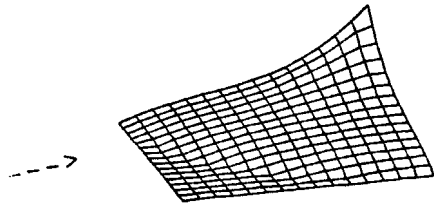
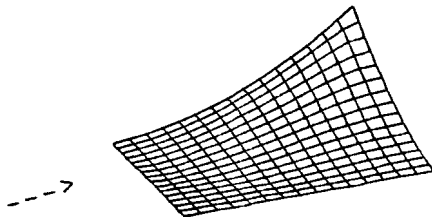
HO-I 4.80 65 1.779 2.139 2.367 .02
 2-e orde polynom:

2.444 0.391 0.162
 2.272 2.487 0.2623 0.06305



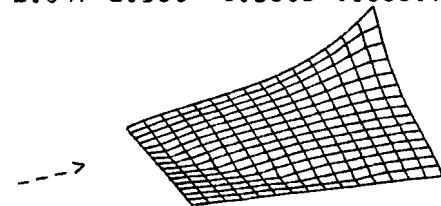
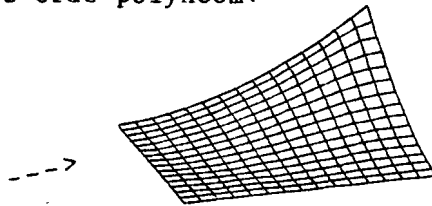
HO-J 5.30 62 1.928 2.346 2.590 .03
 2-e orde polynom:

2.513 0.446 0.167
 2.482 2.537 0.3107 0.03123



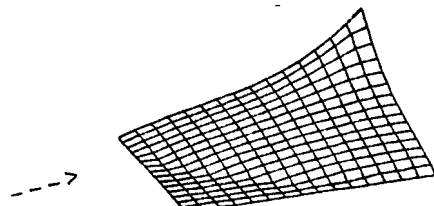
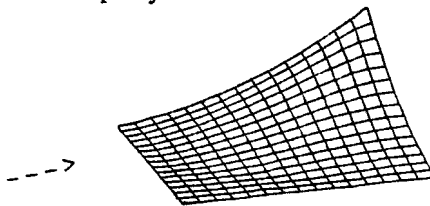
HO-K 5.65 61 2.056 2.513 2.572 .04
 2-e orde polynom:

2.516 0.471 0.168
 2.647 2.536 0.3365 0.03397



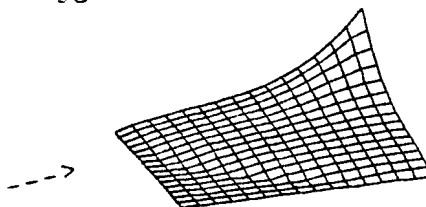
HO-L 5.45 58 2.056 2.493 2.423 .04
 2-e orde polynom:

2.405 0.447 0.170
 2.606 2.440 0.3263 0.04952



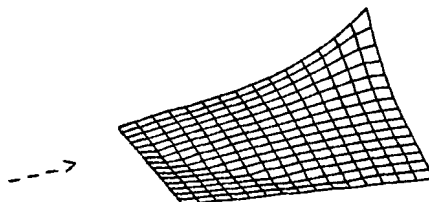
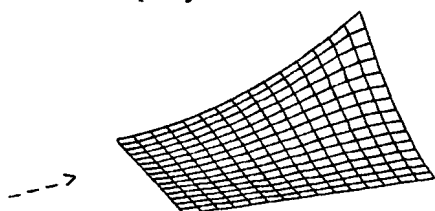
HO-M 7.20 84 2.319 2.948 3.334 .02
 2-e orde polynoom:

2.956 0.506 0.140
 Stijgende functie



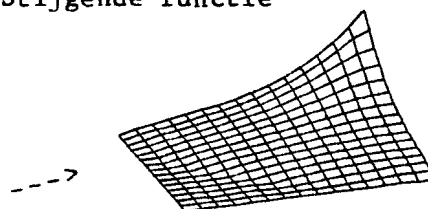
HO-N 8.65 102 3.079 3.837 2.975 .02
 2-e orde polynoom:

2.596 0.413 0.120
 4.003 2.569 0.3162 0.02302



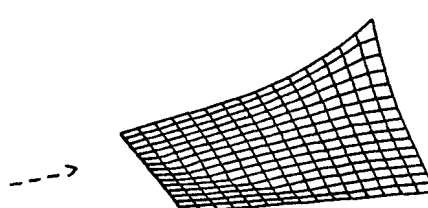
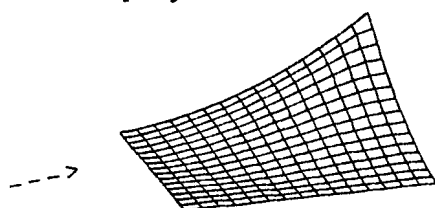
HO-O 11.05 96 3.640 4.659 3.438 .01
 2-e orde polynoom:

2.862 0.617 0.146
 Stijgende functie



HO-P 12.10 105 4.459 5.519 2.719 .01
 2-e orde polynoom:

2.489 0.520 0.156
 5.709 2.502 0.4123 0.04865



3-2 - Bepaling polynoom door ruwheidsparameters

2e orde polynoom

Een tweede orde polynoom heeft 3 vrijheidsgraden, a, b, c:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

We kunnen in principe dus drie ruwheidsparameters 'verwerken' in dit polynoom. Twee 'musts' zijn de breedte van de berg ($y(B/2)=0$), en de tophoogte van de berg ($y(0)=T$). Dit laat ons nog de vrijheid een echte ruwheidsparameter te kiezen. We nemen in principe R_a , daar deze voorlopig het belangrijkste lijkt. De afleiding van de coëfficiënten gaat dan als volgt:

$$\begin{aligned} 1- \quad y(0) = T & \quad \rightarrow \quad c = T \quad \text{dus} \quad y = a \cdot x^2 + b \cdot x + T \\ 2- \quad y(B/2) = 0 & \quad \rightarrow \quad a(B^2/4) + bB/2 + T = 0 \\ & \quad \leftarrow \quad a = (-4/B^2)(T + bB/2) = (-2/B)(2T/B + b) \quad -A- \\ 3- \quad \int_0^B |y| \cdot dx = R_a & \quad \rightarrow \quad (2/B)[(a/3)(B^3/8) + (b/2)(B^2/4) + TB/2] = R_a \\ & \quad \leftarrow \quad (aB^2/12) + (bB/4) + T = R_a \\ & \quad \leftarrow \quad a = (12/B^2)(R_a - T - bB/4) \quad -B- \\ A \wedge B & \quad \rightarrow \quad 3b/2 + 6T/B - 6R_a = 2T/B + b \\ & \quad \leftarrow \quad b = 12R_a/B - 8T/B = (4/B)[3R_a - 2T] \quad -b- \\ A \wedge b & \quad \rightarrow \quad a = (-2/B)(2T/B + 12R_a/B - 8T/B) \\ & \quad \leftarrow \quad a = (12/B^2)[T - 2R_a] \quad -a- \end{aligned}$$

Er is nog een extra (voor de hand liggende) voorwaarde: De functie moet monotoon niet-stijgend zijn op het interval $\langle 0, B/2 \rangle$. Dit geeft, omdat een parabool slechts één extremum bezit, twee supplementaire voorwaarden:

A) $x(dy/dx=0) \geq B/2$ (extremum ligt rechts van het interval)

B) $x(dy/dx=0) \leq 0$ (extremum ligt links van het interval)

$$x(dy/dx=0) = -b/2a = (B/2)[(2T - 3R_a)/(T - 2R_a)]/3$$

$$\begin{aligned} -A \quad \rightarrow \quad (2T - 3R_a)/(3T - 6R_a) \geq 1 & \quad \rightarrow \quad A \leftarrow A1 \vee A2 \\ -A1 \quad 3T - 6R_a \geq 0 \quad \wedge \quad 2T - 3R_a \geq 3T - 6R_a \\ \leftarrow \quad R_a \leq T/2 \quad \wedge \quad R_a \geq T/3 \\ \leftarrow \quad T/3 \leq R_a \leq T/2 \\ -A2 \quad 3T - 6R_a \leq 0 \quad \wedge \quad 2T - 3R_a \leq 3T - 6R_a \\ \leftarrow \quad R_a \geq T/2 \quad \wedge \quad R_a \leq T/3 \\ \text{Strijdig stelsel:} \quad \rightarrow \quad \text{Geen voorwaarde} \\ -B \quad \rightarrow \quad (2T - 3R_a)/(3T - 6R_a) \leq 0 & \quad \rightarrow \quad B \leftarrow B1 \vee B2 \\ -B1 \quad 2T - 3R_a \leq 0 \quad \wedge \quad 3T - 6R_a \geq 0 \\ \leftarrow \quad R_a \geq 2T/3 \quad \wedge \quad R_a \leq T/2 \\ \text{Strijdig stelsel:} \quad \rightarrow \quad \text{Geen voorwaarde} \\ -B2 \quad 2T - 3R_a \geq 0 \quad \wedge \quad 3T - 6R_a \leq 0 \\ \leftarrow \quad R_a \leq 2T/3 \quad \wedge \quad R_a \geq T/2 \\ \leftarrow \quad T/2 \leq R_a \leq 2T/3 \\ -A \vee B: & \quad T/3 \leq R_a \leq 2T/3 \quad -C- \end{aligned}$$

Voor de door ons te benaderen profielen is deze laatste voorwaarde, én het niet mee kunnen nemen van R_q misschien te veel. We zullen daarom ook nog een 3e-orde polynoom proberen.

