

MASTER

Energieabsorptie van extraordinaire golven in een inhomogeen magnetoplasma bij de "upperhybrid" resonantie

Denissen, A.J.M.

Award date:
1985

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK
VAKGROEP Theoretische Elektrotechniek

Energieabsorptie van extraordinaire
golven in een inhomogeen magnetoplasma
bij de "upperhybrid" resonantie,

door

A.J.M. Denissen

ET-14-85

Verslag van een afstudeeronderzoek,
verricht in de vakgroep ET, onder
leiding van Prof. Dr. M.P.H. Weenink,
in de periode febr. '84 - aug. '85.

Eindhoven, 19 september 1985.

De afdeling der Elektrotechniek van de Technische Hogeschool Eindhoven aanvaardt
geen aansprakelijkheid voor de inhoud van stage- en afstudeerverslagen.

Voorwoord
=====

Binnen de afdeling Theoretische Elektrotechniek heb ik deelgenomen aan een onderdeel van het onderzoek naar de golfvoortplanting in inhomogene media, onder leiding van prof. Dr. M.P.H. Weenink. Persoonlijk heb ik de afstudeerperiode als heel prettig en heel leerzaam ervaren.

In het bijzonder wil ik mijn dank uitspreken naar prof. Weenink, wiens suggesties telkens nieuwe wegen openden, voor de zeer prettige wijze waarop hij mij heeft begeleid.

Eindhoven, augustus 1985,

Ad Denissen.

Abstract

In this report the absorption coefficient is calculated of an electromagnetic wave with extraordinary polarization impinging perpendicularly on a cold magnetized plasma with a linearly varying density profile. The absorption occurs at the upper hybrid resonance only when the collision frequency between electrons and ions vanishes. The absorption in the lossless plasma is proportional to square of the electric field component which is perpendicular to both the static magnetic field and the density gradient.

The W.K.B.-method for solving the wave equation approximately, applied to a weakly inhomogeneous plasma, yields an absorption coefficient which is too small as compared by numerical solutions. However, both methods show a maximum in the absorption versus frequency graph at $\lambda (\omega_c/\omega)^{3/2} \approx 0,4$ ($\lambda = k_0 L = L/c$; $L =$ gradient length of the stratification; $\omega_c = eB_0/m$ = electron cyclotron frequency; $\omega =$ frequency of the wave) for a weakly inhomogeneous plasma ($\lambda \gg 1$). In a strong inhomogeneous plasma ($\lambda \ll 1$) the absorption is small, because the wave length is too large to form a standing wave between the position of resonance and the cut-off behind the resonance.

For $\lambda \approx 1$ the absorption profile shows more maxima. For $\lambda = 1$ the wave is almost completely absorbed, if $\omega_c/\omega \approx 0,4$. The effect of a nonzero collision frequency is calculated numerically. In this case the absorption is spread over the whole plasma rather than being restricted to the resonance region.

Samenvatting

In dit verslag berekenen we de absorptiecoëfficiënt van een extra-ordinaire E.M.-golf, die loodrecht invalt op een koud niet-botsingsloos plasma met een lineair dichtheidsprofiel en een homogene voormagnetisatie.

De Herlofson-paradox: " er treedt energieabsorptie op in een verliesvrij plasma als er een resonantie aanwezig is " wordt verklaard door de differentiaal vergelijking van een botsingsloos plasma af te leiden uit de niet-botsingsloze diff. vergl. m.b.v. de limiet $\nu/\omega \downarrow 0$.

In het botsingsloze plasma blijkt de absorptie evenredig te zijn met het kwadraat van de grootte van E_y -component op de upper-hybrid resonantie. M.b.v. de W.K.B.-methode is een benadering gemaakt voor de absorptie in een zwak inhomogeen plasma. Deze benadering geeft aan dat er een staande golf ontstaat in het plasma, zodat de absorptiekromme minima en maxima bevat overeenkomstig met de knopen en buiken in het $|E_y(\eta)|^2$ -profiel. De W.K.B.-benadering geeft echter een te kleine schatting voor de absorptie in vergelijking met de exacte numerieke berekeningen.

De numerieke berekeningen en de W.K.B.-benaderingen laten een duidelijk maximum in het absorptieprofiel zien bij $\lambda(\omega_c/\omega)^{3/2} \approx 0,4$ voor een zwak inhomogeen plasma ($\lambda \gg 1$). Voor een sterk inhomogeen plasma ($\lambda \ll 1$) treedt er nagenoeg geen absorptie op, omdat de golflengte van de golf te groot wordt om nog een staande golf te vormen in het plasma. M.a.w. de buik kan niet groot genoeg meer worden. Voor een plasma met $\lambda \approx 1$ vertoont het profiel allerlei interessante maxima. Voor $\lambda=1$ treedt er nagenoeg 100% absorptie op voor $(\omega_c/\omega) \approx 0,4$.

M.b.v. numerieke berekeningen is het effect van een eindige botsingsfrequentie tussen de elektronen en ionen onderzocht. Deze botsingen blijken voor een relatief grote extra absorptie te zorgen bij zwak inhomogene plasma's met sterke voormagnetisatie. Dit wordt vooral veroorzaakt door de invloed van de botsingen op de golfvorm.

20/12/71

W.K.B. benadering
niet nauwkeurig

Inhoudsopgave

	blz.
Voorwoord	2
Abstract	3
Samenvatting	4
Inhoudsopgave	5
Algemene inleiding	7
1. De systeembeschrijving	
1.0 Het plasma	8
1.1 De basisvergelijkingen	9
1.2 De rusttoestand van het plasma	11
1.3 De gelineariseerde basisvergelijkingen	12
1.4 De plasmatensor	14
2. De E.M.-golven in het plasma	
2.0 De golfvergelijking	16
2.1 De golftypen in een gelaagd plasma	17
3. De extra-ordinaire golf	
3.0 Inleiding	19
3.1 De extra-ordinaire golf	20
3.2 De vermogenshuishouding	24
4. De asymptotische benadering	
4.0 Inleiding	29
4.1 De methode van Langer ter benadering van $E_y(z)$	32
4.2 De asymptotische benaderingen voor $E_y(z)$	36
4.3 De absorptiecoëfficiënt $ A ^2$ voor $\lambda \gg 1$	43
5. De numerieke berekening $ A ^2$	
5.0 Inleiding	48
5.1 De Frobenius machtreeksontwikkeling	49
5.2 Een asymptotische uitdrukking voor $E_y(z)$	54

	blz.
5.3 De numerieke berekening van de absorptie	57
5.4 De resultaten	59
Literatuurlijst	67
Lijst van gebruikte symbolen en definities	68a
Appendix A: De brekingsindex $n^2(\eta)$ voor een botsingsloos plasma	69
Appendix B: Het Pascal-programma voor de berekening van de absorptiecoëfficiënt	72
Appendix C: De procedures voor operaties op complexe getallen uit te voeren	78

Algemene inleiding

In mijn afstudeerperiode heb ik de volgende doelstelling nagestreefd:

- een duidelijker inzicht verkrijgen in de plasmafysica in algemene zin,
- een praktische vaardigheid te verwerven in analytische en numerieke methoden om diff. vergl. met niet-constante coëfficiënten op te lossen,
- vaardigheid op te doen in het werken met een microcomputer als programmeerbare rekenmachine m.b.v. de hogere programmeertaal Pascal.

Als onderdeel van de plasmafysica wordt o.a. in de vakgroep theoretische elektrotechniek onderzoek gedaan naar de golfvoortplanting in inhomogene media. Deze golfvoortplanting speelt een rol bij ionosfeeronderzoek en bij kernfusie-onderzoek. Voor het kernfusie-onderzoek is het belangrijk een plasma op de juiste plaats tot een gewenste temperatuur te verhitten of nader te onderzoeken. In dit verslag wordt daarom de absorptie van E.M.-energie bij de upper-hybrid resonantie nader onderzocht.

