

MASTER

Twee dimensionale berekeningen aan een voorionisator

Sielhorst, C.J.

Award date:
1972

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

9034

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK
GROEP DIREKTE OMZETTING

EG/72/81

TWEE DIMENSIONALE BEREKENINGEN
AAN EEN VOORIONISATOR,

Afstudeerverslag

van

C.J. Sielhorst

Afstudeeropdracht, uitgevoerd in de
groep Direkte Omzetting
(Prof. Dr. L.H.Th. Rietjens)
onder leiding van Ir. J.H. Blom
april 1971 - maart 1972.

I. SAMENVATTING

Uitgaande van een tweedimensionale benadering is voor een plasma, dat een voorionisator binnenkomt, een oplossing van de stroomfunctie, elektronendichtheid en elektronentemperatuur berekend. Het plasma bestaat uit argon met een druk van 3 atm., een temperatuur van 2000 K waarin als seed 0,1% cesium aanwezig is.

Hierbij is rekening gehouden met het elliptisch-hyperbolisch karakter van het stelsel vergelijkingen. Het probleem is gesplitst in twee gedeelten: het elliptische gedeelte bestaande uit de tweede orde partiële differentiaalvergelijking met als onbekende functie de stroomfunctie en het hyperbolische gedeelte bestaande uit de twee gekoppelde niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking nl. continuïteitsvergelijking en energievergelijking voor elektronen met als onbekende functies de elektronendichtheid en elektronentemperatuur. De laatstgenoemde vergelijkingen zijn opgelost door deze te integreren over de karakteristieken.

II. INHOUD

I. SAMENVATTING

II. INHOUD

III. INLEIDING

IV. FYSISCH MODEL VAN HET PLASMA

IV.1. Gasdynamische MHD-stroming

IV.2. Basisvergelijkingen

V. MATHEMATISCHE OPLOSSING VAN HET FYSISCH MODEL

V.1. Twee dimensionaal model

V.2. Klassificatie van het stelsel vergelijkingen

V.3. Splitsing van het stelsel vergelijkingen

VI. RESULTATEN VAN BEREKENINGEN AAN EEN VOORIONISATOR

VII. CONCLUSIES

VIII. LIJST VAN SYMBOLEN

IX. REFERENTIES

III. INLEIDING

In het ioniserende gebied aan de ingang van een MHD-generator kunnen ionisatie-instabiliteiten tengevolge van hoge hallparameters de relaxatielengtes vergroten. Het gevolg hiervan is, dat een gedeelte van de generator slecht werkt, waardoor het totale rendement van de generator vermindert. Door gebruik te maken van een voorionisator, die geplaatst wordt voor de ingang van de generator waar het magneetveld nog gering is, kan dit nadeel ondervangen worden.

In dit verslag wordt een studie gemaakt van het plasma in zo'n voorionisator. Het plasma bestaat uit argon van 3 atm. bij een temperatuur van 2000 K met als seed 0,1% cesium. Het plasma stroomt met een snelheid van 1000 m/sec.

Een stelsel vergelijkingen is opgesteld, waaruit de stroomverdeling, elektronendichtheid en elektronentemperatuur berekend kunnen worden. Hierbij zijn geen beperkingen opgelegd aan de grootte van de componenten van de stroomdichtheid.

IV. FYSISCH MODEL VAN HET PLASMA

IV.1. Gasdynamische MHD-stroming

Het plasma zoals beschreven in de inleiding stroomt een rechthoekig kanaal binnen waarvan de afmetingen zijn (zie fig. I.1):

$$H = 0,06 \text{ m}$$

$$W = 0,10 \text{ m}$$

$$L = 0,14 \text{ m}$$

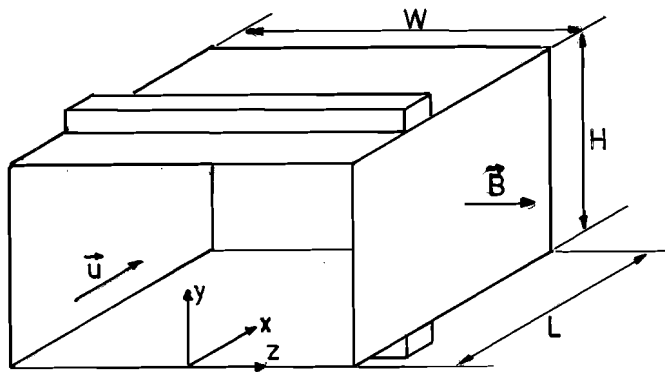


Fig. I.1 MHD-kanaal

De meest belangrijke dimensieloze getallen, die dit plasma karakteriseren zijn ($B = 0,1\text{T}$ en $\sigma = 100 \text{ mho/m}$):

- a) het Machgetal : $M = 1,2$
- b) het Reynoldsgetal : $Re = 4 \cdot 10^5$
- c) het Hartmanngetal : $Ha = 6$
- d) het magnetisch Reynoldsgetal: $R_m = 0,015$

We kunnen hieruit concluderen dat:

- het plasma supersoon door het kanaal stroomt (uit a)
- de stroming een turbulente compressible MHD-stroming is omdat $Re/Ha = 6,7 \cdot 10^4 \gg 225$ [1]
- de elektrische stromen in het plasma een magnetveld induceren dat verwaarloosbaar is ten opzichte van het aangelegde magnetveld (uit d).

IV.2. Basisvergelijkingen

IV.2.1. Basisvergelijkingen van de zware deeltjes

Deze vergelijkingen omvatten de continuïteitsvergelijking, impulsvergelijking en energievergelijking zowel van atomen als van ionen. Door deze vergelijkingen samen met de vergelijkingen van het elektronengas wordt enerzijds het gasdynamische gedrag anderzijds ook het "elektrische" probleem in het kanaal beschreven.

We zullen voor deze zware deeltjes een aantal veronderstellingen maken.

Deze veronderstellingen zijn:

- a) de snelheid en temperatuur van de ionen is gelijk aan de snelheid en temperatuur van de atomen.
- b) de berekeningen strekken zich over een zodanige lengte van het kanaal uit dat de temperatuur, dichtheid en snelheid hierover niet veranderen.
- c) voor de zware deeltjes geldt de ideale gaswet. Hiermede kunnen we bij gegeven temperatuur de dichtheid in het kanaal berekenen, daar de druk in een vlak loodrecht op de stromingsrichting evengroot moet zijn.

De vergelijkingen van de zware deeltjes zullen we verder niet oplossen, maar voor de snelheid en temperatuur zullen we een profiel aannemen, die in overeenstemming zijn met het experiment. Het gasdynamische gedrag schrijven we dus voor. Over blijft het stelsel vergelijkingen dat het gedrag van het elektronengas beschrijft.

IV.2.2. Basisvergelijkingen van het elektronengas

De basisvergelijkingen in algemene vectornotatie [2] luiden:

A. continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot n_e \vec{u}_e = I - R \quad (IV, 1)$$

B. energievergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} [n_e (\frac{3}{2} kT_e + E_I)] + \nabla \cdot [n_e (\frac{3}{2} kT_e + E_I) \vec{u}_e] =$$

$$-\vec{u}_e \cdot \nabla p_e - p_e \nabla \cdot \vec{u}_e - n_e e \vec{E} \cdot \vec{u}_e + n_e m_e \vec{u}_e \cdot (\vec{u} - \vec{u}_e) \nu - \frac{3}{2} \delta k n_e m_e (T_e - T) \sum_i \frac{v_i}{m_i} \quad (IV,2)$$

C. impulsvergelijking

$$0 = -\nabla p_e - n_e e [\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}] + n_e m_e (\vec{u} - \vec{u}_e) \nu \quad (IV,3)$$

D. toestandsvergelijking

$$p_e = n_e kT_e \quad (IV,4)$$

Voegen we hieraan de Maxwell vergelijkingen toe, dan hebben we een compleet stelsel vergelijkingen:

$$E. \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (IV,5)$$

$$F. \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} \quad (IV,6)$$

$$G. \quad \frac{\partial}{\partial t} [e(n_i - n_e)] + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (IV,7)$$

met

$$\vec{j} = e(n_i \vec{u} - n_e \vec{u}_e) \quad (IV,8)$$

Door deze vergelijkingen worden niet beschreven de verschijnselen in elektrische grondslagen. Deze veronderstellen we geen invloed te hebben. We beschouwen nu de vergelijkingen tijdsonafhankelijk ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

Met de veronderstelling [2]:

$$\frac{n_i - n_e}{n_i} \ll 1$$

kunnen we in plaats van n_i ook n_e schrijven in de basisvergelijkingen. Voor de Poisson vergelijking geldt dit echter niet. We nemen daarom de Poisson vergelijking niet mee in het stelsel vergelijkingen. Dit is mogelijk daar n_i verder niet meer in de vergelijkingen voorkomt. Met deze veronderstellingen kunnen we (IV,1) tot (IV,8) schrijven in een vorm die we hieronder in afzonderlijke paragrafen zullen toelichten.

IV.2.2.1. Continuïteitsvergelijking

$$\nabla \cdot n_e \vec{u}_e = I - R \quad (\text{IV,9})$$

Het rechterlid wordt bepaald door:

$$I - R = k_{fC} n_e n_{aC} - k_{rC} n_e^3$$

met:

$$n_{aC} = n_C - n_e \quad (\text{IV,10})$$

en volgens [3]:

$$k_{fC} = 6,24 \cdot 10^{-18} T_e^{3/2} \exp(-2,556 e/kT_e)$$

$$k_{rC} = 2,58 \cdot 10^{-39} \exp(1,337 e/kT_e)$$

Bij de bepaling van het rechterlid is verondersteld dat:

- de elektronentemperatuur zo laag blijft dat ionisatie van argon ten opzichte van ionisatie van cesium geen rol speelt
- er slechts enkelvoudige ionisatie optreedt
- recombinatie slechts tot stand komt door drie deeltjes-recombinatie.