Resumerend: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ voor $T/3 \leq R_a \leq 2T/3$

$$a = (12/B^2)[T - 2R_a]$$

$$b = (4/B)[3R_a - 2T]$$

$$c = T$$

$$\text{Heltop} = b = (12R_a - 8T)/B$$

$$\text{Heldal} = aB + b = (4T - 12R_a)/B$$

3e orde polynoom

Een derde orde polynoom heeft 4 vrijheidsgraden, a,b,c,d:

$$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

In principe kunnen we hier dus, naast T en B twee ruwheidsparameters verwerken, waarbij we als extra t.o.v. de 2e-orde benadering kiezen voor Rq. De afleiding voor a,b,c,d gaat dan als volgt:

$$1- y(0) = T \quad \rightarrow \quad d = T \quad -1-$$

$$2- y(B/2)=0 \quad \rightarrow \quad aB^3/8 + bB^2/4 + cB/2 + T = 0$$

$$\langle - \rangle \quad c = -2/B(T + bB^2/4 + aB^3/8)$$

$$\langle - \rangle \quad c = -(2T/B + bB/2 + aB^2/4) \quad -A-$$

$$3- \frac{1}{L} \int |y| \cdot dx = Ra \quad \rightarrow \quad (2/B)[ax^4/4 + bx^3/3 + cx^2/2 + Tx] \Big|_{x=0}^{x=B/2} = Ra$$

$$\langle - \rangle \quad aB^3/32 + bB^2/12 + B/4(-2T/B - bB/2 - aB^2/4) + T = Ra$$

$$\langle - \rangle \quad -aB^3/32 - bB^2/24 + T/2 = Ra$$

$$\langle - \rangle \quad b = 24/B^2(T/2 - aB^2/32 - Ra)$$

$$\langle - \rangle \quad b = (12T/B^2 - 3aB/4 - 24Ra/B^2) \quad -2-$$

$$A \wedge 2 \quad \rightarrow \quad c = (aB^2/8 - 8T/B + 12Ra/B) \quad -3-$$

$$4- \frac{1}{L} \int y^2 \cdot dx = Rq^2$$

$$\langle - \rangle \quad Rq^2 = \int [Kx^6 + Lx^5 + Mx^4 + Nx^3 + Px^2 + Qx + R] \cdot dx$$

met: $K = a^2$

$$L = 2ab = a^2(-3B/2) + a(24T/B^2 - 48Ra/B^2)$$

$$M = b^2 + 2ac = a^2(13B^2/16) + a(60Ra/B - 34T/B) + (144T^2/B^4 - 576TRa/B^4 + 576Ra^2/B^4)$$

$$N = 2ad + 2bc = a^2(-3B^3/16) + a(17T - 24Ra) + (-192T^2/B^3 - 672TRa/B^3 + 576Ra^2/B^3)$$

$$P = 2bd + c^2 = a^2(B^4/64) + a(-7BT/2 + 3BRa) + (88T^2/B^2 - 240RaT/B^2 + 144Ra^2/B^2)$$

$$Q = 2cd = a^2(-) + a(TB^2/4) + (24RaT/B - 16T^2/B)$$

$$R = T^2$$

$$\langle - \rangle \quad Rq^2 = (2/B)[KB^7/7.128 + LB^6/6.64 + MB^5/5.32 + NB^4/4.16 + PB^3/3.8 + QB^2/2.4 + RB/2]$$

$$\langle - \rangle \quad Rq^2 = a^2(B^6/53760) + a(TB^3/480) + (2T^2/15 - RaT/5 + 6Ra^2/5)$$

$$\rightarrow \quad a_{1,2} = 8[-7T \pm (-63T^2 + 168RaT - 1008Ra^2 + 840Rq^2)^{1/2}] / B^3 \quad -4-$$

Het zal bijzonder moeilijk worden om ook voor dit polynoom een niet-stijgende voorwaarde te vinden. Daar beginnen we gewoon niet aan. We zullen deze voorwaarde in het programma dat de Kurtosis berekent inbouwen, zodat we kunnen zien of voor die ingevoerde functie aan de voorwaarde is voldaan.

De programma's waarmee deze polynoom-benaderingen zijn gecontroleerd en waarmee Rq, Ku, heltop en heldal zijn berekend zijn vrij eenvoudig van opzet. De polynomen worden numeriek geïntegreerd met 10000 stappen op het interval [0, B/2] hetgeen voldoende nauwkeurig is voor ons doel. De resultaten hebt u kunnen zien in het eerste deel van van deze bijlage.