In hoofdstuk 1+2 worden de basisvergelijkingen afgeleid voor de probleembeschrijving uit de Wetten van Maxwell en de bewegingsvergelijking van de elektronen m.b.v. de kleine signaal-theorie voor sinusvormige E.M.-golven. In hoofdstuk 3 wordt de tweede orde diff. vergl. met niet-constante coëfficiënten afgeleid voor een scheef invallende extra-ordinaire E.M.-golf. In dit verslag worden alleen loodrecht invallende E.M.-golven bestudeerd, maar de afgeleide diff. vergl. biedt een mooi aanknopingspunt voor een volgende afstudeerder. M.b.v. de vermogenshuishouding wordt de Herlofson-paradox: " er treedt absorptie op in een botsingsloos plasma precies ter plaatse van de upper-hybrid resonantie " verklaard.

In hoofdstuk 4 wordt de absorptie berekend voor een zwak inhomogeen plasma m.b.v. de W.K.B.-methode.

In hoofdstuk 5 wordt de absorptie exact berekend m.b.v. numerieke methoden voor een botsingsloos en niet-botsingsloos plasma.

Hoofdstuk 1 De systeembeschrijving

Hfd. 1.0 Het plasma

In dit verslag beschouwen we een plasma als een verzameling van elektronen en ionen, met de volgende veronderstellingen:

- a. Het plasma is gemiddeld elektrisch neutraal.
- b. De ionen zijn één-waardig positief geladen.
- c. De ionen staan stil, omdat hun massa veel groter is dan die van de elektronen.
- d. Het plasma is "koud", d.w.z. de bewegingen van de deeltjes, als gevolg van de temperatuur, worden verwaarloosd. Er is tevens geen diffusie van deeltjes.
- e. Alleen de botsingen tussen de elektronen en ionen worden beschouwd.
- f. Er treedt geen drift van het plasma op, d.w.z. de gemiddelde snelheid van de elektronen is nul in de rusttoestand ofwel in afwezigheid van de E.M.-golf.
- g. Er treedt geen polarisatie op in het plasma, d.w.z. $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E}$
- h. Er treedt geen magnetisatie op in het plasma, d.w.z. $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$

Hfd. 1.1 De Basisvergelijkingen

De grootheden van Elektro-Magnetische velden voldoen in een plasma aan de volgende Maxwell-vergelijkingen:

$$\nabla \times \underline{E} = - \partial_t \underline{B} \quad (1.1) \quad \nabla \cdot \underline{D} = \rho \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \partial_t \underline{D} \quad (1.3) \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (1.4)$$

met

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} \quad , \quad \underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} \quad (1.5)$$

Bij elke botsing draagt het elektron gemiddeld een impuls over van $m \underline{v}$, waarbij \underline{v} de elektron-snelheid is (als gevolg van het E.M.-veld in het plasma) en m de elektron-massa. Stel dat ν het effectieve aantal botsingen per seconde is ofwel de botsingsfrequentie, dan is de wrijfingskracht (die werkt op het elektron) gelijk aan de impulsverandering per seconde nl. $\nu m \underline{v}$. De krachtenbalans ofwel de bewegingsvergelijking voor één elektron komt er nu als volgt uit te zien:

$$\partial_t \underline{p} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{p} + \nu m \underline{v} = - e \cdot (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

met

$$\underline{p} = m \underline{v} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad , \quad v = |\underline{v}| \quad , \quad \rho = e (\eta_i - n) \quad , \quad \underline{j} = - e n \underline{v}$$

Voor de bovenstaande vergelijkingen gelden de volgende benamingen van de grootheden:

- \underline{E} : het elektrische veld
- \underline{D} : de dielektrische verplaatsing
- ρ : de ladingsdichtheid
- \underline{H} : het magnetische veld
- \underline{B} : de magnetische inductie
- \underline{v} : de gemiddelde snelheid van de elektronen
- \underline{j} : de stroomdichtheid van de elektronen
- e : de eenheid van elementaire lading
- m : de rustmassa van een elektron
- n : de dichtheid van de elektronen
- η_i : de dichtheid van de ionen

- \underline{p} : de impuls van een elektron
 ∇ : de vector-operator gelijk aan (j_x, j_y, j_z)
 c : de lichtsnelheid in vacuüm
 ϵ_0 : de elektrische permittiviteit van vacuüm
 μ_0 : de magnetische permeabiliteit van vacuüm

We beschouwen voorlopig alleen E.M.-velden in niet-relativistische situaties, waarvoor geldt dat:

$$|\underline{v}| \ll c \quad (1.8)$$

De bewegingsvergelijking vereenvoudigt dan tot:

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \underline{v} \underline{v} = -e/m (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \quad (1.9)$$

Hfd. 1.2 De rusttoestand van het plasma

Het plasma bevindt zich in een rusttoestand, als het gedurende voldoende lange tijd niet belicht is met E.M.-golven. Deze toestand wordt beschreven door de vergelijkingen (1.1) t/m (1.5), (1.7) en (1.9), waarbij de operator $\partial_t = 0$. We zullen de grootheden van deze toestand merken met een index = 0, zodat het stelsel vergelijkingen de volgende gedaante krijgt:

$$\nabla \times \underline{E}_0 = 0 \quad (1.10) \quad \nabla \cdot \underline{D}_0 = \rho_0 \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \underline{H}_0 = \underline{j}_0 \quad (1.12) \quad \nabla \cdot \underline{B}_0 = 0 \quad (1.13)$$

$$\underline{B}_0 = \mu_0 \underline{H}_0, \quad \underline{D}_0 = \epsilon_0 \underline{E}_0, \quad \underline{j}_0 = -e n_0 \underline{v}_0, \quad \rho_0 = e(n_{0i} - n_0) \quad (1.14)$$

$$(\underline{v}_0 \cdot \nabla) \underline{v}_0 + \nu \underline{v}_0 = -e/m (\underline{E}_0 + \underline{v}_0 \times \underline{B}_0) \quad (1.15)$$

Volgens veronderstelling f blijft het plasma gemiddeld op zijn plaats d.w.z.

$$\underline{v}_0 = 0 \quad (1.16a)$$

Uit de vergelijkingen (1.15) en (1.16a) volgt dan direct dat:

$$\underline{E}_0 = 0, \quad \underline{j}_0 = 0, \quad \underline{D}_0 = 0, \quad \rho_0 = 0, \quad n_0 = n_{0i} \quad (1.16b)$$

Uit de vergelijkingen (1.11) en (1.14) volgt nu:

$$\nabla \times \underline{B}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \underline{B}_0 = 0 \quad (1.17a)$$

Voor de vergelijkingen (1.17a) zijn talloze oplossingen te bedenken. Voorlopig zullen we voor \underline{B}_0 de eenvoudigste en meest praktische keuze doen, nl. een homogene voormagnetisatie. We kunnen zonder verlies aan algemeenheid het rechthoekige assenstelsel zodanig draaien, dat er geldt:

$$\underline{B}_0 = B_0 \hat{e}_z \quad (1.17b)$$

ofwel de voormagnetisatie \underline{B}_0 staat parallel aan de z-as.

De rusttoestand wordt nu gekenmerkt door de vergelijkingen (1.16) en (1.17) met als speciale keuze voor de voormagnetisatie:

$\underline{B}_0 =$ een constante vector in plaats en tijd parallel aan de z-as.