IV.2.2.2. Energievergelijking

In (IV,2) is reeds aangenomen dat de translatie-energie veel kleiner is dan de thermische energie van de elektronen ($\frac{1}{2} m_e u_e^2 \ll \frac{3}{2} kT_e$). Ook het warmtetransport door geleiding ($\nabla \cdot \lambda \nabla T_e$) en straling zijn verwaarloosd.

Energie-overdracht tussen elektronen en zware deeltjes gebeurt ofwel door elastische botsingen ($\delta = 2$) ofwel heeft ionisatie van het zware deeltje tengevolge.

De energievergelijking is dan in de volgende vorm te schrijven [(IV,2) - ($\vec{u}_e \cdot$ (IV,3))]:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} k n_e \vec{u}_e \cdot \nabla T_e - k T_e \vec{u}_e \cdot \nabla n_e = \\ \frac{j^2}{\sigma} - 3 k n_e m_e (T_e - T) \sum_i \frac{\nu_i}{m_i} - \left(\frac{5}{2} k T_e + E_I \right) (I-R) \end{aligned} \quad (IV,11)$$

waarin de volgende grootheden gedefinieerd zijn door:

a) botsfrequenties

$$\nu = \sum_i \nu_i = \nu_{eaA} + \nu_{eaC} + \nu_{eiC} \quad (IV,12)$$

$$\nu_{eaA} = 0,5 \cdot 10^{-20} n_{aA} \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \quad [4]$$

$$\nu_{eaC} = 0,25 \cdot 10^{-17} n_{aC} \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \quad [4]$$

$$\nu_{eiC} = 1,55 \cdot 10^{-6} n_e T_e^{-3/2} \ln(8,76 \cdot 10^6 T_e^{3/2} n_e^{-1/2}) \quad [5]$$

b) ionisatie-energie van cesium

$$E_I = 3,893 \cdot e \text{ (J)}$$

c) elektrisch geleidingsvermogen

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu} \quad (IV,13)$$

IV.2.2.3. De Wet van Ohm

Door in de impulsvergelijking $(en_e \vec{u}_e \times \vec{B})$ te vervangen door $(en_e \vec{u}_e - \vec{j}) \times \vec{B}$ kan deze vergelijking omgewerkt worden tot de meer bekende wet van Ohm

$$\vec{j} + \frac{\beta}{B}(\vec{j} \times \vec{B}) = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} + \frac{\nabla p_e}{en_e}) \quad (\text{IV,14})$$

waarin de hallparameter gedefinieerd wordt door:

$$\beta = \frac{eB}{m_e v} \quad (\text{IV,15})$$

IV.2.2.4. Maxwell vergelijkingen

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{IV,16})$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{IV,17})$$

V. MATHEMATISCHE OPLOSSING VAN HET FYSISCHE MODEL

V.1. Twee dimensionaal model

Nadat we ons in Par. IV.2.2. beperkt hebben tot tijdsonafhankelijke berekeningen, zullen we ons van nu af ook nog beperken tot twee dimensionale berekeningen : het x-y-vlak. Dit houdt in dat in onze vergelijkingen de grootheden onafhankelijk zijn van z ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) en de volgende grootheden zelf ook gelijk aan nul zijn:

$$\begin{aligned}E_z &= 0 \\j_z &= 0 \\u_z &= 0 \\u_{ez} &= 0\end{aligned}$$

Met het gestelde in Par. IV.2.1. en met het feit dat ons kanaal rechthoekig en konstant van doorsnede is, kunnen we voor de snelheid van de zware deeltjes invoeren de vector:

$$\vec{u} = (u(y), 0)$$

Hieruit volgt:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Het magneetveld staat in onze berekeningen in de positieve z-richting. De sterkte van het magneetveld mag wel afhankelijk van x zijn.

Gebruikmakend van $\nabla \cdot j = 0$ kunnen we (IV,9) zo schrijven dat deze vergelijking onafhankelijk wordt van \vec{u}_e . Met het hierboven gestelde vinden we dan een continuïteitsvergelijking zoals in (V,1b) weergegeven wordt. De continuïteitsvergelijking is bij nadere beschouwing niet meer die van de elektronen maar van de ionen. Met onze veronderstelling dat de ionen dezelfde snelheid hebben als de atomen en met $n_e \cong n_i$ is dit in te zien.

Het stelsel vergelijkingen krijgt dan de volgende vorm:

$$\frac{\partial}{\partial x}(n_e u_{ex}) + \frac{\partial}{\partial y}(n_e u_{ey}) = I - R \quad (V,1a)$$

$$u \frac{\partial n_e}{\partial x} = I - R \quad (V,1b)$$

$$\frac{3}{2} kn_e u_{ex} \frac{\partial T_e}{\partial x} + \frac{3}{2} kn_e u_{ey} \frac{\partial T_e}{\partial y} - kT_e u_{ex} \frac{\partial n_e}{\partial x} - kT_e u_{ey} \frac{\partial n_e}{\partial y} = \quad (V,2)$$

$$\frac{j^2}{\sigma} - 3kn_e m_e (T_e - T) \sum_i \frac{v_i}{m_i} - \left(\frac{5}{2} kT_e + E_I \right) (I - R) N_o$$

$$j_x = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(E_x + \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) - \frac{\beta\sigma}{1+\beta^2} \left(E_y - uB + \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) \quad (V,3)$$

$$j_y = \frac{\beta\sigma}{1+\beta^2} \left(E_x + \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) + \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(E_y - uB + \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) \quad (V,4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (V,5)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \quad (V,6)$$

Met behulp van de algebraïsche vergelijkingen:

$$j_x = en_e (u - u_{ex}) \quad (V,7)$$

$$j_y = - en_e u_{ey} \quad (V,8)$$

$$p_e = n_e kT_e \quad (V,9)$$

Dit geeft een "bepaald systeem" (zie [6]) van niet lineaire partiële differentiaalvergelijkingen namelijk de zes onbekende functies n_e , T_e , j_x , j_y , E_x en E_y met de zes vergelijkingen (V,1) tot (V,6) met als onafhankelijke variabelen x en y .

De grootheden p_e , u_{ex} , u_{ey} zijn bekend door de drie algebraïsche relaties (V,7) tot (V,9).

V.2 Klassificatie van het stelsel vergelijkingen

Willen we een stelsel partiële differentiaal vergelijkingen zoals deze oplossen, dan is het noodzakelijk dit stelsel te klassificeren. De klasse ofwel het karakter van het stelsel vergelijkingen wordt bepaald door de partiële afgeleiden die in de differentiaalvergelijkingen voorkomen.

Afhankelijk van dit karakter moeten begin- en randvoorwaarden bekend zijn om het probleem te kunnen oplossen [7].

Door het invoeren van karakteristieken

$$\phi(x,y) = 0$$

kunnen we van het stelsel het karakter bepalen [6].

Wij zullen nu voor ons stelsel het karakter gaan bepalen met verwaarlozing van de gradiënt van de elektronendruk in (V,3) en (V,4).

Door middel van (V,6) elimineren we in (V,3) en (V,4) de componenten van de stroomdichtheid j_x en j_y . De vergelijkingen (V,3) en (V,4) worden dan één vergelijking met partiële afgeleiden van de eerste orde in E_x en E_y naar x en y . De afgeleiden naar x en y van uB zijn bekende functies en deze plaatsen we in het rechterlid.

De vergelijking wordt dan [8]:

$$\frac{\partial E}{\partial x} x + \frac{\partial E}{\partial y} y + P E_x + Q(E_y - uB) + R = 0 \quad (V,10)$$

waarin:

$$P = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) + \beta \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\ln \beta) \right] \quad (V,11)$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) - \beta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\ln \beta) \right] \quad (V,12)$$

$$R = - B \frac{\partial u}{\partial y} + \beta u \frac{\partial B}{\partial x} \quad (V,13)$$

In R komen geen partiële afgeleiden voor van onbekende functies.
 In P en Q komen afgeleiden naar x en y van de grootheden σ en β voor.
 Deze grootheden zijn zelf weer functies van n_e en T_e .
 Indien η voorstelt σ of β en ζ stelt voor ofwel x ofwel y dan kunnen we een afgeleide voorstellen door [8]:

$$\frac{\partial \ln \eta}{\partial \zeta} = \frac{\partial \ln}{\partial T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \zeta} + \frac{\partial \ln \eta}{\partial n_e} \frac{\partial n_e}{\partial \zeta} \quad (V,14)$$

en hiermede wordt (V,10)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + F(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial x} + G(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial y} + F(n_e) \frac{\partial n_e}{\partial x} + G(n_e) \frac{\partial n_e}{\partial y} + R = 0 \quad (V,15)$$

waarin:

$$F(\xi) = E_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) - \beta [E_y - uB] \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln \beta) \right] \quad (V,16)$$

$$G(\xi) = [E_y - uB] \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) + \beta E_x \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln \beta) \right] \quad (V,17)$$

Indien we in plaats van j_x en j_y geëlimineerd hebben E_x en E_y dan zouden we een vergelijking analoog aan (V,15) in j_x en j_y verkregen hebben.
 Nemen we nu in beschouwing (V,1b), (V,2), (V,15) en (V,5) dan hebben we een stelsel vergelijkingen met als onbekende grootheden n_e , T_e , E_x en E_y .
 In matrix notatie kunnen we dit als volgt weergeven:

$$\begin{pmatrix} u \frac{\partial \phi}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ -kT_e (u_{ex} \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_{ey} \frac{\partial \phi}{\partial y}) & \frac{3}{2} kn_e (u_{ex} \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_{ey} \frac{\partial \phi}{\partial y}) & 0 & 0 \\ F(n_e) \frac{\partial \phi}{\partial x} + G(n_e) \frac{\partial \phi}{\partial y} & F(T_e) \frac{\partial \phi}{\partial x} + G(T_e) \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \phi}{\partial y} & +\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial n_e}{\partial \phi} \\ \frac{\partial T_e}{\partial \phi} \\ \frac{\partial E_x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial E_y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - R \\ N_o \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

In het algemeen zijn de afgeleiden van T_e , n_e , E_x en E_y een-eenduidig bepaald langs deze karakteristieken.

Dit is echter niet het geval wanneer aan de karakteristieke voorwaarde ($\text{Det} = 0$) is voldaan.

Deze karakteristieke voorwaarde geeft ons de karakteristieke vergelijking:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \cdot \left(u_{ex} \frac{\partial\phi}{\partial x} + u_{ey} \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \quad (\text{V}, 19)$$

Uit het feit dat de eerste twee factoren reële waarden geven en de derde faktor geen reële waarden kunnen we concluderen dat ons stelsel een elliptisch-hyperbolisch karakter heeft.

Met een gradiënt van de elektronendruk in de wet van Ohm kunnen we van ons stelsel geen karakteristieke vergelijking bepalen. De matrixvorm heeft dan een zodanige vorm dat als we determinant bepalen er identiek nul uitkomt.

De oplossing van dit probleem verdient nadere bestudering.

V.3 Splitsing van het stelsel vergelijkingen

Om tot een oplossing van het stelsel vergelijkingen te komen splitsen we het stelsel in twee gedeelten.

Het eerste gedeelte bestaat uit de vergelijkingen (V,3), (V,4), (V,5) en (V,6), die te schrijven zijn als een tweede orde partiële differentiaal vergelijking met als onbekende functie de elektrische potentiaal ϕ ofwel als onbekende de stroomfunctie ψ . (Het elliptische gedeelte). Het tweede gedeelte bestaat uit de vergelijkingen (V,1a) of (V,1b) en (V,2). (Het hyperbolische gedeelte).

De oplossing van het volledige stelsel vergelijkingen verloopt dan iteratief volgens het schema van fig. V.1.

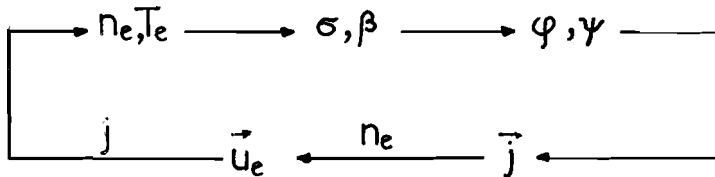


Fig. V.1 Schema van de oplossing

De berekening start met in het gehele vlak een elektronendichtheid en -temperatuur in Saha-evenwicht. Het geleidingsvermogen en de hallparameter zijn nu bekende grootheden. Hierbij wordt de potentiaal of stroomfunctie berekend, waaruit de stroomdichtheid volgt. Met de oude elektronendichtheid wordt een nieuwe elektronensnelheid berekend. Met behulp van de elektronensnelheid wordt nu de elektronendichtheid en -temperatuur simultaan berekend. Met deze nieuwe n_e en T_e verdeling wordt via een nieuwe σ en β opnieuw een stroomverdeling berekend. Het iteratieproces eindigt wanneer de procentuele verandering van het geleidingsvermogen bij een berekening binnen 10% blijft.

V.3.1 Potentiaal en stroomfunctie

Zoals gesteld kunnen we het elliptische gedeelte oplossen met behulp van een potentiaal of een stroomfunctie. De elektronendichtheid en -temperatuur zijn bekend dus ook de gradiënt van de elektronendruk is een bekende functie. We nemen deze nu ook mee in de vergelijking.

Uit de berekeningen blijkt deze term in het vlak zeer kleine waarden te hebben. Alleen bij de kathode heeft deze term grote invloed.

Bij het oplossen met behulp van de potentiaal

$$E_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x} , \quad E_y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (V,20)$$

vinden we door (V,3) partiëel te differentiëren naar x en (V,4) naar y en deze twee vergelijkingen op te tellen de potentiaalvergelijking [8]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y} - R = 0 \quad (V,21)$$

met:

$$P = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\frac{\sigma}{1+\beta^2}\right) + \beta \frac{\partial}{\partial y} \ln\left(\frac{\sigma}{1+\beta^2}\right) + \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (V,22)$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial y} \ln\left(\frac{\sigma}{1+\beta^2}\right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\frac{\sigma}{1+\beta^2}\right) - \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (V,23)$$

$$R = \frac{\partial E_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial E_{ny}}{\partial y} + \beta \left[\frac{\partial E_{nx}}{\partial y} - \frac{\partial E_{ny}}{\partial x} \right] + P E_{nx} + Q E_{ny} - B \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial B}{\partial x} - u B Q \quad (V,24)$$

waarin: $E_{nx} = \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial x}$ (V,25)

en: $E_{ny} = \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial y}$ (V,26)

De benodigde randvoorwaarden voor het oplossen van dit probleem worden in hoofdstuk VI gegeven, waar de resultaten gegeven worden van berekeningen.

Gebruiken we de stroomfunctie, die gedefinieerd wordt door:

$$j_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad j_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (V,26)$$

dan komen we tot de stroomfunctie vergelijking [9]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + P \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q \frac{\partial \psi}{\partial y} + R = 0 \quad (V,27)$$

met:

$$P = \sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right] \quad (V,28)$$

$$Q = \sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right] \quad (V,29)$$

$$R = - \frac{ek}{m_e v} \left[\frac{\partial n_e}{\partial x} \frac{\partial T_e}{\partial y} - \frac{\partial T_e}{\partial x} \frac{\partial n_e}{\partial y} \right] - \sigma u \frac{\partial B}{\partial x} \quad (V,30)$$

De benodigde randvoorwaarden zullen ook in hoofdstuk VI gegeven worden. Tevens de voor- en nadelen van deze twee vergelijkingen.

Beide vergelijkingen kunnen wel op dezelfde manier opgelost worden. De beide differentiaal vergelijkingen worden omgezet in differentievergelijkingen, waardoor de differentiaalvergelijking overgaat in een algebraïsche vergelijking. Voor de gebruikte differenties zie [8]. De vergelijking wordt nu iteratief opgelost met toepassing van successievelijke overrelaxatie [10].

V.3.2. Continuïteits- en Energievergelijking

In Par. V.2. is bepaald dat de continuïteitsvergelijking en de energievergelijking hyperbolische partiële differentiaalvergelijkingen zijn. Bij deze klasse van partiële differentiaalvergelijkingen kunnen karakteristieken bepaald worden. Integratie van de partiële differentiaalvergelijkingen over deze karakteristieken reduceert tot integratie van vergelijkingen, waarin slechts totale differentialen voorkomen. De integratie wordt hiermede veel eenvoudiger.

We zullen voor de continuïteitsvergelijking en energievergelijking hiervan gebruikmaken.

Door te beschouwen (zie ook Par. V.2):

$$\phi(y(x), x) = C \tag{V,31a}$$

volgt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\text{dus: } \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} \tag{V,32a}$$

Anderzijds met:

$$\phi(y, x(y)) = C \tag{V,31b}$$

volgt ook dat:

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\partial \phi / \partial y}{\partial \phi / \partial x} \tag{V,32b}$$

Door de totale differentiaal

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (V,33a)$$

of:
$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dy} \quad (V,33b)$$

waarin ξ voorstelt n_e of T_e , kunnen we de continuïteitsvergelijking en energievergelijking op de karakteristieken bepalen.

De continuïteitsvergelijking in de vorm (V,1b) leidt tot de vergelijking

$$u \frac{dn_e}{dx} = I - R \quad (V,34)$$

over de karakteristiek.

$$y = \text{constant} \quad (V,35)$$

Dit betekent dat de \vec{u} -lijnen de karakteristieken zijn.

Uit (V,1a) kunnen we tot een vergelijking komen

$$u_{ex} \frac{\partial n_e}{\partial x} + u_{ey} \frac{\partial n_e}{\partial y} = (I-R) - n_e \left(\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} \right) \quad (V,36)$$

welke vergelijking geschreven op de karakteristiek, die volgt uit de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_{ey}}{u_{ex}} \quad (V,37a)$$

wordt:

$$u_{ex} \frac{dn_e}{dx} = (I - R) - n_e \left(\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} \right) \quad (V,38a)$$

ofwel met:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u_{ex}}{u_{ey}} \quad (V,37b)$$

$$u_{ey} \frac{dn_e}{dy} = (I - R) - n_e \left(\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} \right) \quad (V,38b)$$

Uit (V,34) is te zien dat nu de karakteristieken de banen van de elektronen zijn. De scalar $\text{div. } \vec{u}_e$ in het rechterlid van deze vergelijking is een bekende functie, want deze volgt uit de berekening van de stroomfunctie of potentiaal met gebruikmaking van n_e uit de vorige berekening.

De energievergelijking (V,2) geschreven op de karakteristiek, die volgt uit de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_{ey}}{u_{ex}} \quad (V,39a)$$

of:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{u_{ex}}{u_{ey}} \quad (V,39b)$$

wordt respectievelijk:

$$\frac{3}{2} kn_e u_{ex} \frac{dT_e}{dx} - kT_e u_{ex} \frac{dn_e}{dx} = N_o \quad (V,40a)$$

$$\frac{3}{2} kn_e u_{ey} \frac{dT_e}{dy} - kT_e u_{ey} \frac{dn_e}{dy} = N_o \quad (V,40b)$$

(V,40) bevat afgeleiden van zowel T_e als n_e . Daar (V,40) gekoppeld is met (V,34) ofwel (V,37) waardoor deze vergelijkingen simultaan opgelost moeten worden is voor (V,40) naar een vorm gezocht, waarbij de afgeleiden van n_e niet voorkomen. Dit leidt tot een energie-vergelijking in de vorm:

$$\frac{3}{2} kn_e (u_{ex} \frac{\partial T_e}{\partial x} + u_{ey} \frac{\partial T_e}{\partial y}) = \frac{j^2}{\sigma} - 3kn_e m_e (T_e - T) \sum_i \frac{v_i}{m_i} - p_e (\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y}) +$$

$$-(\frac{3}{2} kT_e + E_I)(I - R) \equiv N \quad (V,41)$$

We zien dat in deze vergelijking in het rechterlid evenals bij de continuïteitsvergelijking een term verschijnt waarin de divergentie van \vec{u}_e voorkomt.