Hfd. 1.3 De gelineariseerde basisvergelijkingen

We belichten het plasma met een E.M.-golf en zijn geïnteresseerd in de voortplanting van deze golf. De E.M.-golven in het plasma kunnen we beschouwen als een verstoring (aangegeven met index = 1) gesuperponeerd op de rusttoestand (kleine signaal-theorie). De vergelijkingen (1.1) t/m (1.5), (1.7), (1.9) en (1.10), (1.16) en (1.17) beschrijven de E.M.-verschijnselen in het plasma met

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{E}_1, & \underline{D} &= \underline{D}_1, & \rho &= \rho_1, & n &= n_0 + n_1, \\ \underline{H} &= \underline{H}_0 + \underline{H}_1, & \underline{B} &= \underline{B}_0 + \underline{B}_1, & \underline{v} &= \underline{v}_1, & n_1 &= n_0 \quad (1.18) \\ \underline{j} &= \underline{j}_1, \end{aligned}$$

De basisvergelijkingen komen er nu als volgt uit te zien:

$$\nabla \times \underline{E}_1 = -\mu_0 \underline{j}_1, \quad (1.19) \quad \nabla \cdot \underline{D}_1 = \rho_1, \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \underline{H}_1 = \underline{j}_1 + \underline{j}_1, \quad (1.21) \quad \nabla \cdot \underline{H}_1 = 0 \quad (1.22)$$

$$\underline{D}_1 = \epsilon_0 \underline{E}_1, \quad \rho_1 = -e n_1, \quad \underline{j}_1 = -e n_1 \underline{v}_1, \quad (1.23)$$

$$\underline{j}_1 = -e n_1 \underline{v}_1, \quad \underline{j}_1 = -e n_1 \underline{v}_1, \quad (1.24)$$

Wanneer we veronderstellen dat de golf slechts kleine verstoringen in de rusttoestand teweeg brengt, ofwel

$$n_1 \ll n_0, \quad |(\underline{v}_1 \cdot \nabla) \underline{v}_1| \ll |\underline{j}_1|, \quad |\underline{B}_1| \ll |\underline{B}_0| \quad (1.25)$$

dan reduceert de vergelijking (1.24) tot een lineaire vergelijking (na verwaarlozing van de kleiner veronderstelde niet-lineaire termen):

$$\underline{j}_1 = -e n_1 \underline{v}_1, \quad \underline{j}_1 = -e n_1 \underline{v}_1, \quad (1.26)$$

Voorlopig belichten we het plasma met harmonisch tijdafhankelijke E.M.-golven:

$$\underline{E}_1(\underline{r}, t) = \text{Re} \left[\underline{E}_1(\underline{r}, \omega) e^{+i\omega t} \right]$$

waarbij ω de hoekfrequentie van de invallende harmonische golf is.

Omdat de belichting harmonisch is, zullen alle verstoringen zich op den duur harmonisch gaan gedragen, zodat de operator \underline{j}_1 overeenkomt met $i\omega$.

Het stelsel lineaire basisvergelijkingen in het ω -domein wordt nu:

$$\nabla \times \underline{E}_1 = -\mu_0 i\omega \underline{H}_1 \quad (1.28) \qquad \nabla \cdot \underline{D}_1 = -\epsilon n_1 \quad (1.29)$$

$$\nabla \times \underline{H}_1 = \underline{j}_1 + i\omega \underline{D}_1 \quad (1.30) \qquad \nabla \cdot \underline{H}_1 = 0 \quad (1.31)$$

$$\underline{D}_1 = \epsilon_0 \underline{E}_1 \quad , \quad \underline{j}_1 = -\epsilon n_0 \underline{v}_1 \quad (1.32)$$

$$i\omega \underline{v}_1 + \underline{v}_1 \underline{v}_1 = -\epsilon/m (\underline{E}_1 + \underline{v}_1 \times \underline{B}_0) \quad (1.33)$$

Hfd. 1.4 De plasmatensor

Uit de gelineariseerde bewegingsvergelijking (1.33) en de stroomdichtheid (1.32b)

$$i\omega \underline{v}_1 + \nu \underline{v}_1 = -e/m (\underline{E}_1 + \underline{v}_1 \times \underline{B}_0) \quad , \quad \underline{j}_1 = -e n_0 \underline{v}_1$$

volgt:

$$(i\omega + \nu) \underline{j}_1 = \frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} \underline{E}_1 - \frac{e B_0}{m} \underline{j}_1 \times \hat{z}_2 \quad (1.34)$$

We definiëren de plasma-resonantiefrequentie ω_p en de elektron-cyclotron-resonantiefrequentie ω_c als volgt:

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} \quad , \quad \omega_c = \frac{e B_0}{m} \quad (1.35)$$

zodat er geldt:

$$\begin{aligned} \omega_p^2 \epsilon_0 \underline{E}_1 &= (i\omega + \nu) \underline{j}_1 + \omega_c \underline{j}_1 \times \hat{z}_2 \\ &= \underline{\lambda} \cdot \underline{j}_1 \end{aligned} \quad (1.36)$$

met

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} i\omega + \nu & \omega_c & 0 \\ -\omega_c & i\omega + \nu & 0 \\ 0 & 0 & i\omega + \nu \end{bmatrix}$$

Volgens de regel van Cramer geldt er:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c & -d & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

met

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad , \quad d = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad , \quad e = \frac{1}{a}$$

Het verband tussen \underline{j}_1 en \underline{E}_1 , kunnen we nu, zoals gebruikelijk, met een tensor $\underline{\sigma}$ als volgt weergeven:

$$\underline{j}_1 = \epsilon_0 \underline{\sigma} \cdot \underline{E}_1 \quad (1.38)$$

met

$$\underline{\sigma} = \omega_p^2 \underline{\lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

$$\sigma_1 = \frac{\omega_p^2 (\omega + \nu)}{(i\omega + \nu)^2 + \omega_c^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{(i\omega + \nu)^2 + \omega_c^2}, \quad \sigma_3 = \frac{\omega_p^2}{i\omega + \nu}$$

Uit de vergelijkingen (1.30) en (1.32a) volgt met (1.38) dat

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H}_1 &= \underline{j}_1 + i\omega \epsilon_0 \underline{E}_1 \\ &= i\omega \epsilon_0 \left(\underline{I} + \frac{1}{i\omega} \underline{\sigma} \right) \cdot \underline{E}_1 \\ &= i\omega \epsilon_0 \underline{\epsilon} \cdot \underline{E}_1, \quad \underline{\epsilon} = \underline{I} + \frac{1}{i\omega} \underline{\sigma} \end{aligned} \quad (1.40)$$

zodat de plasmator tensor $\underline{\epsilon}$ er als volgt uit ziet:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -\epsilon_2 & 0 \\ \epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$\epsilon_1 = 1 + \frac{\omega_p^2 (i\omega + \nu)}{i\omega [(i\omega + \nu)^2 + \omega_c^2]} = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega - i\nu)}{\omega (\omega - i\nu - \omega_c) (\omega - i\nu + \omega_c)} \quad (1.42)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{i\omega [(i\omega + \nu)^2 + \omega_c^2]} = \frac{i\omega_p^2 \omega_c}{\omega (\omega - i\nu - \omega_c) (\omega - i\nu + \omega_c)} \quad (1.42b)$$

$$\epsilon_3 = 1 + \frac{\omega_p^2}{i\omega (i\omega + \nu)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega - i\nu)} \quad (1.42c)$$

Hoofdstuk 2 De E.M.-golven in het plasma

Hfd. 2.0 De golfvergelijking

Vergelijking (1.40) geeft:

$$\nabla \times \underline{H}_1 = i\omega \epsilon_0 \underline{\epsilon} \cdot \underline{E}_1 \quad (1.40)$$

en uit de rotatie van vergelijking (1.28) volgt:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E}_1 + i\omega \mu_0 \nabla \times \underline{H}_1 = 0$$

zodat de golfvergelijking voor \underline{E}_1 luidt:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E}_1 - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \underline{\epsilon} \cdot \underline{E}_1 = 0$$

ofwel

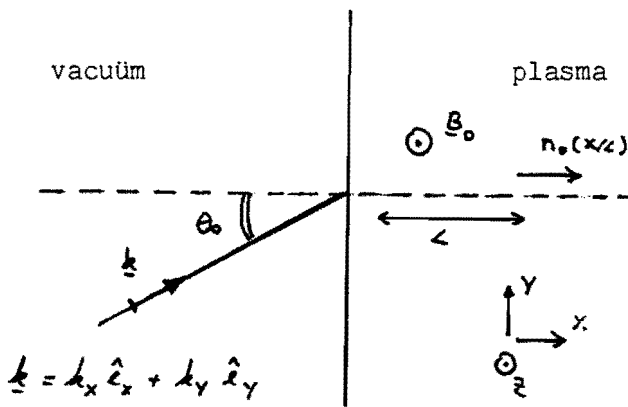
$$\nabla^2 \underline{E}_1 - \nabla(\nabla \cdot \underline{E}_1) + k_0^2 \underline{\epsilon} \cdot \underline{E}_1 = 0 \quad (2.1)$$

met $k_0 = \omega/c$.