(V,41) is op de karakteristiek gegeven in differentiaalvorm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_{ey}}{u_{ex}}$$

te schrijven als:

$$\frac{3}{2} kn_e u_{ex} \frac{dT_e}{dx} = N \quad (V,42a)$$

$$\text{of: } \frac{3}{2} kn_e u_{ey} \frac{dT_e}{dy} = N \quad (V,42b)$$

We kunnen nu T_e en n_e berekenen door gebruik te maken van:

- a) de twee verschillende karakteristieken: \vec{u}_e -lijnen en \vec{u} -lijnen
- b) alleen de \vec{u}_e -lijnen.

Randvoorwaarden voor n_e en T_e moeten gegeven zijn op die plaatsen waar de karakteristieken het kanaal binnenkomen of ontstaan.

De lijn langs de kathode en anode waarover we nog n_e en T_e berekenen

denken we ons enkele malen de vrije weglengte van elektronen verwijderd van de isolatorwand en de elektroden.

Dit houdt in enerzijds dat n_e en T_e geheel bepaald worden door het plasma en niet de wand, anderzijds dat de stroomcomponent normaal op het oppervlak (j_y) gelijk aan nul is, maar de component van de stroom evenwijdig aan het oppervlak ongelijk nul is.

a) In dit geval behoeft men voor n_e alleen randvoorwaarden op te leggen aan het begin van het kanaal. Voor T_e moet men randvoorwaarden opleggen aan het begin van het kanaal en op de kathode. Veronderstellen we dat de gradiënt van T_e loodrecht op kathode-oppervlak

$\left(\frac{\partial T_e}{\partial y}\right)$ klein is [11] dan wordt (V,41):

$$\frac{3}{2} kn_e u_{ex} \frac{dT_e}{dx} = N \quad (V,43)$$

langs de kathode.

b) Hier moeten randvoorwaarden voor n_e en T_e gegeven worden aan de ingang van het kanaal en ook voor beide op het kathode-oppervlak. De waarden bepalen we door de gradiënten in n_e en T_e te verwaarlozen, waardoor n_e en T_e bepaald worden uit:

$$\frac{j^2}{\sigma} = 3kn_e m_e (T_e - T) \sum_i \frac{i}{m_i} \quad (V,44)$$

en: de Saha-vergelijking

In het vlak worden n_e en T_e sequentieel in alle roosterpunten berekend, dat wil zeggen eerst alle opeenvolgende punten op een horizontale lijn, daarna de punten op de volgende lijn. De karakteristieken worden hierbij benaderd door de raaklijnen hieraan.

De integratie start op het snijpunt van de raaklijn met een roosterlijn.

Bij de berekeningen (zie hoofdstuk VI) ligt de anode in het vlak: $y = H$ en de stroom treedt bij de anode het kanaal binnen.

De component van de stroomdichtheid j_y heeft dus een negatieve waarde bij de anode. We verwachten dat in het kanaal j_y ook negatief blijft, waaruit volgt dat u_{ey} steeds positief is.

Daar het rekenprogramma hierop is gebaseerd is het niet mogelijk oplossingen te berekenen, waarin wervelstromen voorkomen. Zoals blijkt uit [12] wordt hierdoor aan het verloop van het magneetveld als functie van x beperkingen opgelegd.

We kunnen nu nog vier mogelijkheden onderscheiden (zie fig. V,2):

$$\text{I : } u_{ex} > 0 \quad \text{en} \quad 0 < \frac{u_{ey}}{u_{ex}} < \frac{b}{d}$$

$$\text{II : } u_{ex} > 0 \quad \text{en} \quad 0 < \frac{u_{ex}}{u_{ey}} < \frac{d}{b}$$

$$\text{III : } u_{ex} < 0 \quad \text{en} \quad 0 < \left| \frac{u_{ex}}{u_{ey}} \right| < \frac{d}{b}$$

$$\text{IV : } u_{ex} < 0 \quad \text{en} \quad 0 < \left| \frac{u_{ey}}{u_{ex}} \right| < \frac{b}{d}$$

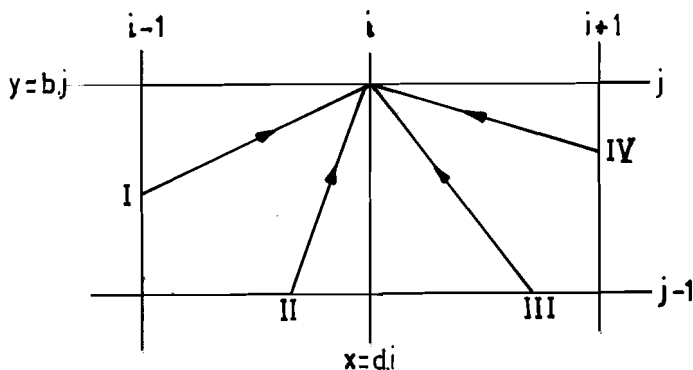


Fig. V.2 Snijpunt van raaklijn aan karakteristiek met roosterlijnen.

Eerst zullen we geval a) behandelen.

Bij alle vier de mogelijkheden geeft de beginwaarde van n_e voor de integratie geen probleem. Voor de eerste drie mogelijkheden geeft de beginwaarde van T_e ook geen probleem. Beide waarden worden berekend uit lineaire interpolatie van de reeds berekende waarde van de dichtstbijzijnde hoekpunten. De berekening van T_e gebeurt met een gemodificeerde Runge-Kutta methode [13] met zelfkiezende stapgrootte over het integratietraject. De berekening van n_e gebeurt met de trapezium-regel [14]. Om n_e en T_e bij de vierde mogelijkheid te berekenen is een uitbreiding nodig, omdat punt $(i + 1, j)$ nog niet berekend is.

We maken hierbij gebruik van berekening van tussenliggende punten en wel die punten die liggen op de snijpunten van de raaklijn met de roosterlijnen. Vanuit elk snijpunt wordt een nieuwe raaklijn aan de karakteristiek bepaald door lineaire interpolatie tussen de waarden van \vec{u}_e in de punten $(i + n, j)$ en $(i + n, j - 1)$. Dit proces zetten we voort totdat de roosterlijn $(j - 1)$ gesneden wordt. De berekening verloopt bijvoorbeeld zoals in fig. V,3 is weergegeven, waarin de getallen de volgorde aangeven van de berekeningen in de verschillende punten. De punten a, b en c door lineaire interpolatie. De punten 1 t/m 6 steeds door integreren.

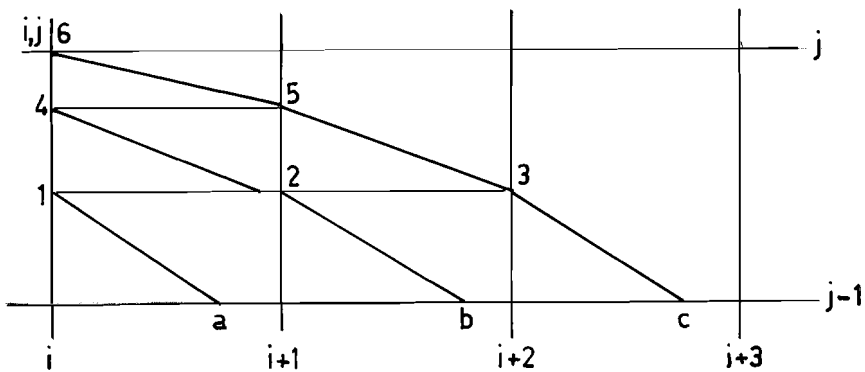


Fig. V.3 Berekening van n_e en T_e bij mogelijkheid IV.

Indien we alleen over \vec{u}_e -lijnen rekenen, verloopt de berekening eenvoudiger. We rekenen nu zowel n_e als T_e simultaan met dezelfde gemodificeerde Runge-Kutta methode. Bij mogelijkheid IV behoeven ook de hulppunten (zie voorbeeld) 1, 2 en 4 niet berekend te worden. De voor- en nadelen van deze twee gevallen zullen nader uiteengezet worden in hoofdstuk VI.

VI. RESULTATEN VAN BEREKENINGEN AAN EEN VOORIONISATOR

De berekeningen zijn uitgevoerd aan een voorionisator.

Model voor wat betreft het plasma en de afmetingen van het kanaal heeft het schokbuis-experiment, dat in de groep Direkte Omzetting aanwezig is, gestaan.

In de inleiding zijn reeds de voornaamste kenmerken van het plasma gegeven. De afmetingen van de voorionisator staan vermeld in Par. IV.1.

De voorionisator heeft één anode en één kathode, welke beide 22 mm. breed zijn en welke 38 mm. vanaf $x = 0$ beginnen.

Verder is er verondersteld dat:

- a) er geen wrijving met de wand is. Dit resulteert in een snelheid, die uniform over de hoogte van het kanaal is.
- b) de wanden van het kanaal een temperatuur van 2000 K hebben. Voor de temperatuur van het gas kunnen we dan een konstante temperatuur over de hoogte van het kanaal veronderstellen.

Deze twee veronderstellingen impliceren een homogeen gasmengsel.

Allereerst is gerekend met een magneetveld gelijk aan nul en een spanning tussen de elektroden: $U = 12,5$ V.

De gebruikte vergelijkingen zijn:

$$u \frac{dn_e}{dx} = I - R \tag{V,34}$$

en

$$\frac{3}{2} kn_e u_{ex} \frac{dT_e}{dx} = N \quad \text{of} \quad \frac{3}{2} kn_e u_{ey} \frac{dT_e}{dy} = N \tag{V,42}$$

met als karakteristieken de \vec{u} -lijnen en \vec{u}_e -lijnen

en

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y} - R = 0$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

a) voor de potentiaal

- $\phi = 0$ op de kathode
- $\phi = U$ op de anode
- $j_x = 0$ voor $x = 0$ en $x = L$
- $j_y = 0$ langs de isolatorwanden.