We zien dus dat de plasmatensor $\underline{\epsilon}$ het karakter van de E.M.-golf volledig bepaalt. Vergelijking (2.1) beschrijft de \underline{E}_1 -component van de golf, die door de vergelijking van Maxwell (1.28) gekoppeld is aan de \underline{H}_1 -component.

Hfd. 2.1 De golftypen in een gelaagd plasma

In dit verslag beschouwen we een elektro-magnetische golf, die vanuit vacuüm scheef invalt op een inhomogeen gelaagd plasma. De golf plant zich voort in een plasma met bekende ionen-dichtheid $n_0(x/L)$ en een karakteristieke uitgestrektheid L . De voortplantingsrichting van de golf in het vacuüm \underline{k} maakt een hoek θ_0 met de gradient van de dichtheid $n_0'(x) \hat{e}_x$ in het plasma (zie figuur 2.0).



Figuur 2.0 Het gelaagde plasma

Als gevolg van de gelaagdheid is de plasmatensor $\underline{\epsilon}(x)$ alleen afhankelijk van de x-coördinaat, en zal elke E.M.-golf zich in één vlak voortplanten, ofwel

$$\underline{E}_i(x, y) = \underline{E}(x) e^{-i k_y y} \quad (2.2) \quad \nabla \hat{=} (j_x, j_y, 0) \quad (2.3)$$

De golfvergelijking (2.1) uitgeschreven in componenten, komt er dan als volgt uit te zien:

$$-k_y^2 E_x(x) - i k_y E_y'(x) + k_0^2 [\epsilon_1 E_x(x) - \epsilon_2 E_y(x)] = 0 \quad (2.4)$$

$$i k_y E_x'(x) + E_y''(x) + k_0^2 [\epsilon_2 E_x(x) + \epsilon_1 E_y(x)] = 0 \quad (2.5)$$

$$E_2''(x) + [k_0^2 \epsilon_3(x) - k_y^2] E_2(x) = 0 \quad (2.6)$$

waarbij het accent een differentiatie naar het argument voorstelt.

Uit de bovenstaande vergelijkingen (2.4) t/m (2.6) blijkt dat we een invallende golf met willekeurige E_x , E_y en E_z -componenten, kunnen splitsen in twee golf-typen, die elkaar niet beïnvloeden:

- a. De ordinare golf ofwel de (H_x, H_y, E_z) -mode met

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = 0 \quad (2.7)$$

$$E_z''(x) + [k_0^2 \epsilon_2(x) - k_y^2] E_z(x) = 0 \quad (2.8)$$

Deze golf kan niet voor plasma-verhitting zorgen, omdat de E_z -component loodrecht staat op de gradient van de dichtheid. In het verder verslag zullen we de mode niet nader meer bestuderen.

- b. De extra-ordinaire golf ofwel de (E_x, E_y, H_z) -mode met

$$-k_y^2 E_x(x) - i k_y E_y'(x) + k_0^2 [\epsilon_1(x) E_x(x) - \epsilon_2(x) E_y(x)] = 0 \quad (2.9a)$$

$$i k_y E_x'(x) + E_y''(x) + k_0^2 [\epsilon_2(x) E_x(x) + \epsilon_1(x) E_y(x)] = 0 \quad (2.9b)$$

$$E_z = 0 \quad (2.9c)$$

Deze golf kan wel voor plasma-verhitting zorgen, en zal in het verdere verslag nog nader bestudeerd worden.

Hoofdstuk 3 De extra-ordinaire golf

Hfd. 3.0 Inleiding

In dit hoofdstuk zullen we de vergelijkingen afleiden, die het gedrag van de E_x - en E_y -componenten van de extra-ordinaire E.M.-golf beschrijven. De golf valt onder een hoek θ_0 scheef in op een inhomogeen gelaagd plasma (zie figuur 2.0) met een bekende ionen-dichtheid $n_0(x/L)$ en een karakteristieke uitgestrektheid L . De golfvector in vacuüm is dus gelijk aan:

$$\underline{k} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y = k_0 [\cos \theta_0 \hat{e}_x + \sin \theta_0 \hat{e}_y] \quad (3.0)$$

De zogenaamde W.K.B-parameter λ is gelijk aan $k_0 L$. Deze parameter is groot als het plasma zwak inhomogeen is, d.w.z. de dichtheid verandert veel langzamer in de plaats dan de E_y -component. De lengte L kunnen we bijvoorbeeld als volgt definiëren:

$$\lambda := \omega_p^2(x) \left[\frac{d}{dx} \omega_p^2(x) \right]^{-1} \Big|_{x=x_{res}} \quad (3.1)$$

waarbij x_{res} de plaats van de upper-hybrid resonantie is.

De vergelijkingen voor een botsingsloos plasma ($\nu/\omega = 0$) worden bepaald met de limiet-overgang $\nu/\omega \downarrow 0$. Door de vergelijkingen op deze wijze af te leiden, wordt de Herlofson paradox "er treedt absorptie op in een botsingsloos plasma ter plaatse van de upper-hybrid resonantie" nader verklaard voor loodrecht invallende golven.

Hfd. 3.1 De extra-ordinaire golf

De extra-ordinaire golf wordt beschreven door twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen (2.9a) en (2.9b) uit hoofdstuk 2. Met behulp van (2.9a) kunnen we E_x uitdrukken in E_y en $E_y'(x)$ nl.

$$E_x(x) = \frac{k_0 \epsilon_2 E_y - i \sin \theta_0 E_y'(x)}{k_0 (\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0)} \quad (3.2)$$

zodat

$$E_x'(x) = \frac{[k_0 (\epsilon_2 E_y)' - i \sin \theta_0 E_y''(x)] [\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0] - [k_0 \epsilon_2 E_y - i \sin \theta_0 E_y'(x)] E_y'(x)}{k_0 [\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0]^2} \quad (3.3)$$

met

$$\begin{aligned} \epsilon_1(x) &= 1 - \frac{\omega_p^2(x)(\omega - i\nu)}{\omega(\omega - i\nu - \omega_c)(\omega - i\nu + \omega_c)} \\ &= 1 - \frac{f r(x)}{f^2 - s^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\epsilon_2(x) = \frac{i \omega_p^2(x) \omega_c}{\omega(\omega - i\nu - \omega_c)(\omega - i\nu + \omega_c)} = \frac{i s r(x)}{f^2 - s^2} \quad (3.5)$$

waarbij

$$f = 1 - i\nu/\omega, \quad r(x) = \omega_p^2(x)/\omega^2, \quad s = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (3.6)$$

Het invullen van (3.2) en (3.3) in (2.9b) resulteert in een homogene lineaire tweede orde diff.vergelijking met niet constanten coëfficiënten in E_y :

$$\begin{aligned} & \epsilon_1 (\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0) E_y''(x) \\ & - \sin^2 \theta_0 \epsilon_1'(x) E_y'(x) \\ & + k_0^2 (\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0) [\epsilon_1 (\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0) + \epsilon_2^2] E_y(x) \\ & + i k_0 \sin \theta_0 [(\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0) \epsilon_2'(x) - \epsilon_1'(x) \epsilon_2] E_y(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Met behulp van de vergelijkingen (3.4) en (3.5) kunnen we herleiden dat:

$$(\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0) \epsilon_1'(x) - \epsilon_1'(x) \epsilon_2 = \frac{is \cos^2 \theta_0}{\delta^2 - s^2} r'(x)$$

en

$$\epsilon_1 (\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0) + \epsilon_2^2 = \cos^2 \theta_0 - \frac{(1 + \cos^2 \theta_0) \delta r - r^2}{\delta^2 - s^2}$$

We kunnen diff. vergelijking (3.7) nu herschrijven in de genormeerde plaats-coördinaat $\eta = x/\lambda$:

$$P(\eta) E_y''(\eta) + Q(\eta) E_y'(\eta) + [R_1(\eta) + R_2(\eta)] E_y(\eta) = 0 \quad (3.8a)$$

met

$$P(\eta) = [\delta^2 - s^2 - \delta r(\eta)] [(\delta^2 - s^2) \cos^2 \theta_0 - \delta r(\eta)] \quad (3.8b)$$

$$Q(\eta) = (\delta^2 - s^2) \sin^2 \theta_0 r'(\eta) \quad (3.8c)$$

$$R_1(\eta) = \lambda^2 [(\delta^2 - s^2) \cos^2 \theta_0 - \delta r(\eta)] [(\delta^2 - s^2) \cos^2 \theta_0 - \delta(1 + \cos^2 \theta_0) r(\eta) + r^2(\eta)] \quad (3.8d)$$

$$R_2(\eta) = -\lambda s (\delta^2 - s^2) \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 r'(\eta) \quad (3.8e)$$

en

$$E_x(\eta) = i \frac{\lambda s r(\eta) E_y(\eta) - (\delta^2 - s^2) \sin \theta_0 E_y'(\eta)}{\lambda [(\delta^2 - s^2) \cos^2 \theta_0 - \delta r(\eta)]} \quad (3.8f)$$

M.b.v de differentiaalvergelijking (3.8) met een tweetal randvoorwaarden kunnen we de E_x - en E_y -componenten van de scheef invallende extra-ordinaire golf in een inhomogeen gelaagd koud niet-botsingsloos plasma bepalen.

Als we alleen de extra-ordinaire golven beschouwen, die evenwijdig aan de dichtheidsgradient invallen, ofwel $\theta_0 = 0$, dan reduceert (3.8) tot:

$$E_y''(\eta) + \lambda^2 \frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta r(\eta) + r^2(\eta)}{\delta^2 - s^2 - \delta r(\eta)} E_y(\eta) = 0 \quad (3.9a)$$

$$E_x(\eta) = i \frac{s r(\eta)}{\delta^2 - s^2 - \delta r(\eta)} E_y(\eta) \quad (3.9b)$$

Wanneer we tevens de botsingsfrequentie ν verwaarlozen ofwel limiet $\nu/\omega \downarrow 0$, dan reduceert (3.9) volgens de berekeningen uit appendix A tot:

$$E_y''(\eta) + \lambda^2 \left[\frac{1-s^2-2r(\eta)+r^2(\eta)}{1-s^2-r(\eta)} - \frac{i\pi s^2(1-s^2)}{|r'(\eta_{res})|} \delta_D(\eta-\eta_{res}) \right] E_y(\eta) = 0 \quad (3.10a)$$

met

$$E_x(\eta) = \frac{isr(\eta)}{1-s^2-r(\eta)} E_y(\eta) \quad (3.10b)$$

waarbij de Dirac-delta functie $\delta_D(\eta)$ voort komt uit:

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\alpha}{t^2 + \alpha^2} = \pi \delta_D(t)$$

De upperhybrid resonantie treedt op de plaats(en) η_{res} op, waar geldt:

$$r(\eta_{res}) = 1-s^2 \quad \text{ofwel} \quad \omega^2 = \omega_p^2(\eta) + \omega_c^2 \hat{=} \omega_{UH}^2(\eta) \quad (3.12)$$

Uit het onderstaande betoog zal blijken dat voor een praktische berekening van $E_y(\eta)$ rondom η_{res} we de term met de Dirac-delta functie uit (3.10a) kunnen verwaarlozen, m.a.w.

$$E_y''(\eta) + \lambda^2 \frac{1-s^2+2r(\eta)+r^2(\eta)}{1-s^2-r(\eta)} E_y(\eta) = 0 \quad (3.13)$$

Met $z = \eta - \eta_{res}$ geldt er voor $|z| \ll 1$ dat bij benadering elke dichtheidsprofiel $r(z)$ te benaderen is met een rechte, ofwel

$$r(z) = 1-s^2 + r_1 z \quad (3.14)$$

zodat voor $|z| \ll 1$ de vergelijkingen (3.13) en (3.10b) te benaderen zijn met:

$$E_y''(z) + \lambda^2 \frac{s^2(1-s^2)}{r_1 z} E_y(z) = 0 \quad (3.15a)$$

$$E_x(z) = \frac{is(1-s^2)}{r_1 z} E_y(z) \quad (3.15b)$$

Met behulp van de Frobenius machtreeks substitutie (zie hfd. 5.1) kunnen we een oplossing voor $E_y(z)$ construeren voor $|z| \ll 1$:

$$E_y(z) = c_1 E_{y_1}(z) + c_2 E_{y_2}(z) \quad (3.16)$$

met

$$E_{y_1}(z) \simeq z - \frac{1}{z} s^2 (1-s^2) \frac{\lambda^2}{r_1} z^2 \quad (3.17a)$$

$$E_{y_2}(z) \simeq s^2 (1-s^2) \frac{\lambda^2}{r_1} z \ln z - 1 \quad (3.17b)$$

Daar $z \in \mathbb{R}$ moeten we de definitie voor $\ln(z)$ uitbreiden voor $z < 0$ ofwel

$$\ln z := \ln |z| + i\pi u(-z) \quad (3.18)$$

waarbij $u(z)$ de eenheidsstap functie is, zodat (3.17b) verandert in:

$$E_{y_2}(z) \simeq s^2 (1-s^2) \frac{\lambda^2}{r_1} z [\ln |z| + i\pi u(-z)] - 1 \quad (3.17b')$$

Uit de formules (3.17a) en (3.17b') blijkt dat $E_y(z)$ continu en begrensd is in het resonantie punt $z = 0$. De E_x -component explodeert met $1/z$ in het punt $z = 0$, wat resulteert in een absorptie omdat E_x evenwijdig is met de gradient van de dichtheid. De absorptie wordt nader bestudeerd in hfd. 3.2.

De oplossing (3.17a) blijkt na invulling te voldoen aan zowel de vergelijkingen (3.10a) als (3.13). Uit (3.17b') volgt echter

$$E_{y_2}''(z) \simeq s^2 (1-s^2) \frac{\lambda^2}{r_1} \left[\frac{1}{z} - i\pi \delta_D(z) \right] \quad (3.19)$$

zodat (3.17b') alleen een oplossing is van de oorspronkelijke vergl. (3.10a).

M.a.w. we mogen de Dirac-delta functie in (3.10a) verwaarlozen als we $\ln(z)$ in de oplossing $E_{y_2}(z)$ maar goed continu voortzetten naar $z < 0$.

Dus voor een praktische berekening van $E_y(\eta)$ kunnen we diff. vergl. (3.13) gebruiken i.p.v. (3.10a) waarbij we de continue voortzetting van de oplossing rondom het resonantie-punt met zorg uit moeten voeren.

Hfd. 3.2 De vermogenshuishouding

De Poynting-vector

$$\underline{S}_1 := \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{E}_1^* \times \underline{H}_1] \quad \text{WATT/m}^2 \quad (3.20)$$

geeft een indruk van het elektromagnetisch vermogenstransport in het plasma. Door de gelaagdheid van het plasma heeft alleen de S_{1x} -component een praktische betekenis.

We kunnen het gedissipeerde vermogen $P_{\text{diss}}(\eta)$ als volgt definiëren

$$P_{\text{diss}}(\eta) = -S_{1x}'(\eta) \quad (3.21)$$

M.a.w. de afname aan E.M.-energie is gelijk aan de toename van de inwendige energie van het plasma. Deze toename kan resulteren in een toename van de thermische snelheid van de elektronen ofwel de elektronen temperatuur stijgt t.g.v. de dissipatie van E.M.-energie (plasma verhitting).

Het totale E.M.-vermogen dat door het plasma geabsorbeerd wordt is nu gelijk aan:

$$P_{\text{abs}} = \int_0^{+\infty} P_{\text{diss}}(\eta) d\eta = - \int_0^{+\infty} S_{1x}'(\eta) d\eta = S_{1x}(0) - S_{1x}(\infty) \quad (3.22)$$

Wanneer we veronderstellen dat het plasma met toenemende η steeds dichter wordt voor grote η , dan volgt uit de vergl. (3.13) en (3.10b) dat de E_x - en E_y -componenten verdwenen zullen zijn voor grote η , ofwel

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} E_{1x}(\eta) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} E_{1y}(\eta) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} H_{1z}(\eta) = 0 \quad (3.23)$$

zodat tevens $S_{1x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E_{1y}^*(\eta) H_{1z}(\eta)] = 0$ voor $\eta \rightarrow +\infty$.