De voorwaarde $j_x = 0$ voor $x = 0$ en $x = L$ veronderstelt dat geen axiale stromen het kanaal binnenkomen of uitgaan. De Lengte L moet dus zo groot zijn dat hieraan voldaan wordt.

Door $j_x = 0$ te substitueren in (V,3) verkrijgen we een relatie tussen $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ en $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ waardoor we met het invoeren van een virtueel punt (punt buiten het vlak) ook de randpunten kunnen berekenen met de succesievelijke overrelaxatie methode.

Hetzelfde geldt voor $j_y = 0$ langs de isolatorwanden.

b) voor de continuïteitsvergelijking en energievergelijking

$$T_e = T \quad \text{voor } x = 0$$

$$n_e = n_e \text{ (Saha)} \quad \text{voor } x = 0$$

T_e langs de kathode volgt uit:

$$\frac{3}{2} kn_e u_{ex} \frac{dT_e}{dx} = N \quad (V,43)$$

Bij het numeriek oplossen van dit probleem bleek de waarde van j_x stroomopwaarts van de kathode zodanig grote positieve waarde te krijgen, dat u_{ex} op de lijn langs de kathode negatief werd.

Hierdoor kan met behulp van (V,43) T_e niet meer op de kathode berekend worden (zie fig. VI,1).

Om deze moeilijkheid te vermijden zijn we overgegaan naar het berekenen van n_e en T_e alleen langs de \vec{u}_e -karakteristieken, waarbij we gebruik maken van de continuïteitsvergelijking in de vorm:

$$u_{ex} \frac{dn_e}{dx} = (I - R) - n_e \left(\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} \right) \quad (V,38a)$$

of:

$$u_{ey} \frac{dn_e}{dy} = (I - R) - n_e \left(\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} \right) \quad (V,38b)$$

met als randvoorwaarde op de kathode de waarden van n_e en T_e die volgen uit:

$$\frac{j^2}{\sigma} = 3kn_e m_e (T_e - T) \sum_i \frac{v_i}{m_i} \quad (V,44)$$

en de Saha - vergelijking.

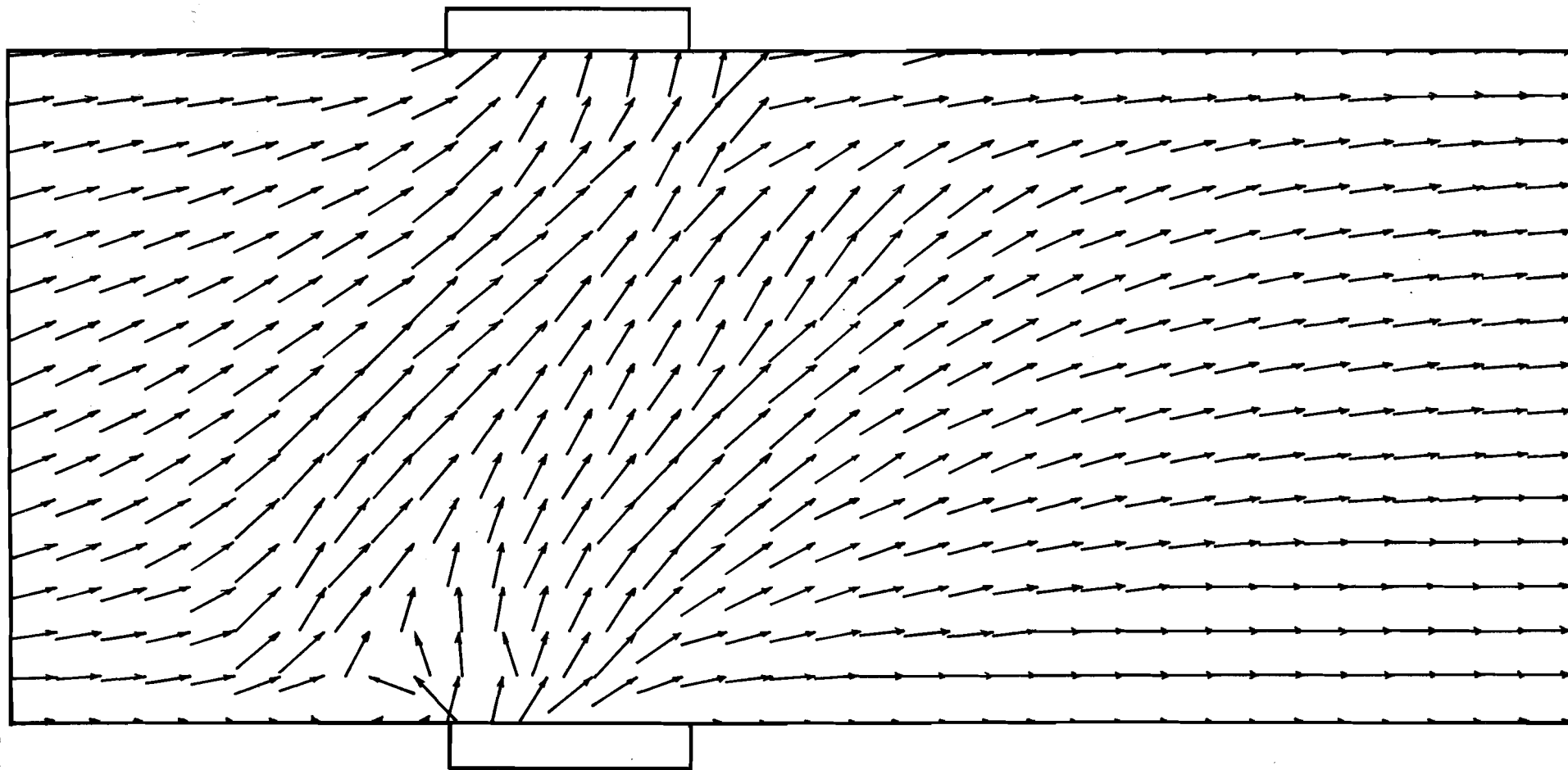


Fig. VI.1 Richtingen van de elektronensnelheid
in x-y-vlak

Na het overgaan op deze bepaling van n_e en T_e bleek de berekening slecht te convergeren. Dit is verklaarbaar door de volgende reden. De elektrische veldsterkte aan de randen berekenen we uit de potentiaal door middel van een voorwaarts of achterwaarts differentieschema [8]. De daaruitvolgende componenten van de stroomdichtheid (j_x aan het begin en einde van het kanaal, j_y langs de isolatorwand) blijken een grote waarde te behouden. Daardoor wordt \vec{u}_e slecht bepaald en hierdoor weer n_e en T_e . Zodoende blijkt het gehele iteratieproces slecht te convergeren.

Om deze reden zijn de verdere berekeningen uitgevoerd met de stroom-functievergelijking:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + P \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q \frac{\partial \psi}{\partial y} + R = 0 \quad (V,27)$$

waar de volgende randvoorwaarden bijhoren:

$\psi = 0$	op de isolatorwanden stroomopwaarts van de elektroden en aan het begin van de voorionisator.
$\psi = 800 \text{ A/m}$	op de isolatorwanden na de elektroden en aan het einde van de voorionisator.
$E_x = 0$	op de elektroden.

$\psi = 800 \text{ A/m}$ betekent dat er 80 A door de elektroden loopt ($W = 0,10 \text{ m}$) en deze waarde is zo gekozen dat deze overeenkomt met een spanning tussen de elektroden van 12,5 V.

Het resultaat van deze berekening is weergegeven in fig.VI,2 t/m fig.VI,5. In fig.VI,2 zien we duidelijke stroomconcentraties aan de beide elektroden aan de stroomafwaartse richting. Ook het uitbuigen van de stroom aan de stroomafwaartse kant door het verhoogde geleidingsvermogen is duidelijk te zien. Uit fig.VI,3 kunnen we een relaxatielengte voor de elektronendichtheid bepalen van 35 mm. en een verhoging van de elektronendichtheid met een factor vijf, hetgeen resulteert in een verhoging van het geleidingsvermogen ook met een factor vijf (zie fig.VI,5).

Uit fig.VI,4 zien we dat de relaxatielengte voor de elektronentemperatuur kleiner is en de verhoging ook eerder plaatsvindt.

In fig.VI,3 is duidelijk te zien dat de elektronendichtheid na het bereiken van zijn maximum niet weer snel daalt naar zijn beginwaarde. Dit dankzij het uitbuigen van de stroom.

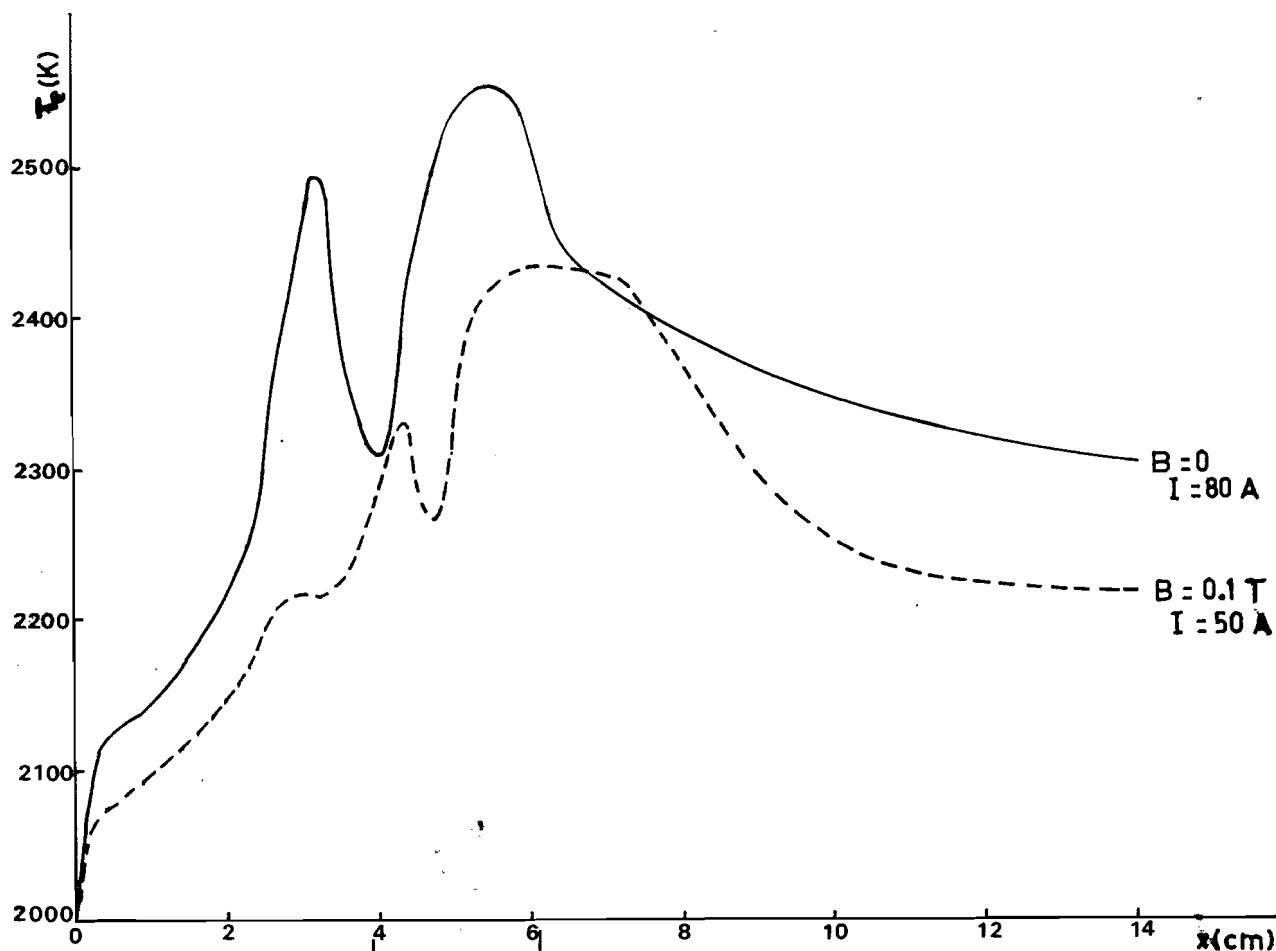


Fig. VI.4 Verloop van elektronentemperatuur in het midden van de voorionisator

Naast deze berekening is er ook een berekening uitgevoerd met magneetveld en wel $B = 0,1$ T. De stroom door de elektroden is 50 A. In fig. VI,6 is de stroomverdeling weergegeven. Ook hier is duidelijk het uitbuigen van de stroom te zien. De stroomconcentratie aan de stroomafwaartse kant van de anode is verdwenen. De stroomdichtheid langs de anode is ongeveer konstant. Er treedt nog geen stroomconcentratie op aan de stroomopwaartse kant van de anode daar de hallparameter nog laag is ($\beta \approx 0,7$). De berekende spanning tussen de elektroden is 6,5 V. De spanning tengevolge van het magneetveld is: $u_{BH} = -6$ V. Dus de spanning gerelateerd aan $E^*(= E - uB)$ is 12,5V. Met de stroom van 50 A kunnen we nu stellen dat aan het elektronengas toegevoerd wordt een vermogen van 625 W. Bij de eerste berekening is dit $80 \times 12,5 = 1000$ W. Het toegevoerde vermogen is dus nu minder, hetgeen

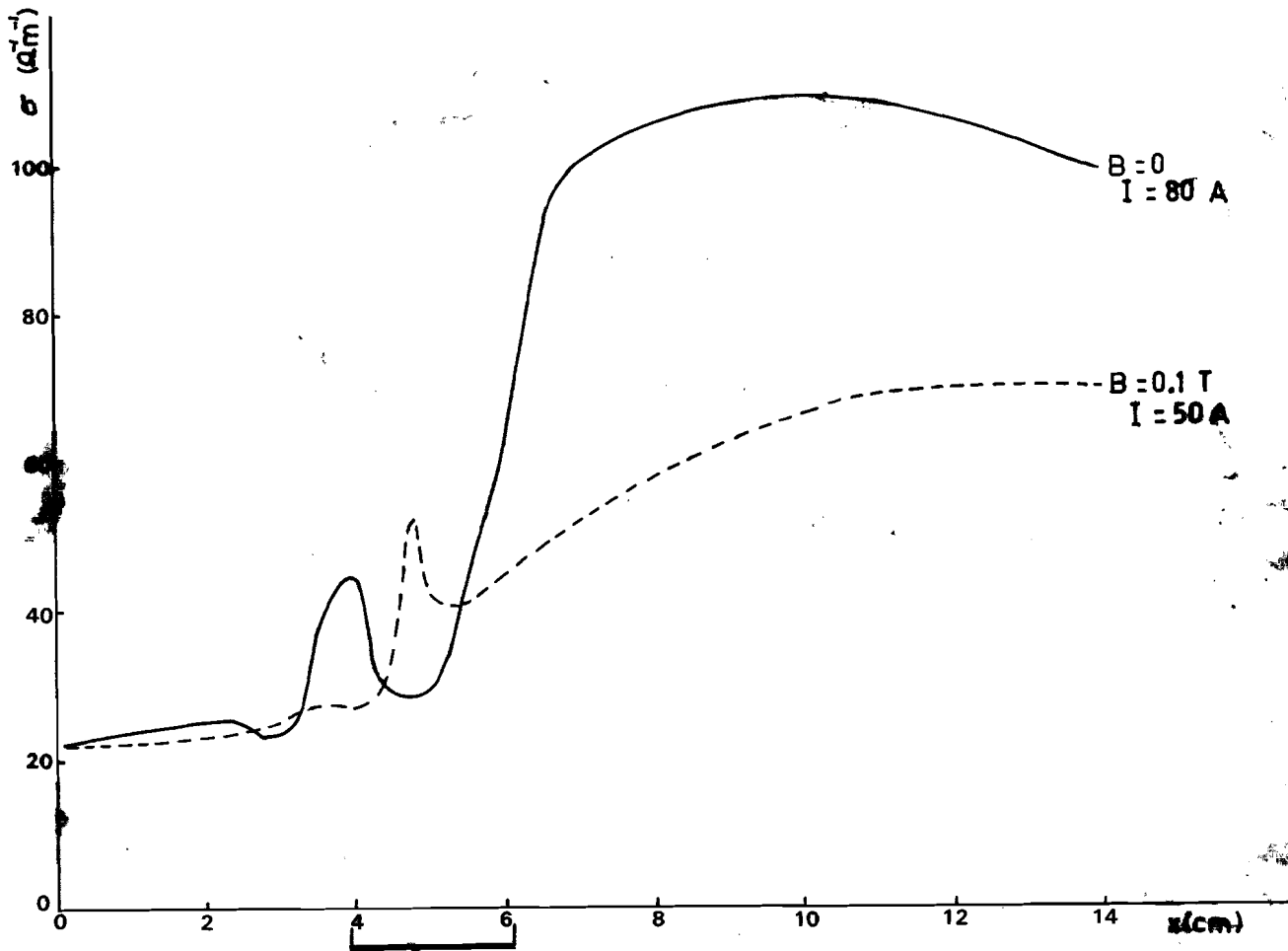


Fig. VI.5 Verloop van het geleidingsvermogen in het midden van de voorionisator

ten gevolge heeft dat de verhoging van de elektronendichtheid (zie fig.VI,3) geringer is en dientengevolge ook het geleidingsvermogen (zie fig.VI,5). Er wordt dus aan deze voorionisator geen vermogen onttrokken zoals in [15], maar er wordt een energie toegevoerd van $6,5 \times 50 = 325$ W. Uit fig.VI,3 is een relaxatielengte voor de elektronendichtheid te berekenen van 65 mm. De waarde is dus ongeveer tweemaal zo groot als met $B = 0$. In fig.VI,6 is ook een numerieke instabiliteit te bespeuren aan de stroomopwaartse kant van de kathode. Deze numerieke instabiliteit ontstaat waar de karakteristieken afkomstig van de ingang en van de kathode dicht bij elkaar komen.