De berekening van de Poynting-vector \underline{S}_1 gaat als volgt. Uit de Fourier-getransformeerde wet van Maxwell

$$\nabla \times \underline{E}_1 = -i\mu_0 \omega \underline{H}_1$$

volgt met $\nabla = \partial_x \hat{e}_x + \partial_y \hat{e}_y$

$$\underline{H}_1 = \frac{i}{\mu_0 \omega} (\partial_x E_{1y} - \partial_y E_{1x}) \hat{e}_z$$

$$\rightarrow H_{1z} = \frac{i}{\mu_0 \omega} [E_y'(x) + i k_y E_x(x)] e^{-i k_y y}$$

$$E_{1y}^* H_{1z} = \frac{+i E_y^*(x)}{\mu_0 \omega} \left[E_y'(x) + i k_y E_x(x) \right]$$

M.b.v. (3.2) geeft dit:

$$E_{1y}^* H_{1z} = \frac{i E_y^*(x)}{\mu_0 \omega} \left[\frac{[\delta^2 - s^2 - \delta r(x)] E_y'(x) - k_0 \sin \theta_0 s r(x) E_y(x)}{(\delta^2 - s^2) \cos^2 \theta_0 - \delta r(x)} \right]$$

$$\begin{aligned} S_{rx} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E_{1y}^* H_{1z}] \\ &= \frac{1}{2 \mu_0 \omega} \operatorname{Re} \left[\frac{i [\delta^2 - s^2 - \delta r(x)]}{(\delta^2 - s^2) \cos^2 \theta_0 - \delta r(x)} E_y^*(x) E_y'(x) \right] \\ &\quad + \frac{k_0 \sin \theta_0 s r(x) |E_y(x)|^2}{2 \mu_0 \omega} \operatorname{Re} \left[\frac{-i}{(\delta^2 - s^2) \cos^2 \theta_0 - \delta r(x)} \right] \quad (3.24) \end{aligned}$$

Als we alleen extra-ordinaire golven beschouwen, die evenwijdig aan de x-as invallen, ofwel $\theta_0 = 0$, dan reduceert (3.24) tot:

$$S_{rx}(x) = \frac{1}{2 \mu_0 \omega} \operatorname{Im} [E_y(x) E_y'^*(x)]$$

ofwel in het plaatsgenormeerde systeem:

$$S_{rx}(\eta) = (2 \mu_0 \omega L)^{-1} \operatorname{Im} [E_y(\eta) E_y'^*(\eta)] \quad \text{Watt/m}^2 \quad (3.25)$$

Voor $\eta \leq 0$ geldt er $r(\eta) = 0$ (vacuüm), zodat met $\theta_0 = 0$ er uit (3.9) volgt:

$$E_y''(\eta) + \lambda^2 E_y(\eta) = 0, \quad E_x(\eta) = 0, \quad \eta \leq 0$$

ofwel:

$$E_y(\eta) = E_{y, \text{in}}(\eta) + E_{y, \text{uit}}(\eta) \quad (3.26)$$

met

$$E_{y, \text{in}}(\eta) = e^{-i\lambda\eta}, \quad E_{y, \text{uit}}(\eta) = R e^{+i\lambda\eta}, \quad R \in \mathbb{C}$$

Het plasma wordt dus bestraald met een transversale extra-ordinaire golf met amplitude 1, waarvan een gedeelte $|R|^2$ aan electromagnetische energie weer teruggekaatst wordt, nl.:

$$S_{rx}(0) = (2\mu_0 \omega L)^{-1} \operatorname{Im} \left\{ \left[e^{-i\lambda \eta} + R e^{+i\lambda \eta} \right] \left[-i\lambda e^{-i\lambda \eta} + i\lambda e^{+i\lambda \eta} \right]^* \right\}$$

$$= \frac{k_0}{2\mu_0 \omega} [1 - |R|^2] \quad (3.27)$$

$$P_{in} = (2\mu_0 \omega L)^{-1} \operatorname{Im} [E_{y,in}(\eta) E_{y,in}^*(\eta)] = \frac{k_0}{2\mu_0 \omega}$$

$$P_{uit} = (2\mu_0 \omega L)^{-1} \operatorname{Im} [E_{y,uit}(\eta) E_{y,uit}^*(\eta)] = \frac{k_0}{2\mu_0 \omega} |R|^2$$

M.b.v. (3.22), (3.23) en (3.27) kunnen we een absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ definiëren, die aangeeft hoe groot het gedeelte is dat geabsorbeerd wordt, relatief t.o.v. het vermogen van de invallende golf P_{in} :

$$P_{abs} = P_{in} - P_{uit} = \frac{k_0}{2\mu_0 \omega} [1 - |R|^2] := \frac{k_0}{2\mu_0 \omega} |A|^2 \quad (3.28)$$

Voor de golf in het plasma ($\eta \geq 0$) met $\theta_0 = 0$ geldt er:

$$E_y''(\eta) + \lambda^2 \frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta r(\eta) + r^2(\eta)}{\delta^2 s^2 - \delta r(\eta)} E_y(\eta) = 0 \quad (3.9a)$$

$$\text{en } E_x(\eta) = \frac{isr(\eta)}{\delta^2 s^2 - \delta r(\eta)} E_y(\eta) \quad (3.9b)$$

$$\text{met } \lim_{\eta \rightarrow +\infty} E_y(\eta) = 0 \quad (3.23)$$

M.b.v. de tweede orde D.V. (3.9) en de randvoorwaarde (3.23) wordt $E_y(\eta)$ bepaald tot op een constante factor na:

$$E_y(\eta) = C Y(\eta) \quad , \quad C \in \mathbb{C} \quad (3.29)$$

waarbij $Y(\eta)$ een oplossing is van de D.V. (3.9) en voldoet aan de randvoorwaarde (3.23).

Om nu C te bepalen moeten we de invallende vlakke golf (3.26) koppelen aan (3.29) op het scheidingsvlak tussen het vacuüm en het plasma ($\eta=0$). Dit koppelen houdt in dat $E_y(\eta)$ en $H_z(\eta)$ continu moeten zijn op $\eta=0$, ofwel $E_y(\eta)$ en $E'_y(\eta)$, zodat er moet gelden:

$$e^{-i\lambda\eta} + R e^{+i\lambda\eta} = C Y(\eta) \Big|_{\eta=0}$$

$$-i\lambda e^{-i\lambda\eta} + i\lambda R e^{+i\lambda\eta} = C Y'(\eta) \Big|_{\eta=0}$$

ofwel:

$$1 + R = C Y(0) \tag{3.30}$$

$$-i\lambda + i\lambda R = C Y'(0)$$

Uit het stelsel (3.30) volgt direct:

$$\begin{bmatrix} Y(0) & -1 \\ Y'(0) & -i\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\lambda \end{bmatrix}$$

zodat

$$C = \frac{2i\lambda}{i\lambda Y(0) - Y'(0)}, \quad R = \frac{i\lambda Y(0) + Y'(0)}{i\lambda Y(0) - Y'(0)} \tag{3.31}$$

Volgens (3.28) is

$$|A|^2 := 1 - |R|^2 = 1 - \frac{\lambda^2 |Y(0)|^2 + i\lambda Y(0) Y''(0) - i\lambda Y'(0) Y(0) + |Y'(0)|^2}{\lambda^2 |Y(0)|^2 - i\lambda Y(0) Y''(0) + i\lambda Y'(0) Y(0) + |Y'(0)|^2}$$

$$= \frac{4\lambda \Im [Y(0) Y''(0)]}{\lambda^2 |Y(0)|^2 + 4\lambda \Im [Y(0) Y''(0)] + |Y'(0)|^2} \tag{3.32}$$

Uit (3.32) blijkt dus duidelijk dat we $Y(0)$ en $Y'(0)$ moeten weten om $|A|^2$ te kunnen bepalen. Hoe we $Y(\eta)$ bepalen wordt in hoofdstuk 4 uiteengezet.

Om meer begrip van het absorptieproces te verkrijgen, gaan we $P_{\text{diss}}(\eta)$ eens nader analyseren voor loodrechte inval:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{diss}}(\eta) &:= -S_{yx}'(\eta) & (3.21) \\
 &= \frac{-i}{\mu_0 \omega L} \frac{d}{d\eta} [E_Y(\eta) E_Y''(\eta) - E_Y^*(\eta) E_Y'(\eta)] \\
 &= \frac{-i}{\mu_0 \omega L} [E_Y(\eta) E_Y''(\eta) - E_Y^*(\eta) E_Y'(\eta)] \\
 &= (2\mu_0 \omega L)^{-1} \text{Im} [E_Y^*(\eta) E_Y''(\eta)]
 \end{aligned}$$

Uit D.V. (3.9) volgt:

$$E_Y''(\eta) = -\lambda^2 \frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta r(\eta) + r^2(\eta)}{\delta^2 - s^2 - \delta r(\eta)} E_Y(\eta)$$

zodat:

$$P_{\text{diss}}(\eta) = \frac{\lambda^2 |E_Y(\eta)|^2}{2\mu_0 \omega L} \text{Im} \left[\frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta r(\eta) + r^2(\eta)}{\delta^2 - s^2 - \delta r(\eta)} \right] \quad (3.33)$$

Voor het speciale geval dat we de botsingsfrequentie verwaarlozen ($\lim \nu \downarrow 0$), geldt er (zie appendix A):

$$P_{\text{diss},0}(\eta) = \frac{\lambda^2 |E_Y(\eta)|^2}{2\mu_0 \omega L} \frac{\pi s^2 (1-s^2)}{|r'(\eta_{\text{res}})|} \delta_D(\eta - \eta_{\text{res}})$$

met $r(\eta_{\text{res}}) = 1-s^2$, zodat volgens (3.22):

$$P_{\text{abs}} = \begin{cases} \frac{\lambda^2 |E_Y(\eta_{\text{res}})|^2}{2\mu_0 \omega L} \frac{\pi s^2 (1-s^2)}{|r'(\eta_{\text{res}})|} & , 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & , s > 1 \end{cases} \quad (3.34)$$

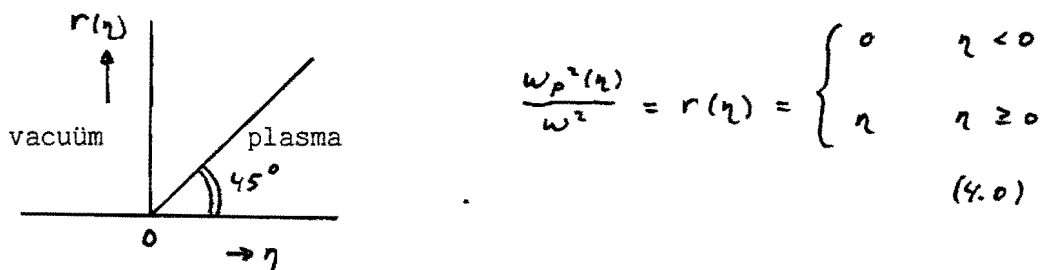
M.a.w. wanneer het plasma een upper-hybrid resonantie bevat ($\eta = \eta_{\text{res}}$) dan vindt er in het plasma absorptie plaats, geconcentreerd rond het resonantie-punt, terwijl de botsingsfrequentie verwaarloosd is. D.w.z. de electronen en ionen botsen niet.

Hoofdstuk 4 Een asymptotische benadering

Hfd. 4.0 Inleiding

In dit hoofdstuk zullen we een methode bespreken, waarmee het mogelijk is om voor een botsingsloos en zwak inhomogeen ($\lambda \gg 1$) plasma, de absorptiecoëfficiënt $|A(\lambda, s)|^2$ te bepalen.

In het navolgende zal het lineaire dichtheidsprofiel nader worden geanalyseerd:



Figuur 4.0 Het lineaire dichtheidsprofiel

Volgens de afleiding in hoofdstuk 3 wordt de extra-ordinaire golf, die zich voortplant langs de dichtheidsgradiënt, in een niet-botsingsloos plasma nu beschreven door:

$$E_y''(\eta) + \lambda^2 \frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta\eta + \eta^2}{\delta^2 - s^2 - \delta\eta} E_y(\eta) = 0 \quad (4.0.a)$$

met

$$E_x(\eta) = i \frac{s\eta}{\delta^2 - s^2 - \delta\eta} E_y(\eta) \quad \text{en} \quad \delta = 1 - i\nu/\omega \quad (4.0.b)$$

We voeren nu een nieuwe plaatscoördinaat z in, nl.:

$$z = \delta\eta - \delta^2 + s^2, \quad dz = \delta d\eta, \quad \eta = \frac{z + \delta^2 - s^2}{\delta} \quad (4.1)$$

zodat

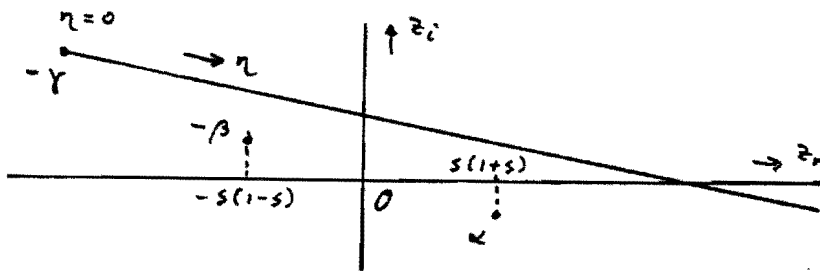
$$E_y''(z) - \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^2 \frac{z^2 - 2s^2z - s^2(\delta^2 - s^2)}{z} E_y(z) = 0 \quad (4.2)$$

$$E_y''(z) - \left(\frac{\lambda}{\delta^2}\right)^2 \frac{(z-\alpha)(z+\beta)}{z} E_y(z) = 0 \quad (4.2a)$$

$$E_x(z) = -is(z + \delta^2 - s^2)/z E_y(z) \quad (4.3)$$

met $\alpha = s(\delta + s)$, $\beta = s(\delta - s)$, $\gamma = \delta^2 - s^2$, $0 < s < 1$

In figuur 4.1 is de complexe coördinaat $z = z_r + i.z_i$ getekend in het complexe vlak, met als baan-parameter de reële dichtheitscoördinaat .



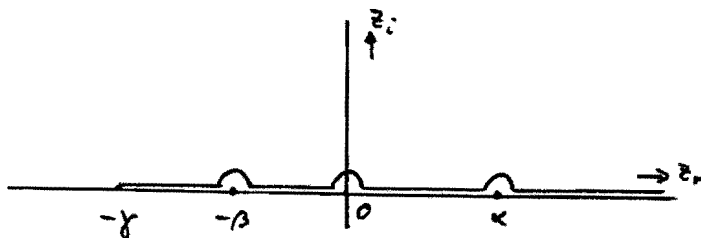
Figuur 4.1 De contour van z voor $u = \gamma/\omega > 0$, $0 < s < 1$ volgens (4.1).

Uit vergl.(4.1) volgt direct de relatie:

$$z_i = -u z_r + u(1 + u^2 + s^2)$$

waaruit blijkt dat α en $-\beta$ onder de contour liggen.

In dit hoofdstuk beschouwen we een botsingsloos plasma, d.w.z. $\lim \gamma/\omega \downarrow 0$, zodat de contour van z uit figuur 4.1 continu vervormt tot de contour in figuur 4.2.



Figuur 4.2 De contour van z voor een botsingsloos plasma.

De heuveltjes in figuur 4.2 geven aan dat de punten $-\beta$, 0 en α onder de contour moeten liggen. Deze ligging is belangrijk voor de continue voortzetting van oplossingen voor de punten.

De vergelijkingen voor een botsingsloos plasma komen er nu als volgt uit te zien:

$$E_y''(z) - \lambda^2 \frac{(z-\alpha)(z+\beta)}{z} E_y(z) = 0 \quad (4.4)$$

en

$$E_x(z) = -i \frac{s(z+1-s^2)}{z} E_y(z) \quad (4.5)$$

met $\alpha = s(1+s)$, $\beta = s(1-s)$ en $\gamma = 1-s^2$ met $0 < s < 1$.