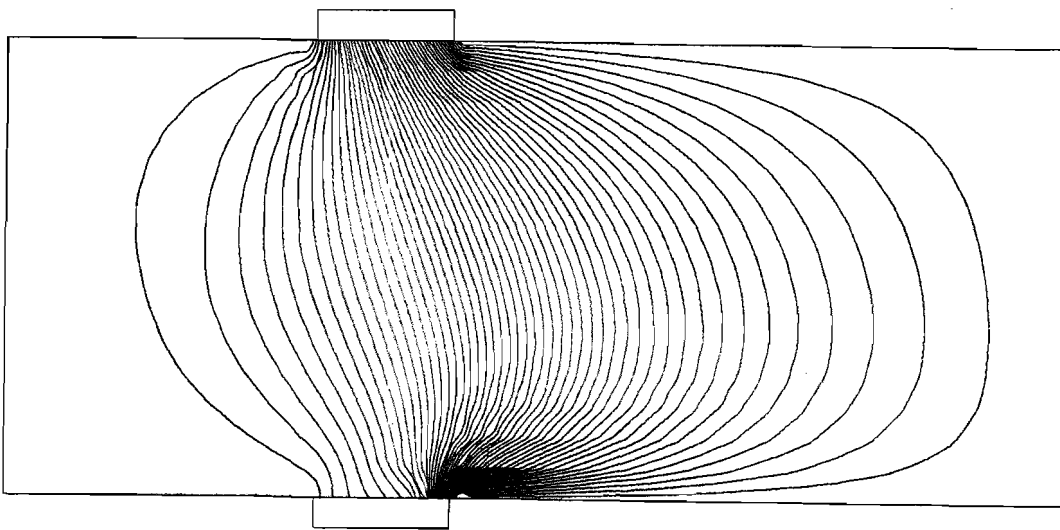


Fig. VI.7 Stroomverdeling in voorionisator bij
 $B = 0,1T$; $I = 100$ A na drie iteraties

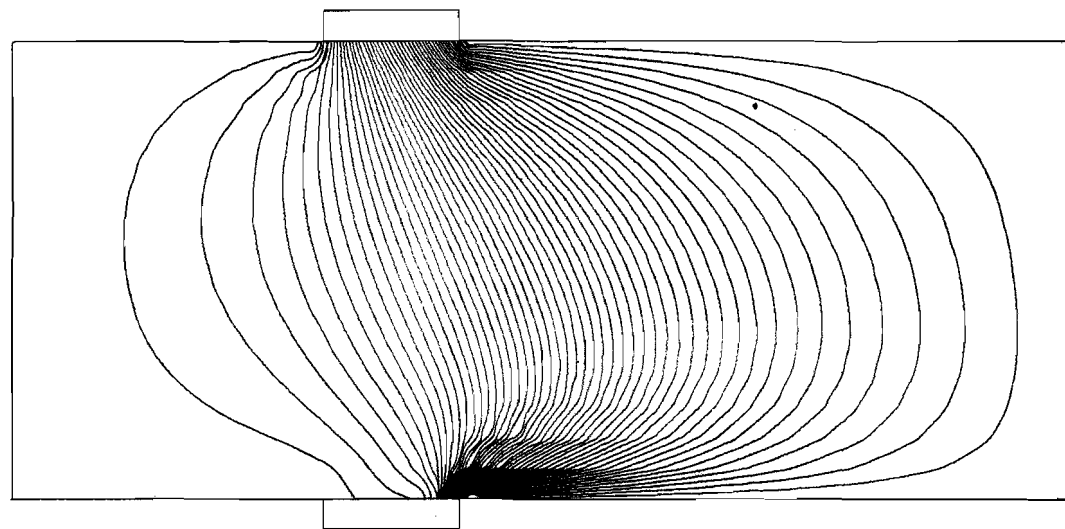


Fig. VI.8 Stroomverdeling in voorionisator bij
 $B = 0,1T$; $I = 100$ A na vier iteraties

- 34 -

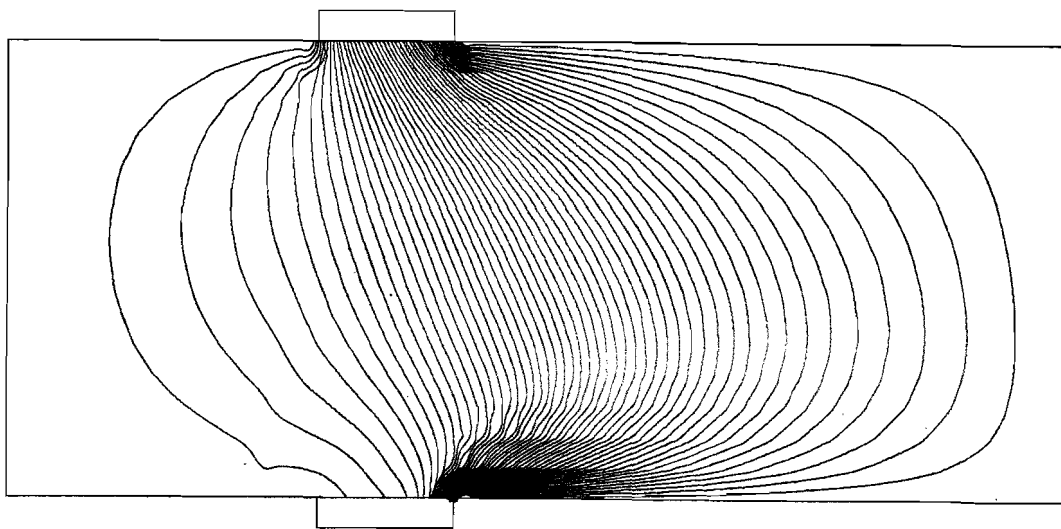


Fig. VI.9 Stroomverdeling in voorionisator bij
 $B = 0,1T$; $I = 100$ A na vijf iteraties

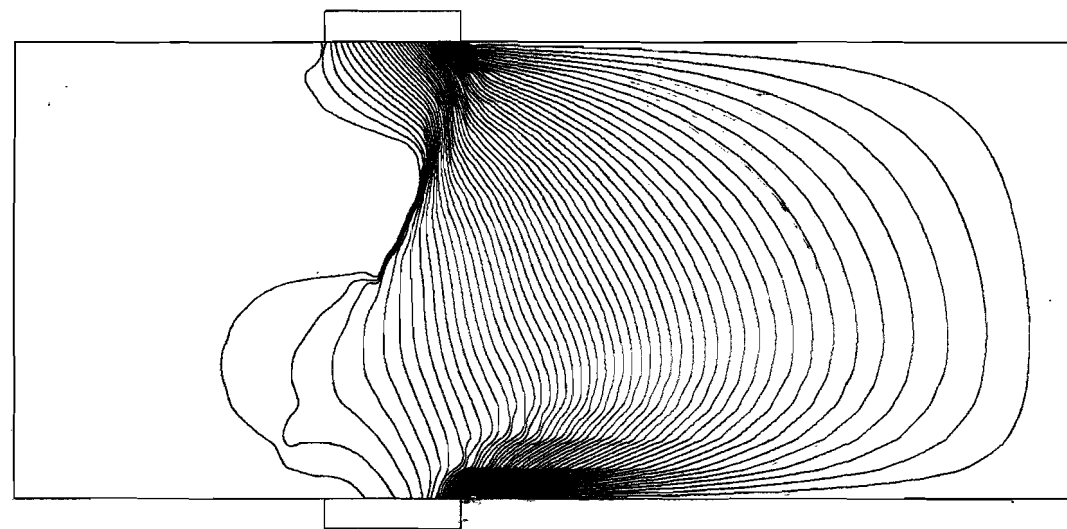


Fig. VI.10 Stroomverdeling in voorionisator bij
 $B = 0,1T$; $I = 100$ A na zes iteraties

VII. CONCLUSIES

Rekening houdend met het elliptisch-hyperbolisch karakter van het stelsel vergelijkingen, waaraan het fysisch model zoals beschreven in hoofdstuk IV voldoet, is een methode gevonden voor het oplossen van dit stelsel vergelijkingen.

In principe behoeft aan deze oplossing geen beperking opgelegd te worden voor de componenten van de stroomdichtheid zoals in [15] en [12] .

De relaxatielengte van de elektronendichtheid is in het geval $B = 0$ ongeveer de helft van de relaxatielengte bij $B = 0,1T$.

Wil men zich geen beperkingen opleggen in het verloop van het magneetveld als functie van x , dan moet het rekenprogramma uitgebreid worden om ook met negatieve u_{ey} , n_e en T_e te kunnen berekenen.

Om de beperking geheel op te heffen betreffende de componenten van de stroomdichtheid zal het iteratieschema van het rekenprogramma enige wijzigingen moeten ondergaan.

Een mogelijkheid daartoe lijkt n_e en T_e te berekenen:

a) over \vec{u} -lijnen en \vec{u}_e -lijnen

met als randvoorwaarde op de kathode voor T_e :

$$\frac{j}{\sigma} = \text{elast. verliezen}$$

b) niet simultaan, maar iteratief.

VIII. LIJST VAN SYMBOLEN

B	magnetische inductie
e	lading elektron
E	elektrisch veld
E_I	ionisatie-energie
H	lengte van de voorionisator in y-richting
I	aantal ionisaties per volume-eenheid en tijdseenheid
j	stroomdichtheid
k	konstante van Boltzmann
k_{fC}	ionisatiecoëfficiënt van cesium
k_{rC}	recombinatiecoëfficiënt van cesium
L	lengte van de voorionisator in x-richting
m	massa
n	dichtheid
p	druk
R	aantal recombinaties per volume-eenheid en tijdseenheid
t	tijd
T	temperatuur
u	snelheid
W	lengte van de voorionisator in z-richting
β	hallparameter
ϵ_0	diëlektrische konstante van vacuum
ν	botsfrequentie
σ	elektrisch geleidingsvermogen
ϕ	potentiaal
ψ	stroomfunctie

indices

$(\vec{\quad})$	vectorgrootheid
a	neutrale deeltjes
A	argon
C	cesium
e	elektronen
i	ionen
x,y,z	cartesische coördinaten

IX. REFERENTIES

- [1] Merck, W.F.H., On the fully developed turbulent compressible flow in an MHD generator, dissertatie (november 1971).
- [2] Veefkind, A., Non-equilibrium phenomena in a disc-shaped MHD generator, dissertatie (maart 1970).
- [3] Takeshita, T. and Grossman, L.M., Excitation and Ionization Processes in Non-Equilibrium MHD Plasmas, MHD Symposium, Warsaw, 1, 191-206, (1968).
- [4] Nighan, W.L., Low-Energy Electron Momentum Transfer Collisions in Cesium Plasmas, Phys. Fluids, 10, 1085-1094, (1967).
- [5] Spitzer, L., Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York/London, (1962).
- [6] Courant, R., Methods of mathematical physics, Vol. II, John Wiley and Sons, New York/London, (1962).
- [7] Boersma, J., Partiële Differentiaalvergelijkingen, collegedictaat Technische Hogeschool Eindhoven, (1970).
- [8] Oliver, D.A., Nonuniform electrical conduction in MHD channels, SU-IPR Report no. 163, Stanford, (May 1967).
- [9] Lengyel, L.L., Two dimensional current distributions in Faraday type MHD energy converters operating in the nonequilibrium conduction mode, Energy conversion, 9, 13-23, Pergamon Press, (1969).
- [10] Carré, B.A., The Determination of the Optimum Accelerating Factor for Successive Over-relaxation, Comp. J., 4, 73-78, (1961).
- [11] Koester, J.K. et al., Analytical and experimental studies of thermionically emitting electrodes in contact with dense, seeded plasmas, Proc. Eleventh Symp. on Eng. Asp. of MHD, 54-58, California (1970).

- [12] Ven, J.A.C. van de, Eindeffekten in een MHD-generator, afstudeerverslag Technische Hogeschool Eindhoven, (1971).

- [13] Jansen, J.K.M., Privé communicatie, Afdeling Wiskunde THE.

- [14] Veltkamp, G.W., Numerieke Wiskunde I, collegedictaat Technische Hogeschool Eindhoven, (1969).

- [15] Blom, J.H. and Houben, J.W.M.A., Relaxation length calculation in Ar-Cs mixtures for one- and two-dimensional pre-ionizer geometries, 5th Int. Cnf on MHD, Vol. II, 65-80, Munich (1971).

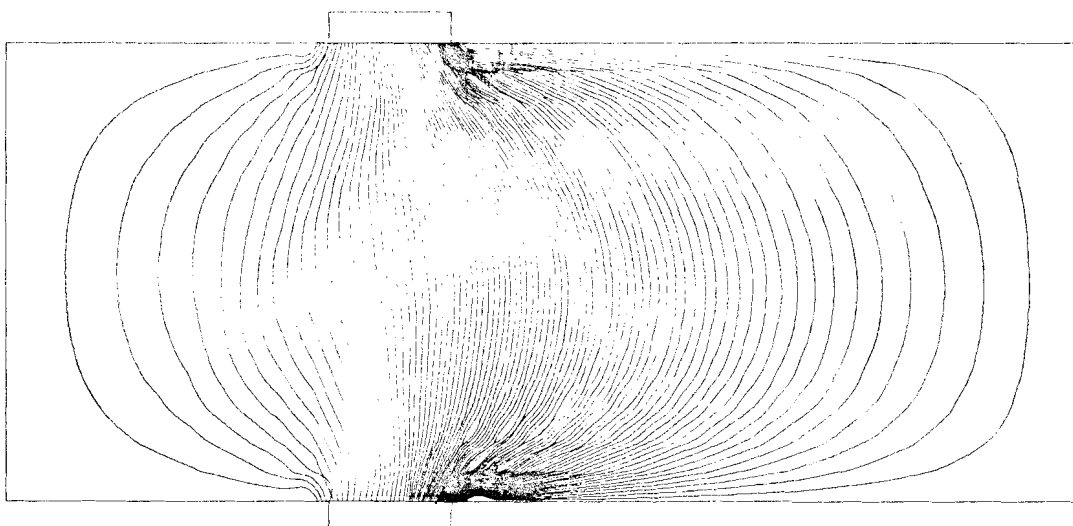


Fig. VI.2 Stroomverdeling in de voorionisator bij $B = 0$; $I = 80$ A
Interval van de stroomlijnen 10 A

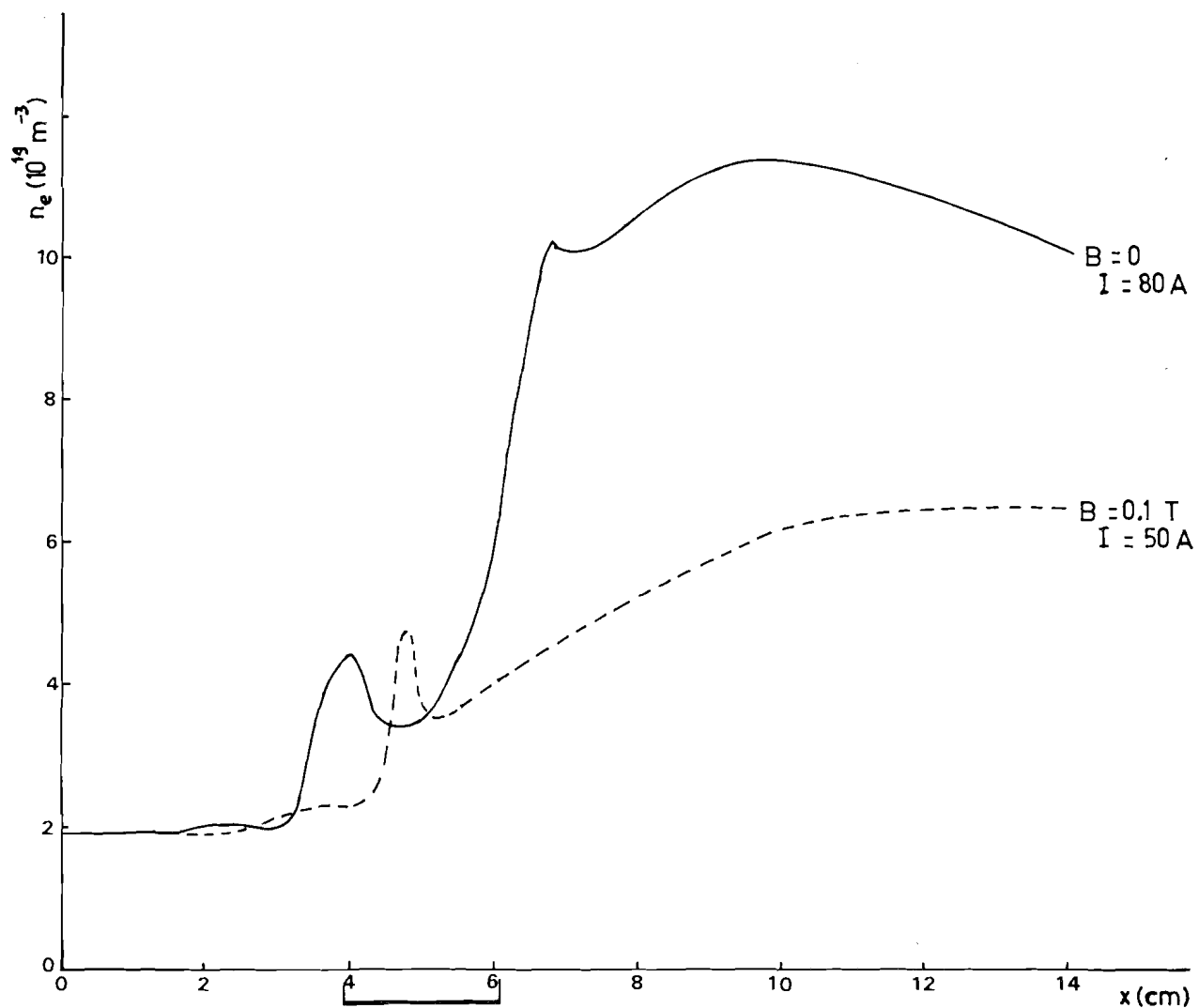


Fig. VI.3 Verloop van elektronendichtheid in het midden van de voorionisator

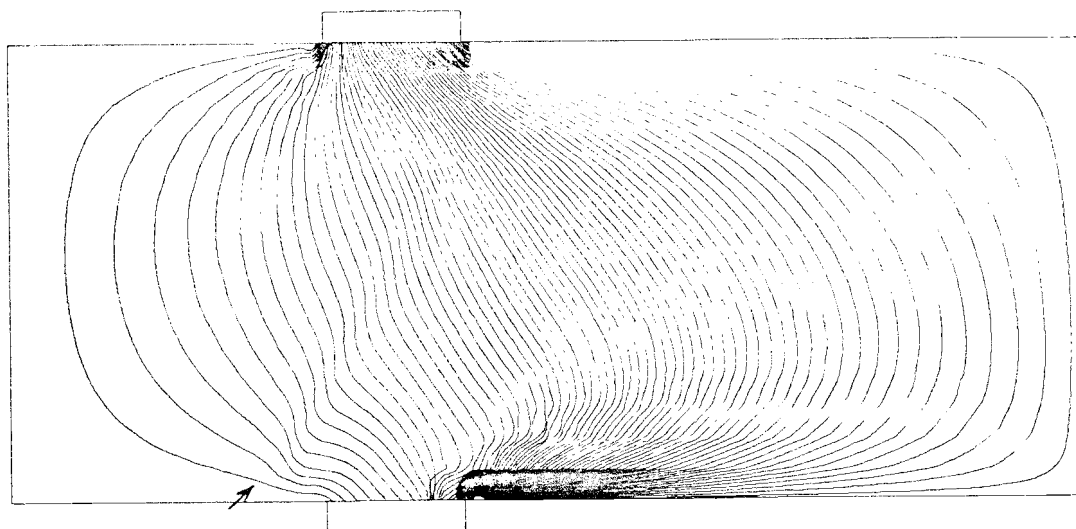


Fig. VI.6 Stroomverdeling in de voorionisator bij
 $B = 0,1T$; $I = 50 \text{ A}$
Interval van de stroomlijnen 8 A

Dientengevolge is de divergentie van de elektronensnelheid hier zeer groot. In de continuïteitsvergelijking en energievergelijking leidt dit ertoe dat als we de eindoplossing dicht genaderd zijn de termen $n_e \nabla \cdot \vec{u}_e$ en $p_e \nabla \cdot \vec{u}_e$ gaan overheersen ten opzichte van de andere termen in de rechterleden, waaruit volgt dat n_e en T_e alleen door $\nabla \cdot \vec{u}_e$ bepaald worden. Dit leidt tot een niet convergerende oplossing als we de stroomdichtheden in het kanaal gaan vergroten. Een duidelijke demonstratie hiervan wordt gegeven bij de berekening van een voorionisator waarbij $B = 0,1T$ en een stroom door de elektroden van 100 A . Fig. VI,7 geeft de stroomverdeling weer na drie iteraties, fig. VI,8 na vier iteraties, fig. VI,9 na vijf iteraties, fig. VI,10 na zes iteraties.