De methode die in dit hoofdstuk gebruikt gaat worden, wordt in de literatuur ook wel W.K.B.-methode genoemd. We gebruiken eerst de methode van Langer, en maken van de gevonden oplossingen weer asymptotische benaderingen voor $\lambda \gg 1$. Deze laatste vormen de W.K.B.-oplossingen.

Hfd. 4.1 De methode van Langer ter benadering van $E_y(z)$

Wanneer we proberen de onderstaande D.V. op te lossen,

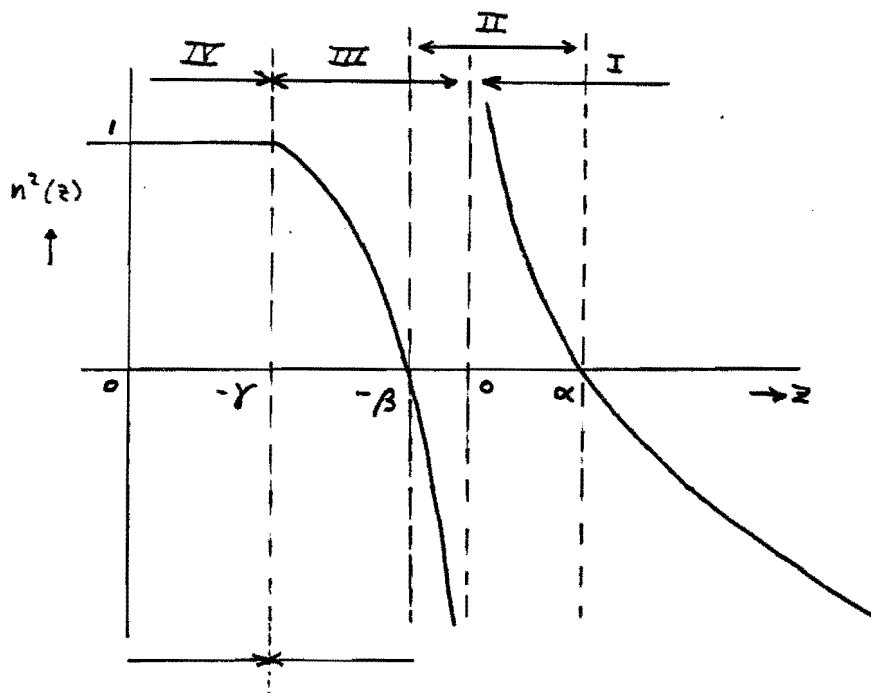
$$z E_y''(z) - \lambda^2 (z - \alpha)(z + \beta) E_y(z) = 0 \quad (4.4)$$

dan blijkt dat er geen exacte oplossing in gesloten vorm te vinden is. We zullen tevreden moeten zijn met oplossingen van vergelijkbare vergelijkingen, die (4.4) in verschillende gebieden van z dicht benaderen.

Het is voor de hand liggend om het gehele systeem in 4 gebieden te verdelen:

- gebied I, rondom de tweede afsnijfrequentie, $z = \alpha$
- gebied II, rondom de upper-hybrid resonantie, $z = 0$
- gebied III, rondom de eerste afsnijfrequentie, $z = -\beta$
- gebied IV, het vacuüm gedeelte, $z < -\gamma$

Deze indeling is geïnspireerd door de brekingsindex als functie van z te tekenen (zie figuur 4.3).



Figuur 4.3 De brekingsindex $n^2(z) = \frac{(\alpha - z)(z + \beta)}{z}$ van een koud en botsingsloos plasma.

In de buurt van de twee afsnijfrequenties heeft de brekingsindex $n^2(z)$ bij benadering een lineair profiel, zodat rondom de punten $z = -\beta$ en $z = \alpha$ de oplossing $E_y(z)$ bij benadering bestaat uit een lineaire combinatie van Hankel-functies van orde $1/3$ in de eerste en tweede soort (ofwel Airy functies).

Toepassing van de methode van Langer geeft dat vgl.(4.4) rondom de afsnijfrequenties vergeleken mag worden met de volgende D.V.:

$$u''(z) - \left[\lambda^2 (\phi')^2 - \frac{5}{36} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{\phi''}{\phi'} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi'''}{\phi'} \right) \right] u(z) = 0 \quad (4.6)$$

die als exacte oplossing heeft:

$$u(z) = \left(\phi(z) / \phi'(z) \right)^{1/2} H_{1/3}^{(1,2)} \left[e^{\pm \frac{1}{2} \pi i} \lambda \phi(z) \right] \quad (4.7)$$

waarbij $H_{1/3}^{(1,2)}(z)$ de Hankel-functies van de eerste en tweede soort van orde $1/3$ zijn. Als we de functie $\phi(z)$ zodanig kiezen dat:

$$\left[\phi'(z) \right]^2 = \frac{(z - \alpha)(z + \beta)}{z} \quad (4.8)$$

dan verschilt (4.6) erg weinig van (4.4) voor $\lambda \gg 1$, behalve in de buurt van $z=0$. We verwachten nu dat de oplossing van (4.4) erg veel zal lijken op de oplossing (4.7). Dit is het principe van de methode van Langer. M.a.w. we zouden (4.7) en (4.8) verkregen hebben als we de methode van Langer hadden toegepast op (4.4) in de buurt van de afsnijfrequenties.

In de buurt van de upper-hybrid resonantie ($z=0$) heeft de brekingsindex bij benadering een profiel dat evenredig is met $1/z$, zodat rondom het punt $z=0$ de oplossing $E_y(z)$ bij benadering bestaat uit een lineaire combinatie van Hankel functies van orde 1 in de eerste en tweede soort (ofwel Bessel-functies van orde 1).

Toepassing van de methode van Langer geeft dat vergelijking (4.4) rondom de upper-hybrid resonantie vergeleken mag worden met de volgende D.V.:

$$v''(z) + \left[\lambda^2 (\psi')^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\psi''}{\psi'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi'''}{\psi'} \right) \right] v(z) = 0 \quad (4.9)$$

met als exacte oplossing:

$$V(z) = (\psi/\psi')^{1/2} H_1^{(1,2)} [\lambda \psi] \quad (4.10)$$

waarbij $H_1^{(1,2)}(z)$ de eerste en tweede soort Hankel-funkties van de eerste orde zijn. Als we de funktie $\psi(z)$ zodanig kiezen dat

$$[\psi'(z)]^2 = \frac{(\alpha - z)(z + \beta)}{z} \quad (4.11)$$

dan verschilt de oplossing van (4.4) erg weinig van vergl. (4.10), op grond van het Langer-principe, behalve in de buurt van de punten $z = -\beta$ en $z = \alpha$.

In gebied I ($0 < z < \infty$) kunnen we de oplossing voor $E_y(z)$ goed benaderen met:

$$E_{yI}(z) = T (\phi/\phi')^{1/2} H_{1/3}^{(2)} (e^{-\frac{1}{2}\pi i} \lambda \phi) \quad (4.12)$$

met

$$\phi(z) = \int_{\alpha}^z \left[\frac{(x - \alpha)(x + \beta)}{x} \right]^{1/2} dx \quad (4.12a)$$

In (4.12) hebben we alleen de Hankel-funktie van de tweede soort gekozen omdat voor elke fysische oplossing van $E_y(z)$ moet gelden:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} E_{yI}(z) = 0 \quad (3.23)$$

In de gebieden II en III kunnen we de oplossing voor $E_y(z)$ goed benaderen met:

$$E_{yII}(z) = \left(\frac{\psi}{\psi'} \right)^{1/2} [A H_1^{(1)}(\lambda \psi) + B H_1^{(2)}(\lambda \psi)] \quad (4.13)$$

met

$$\psi(z) = \int_0^z \left[\frac{(\alpha - x)(x + \beta)}{x} \right]^{1/2} dx \quad \text{voor} \quad -\beta < z < \alpha \quad (4.13a)$$

en

$$E_{yIII}(z) = \left(\frac{\chi}{\chi'} \right)^{1/2} [C H_{1/3}^{(2)}(e^{-\frac{1}{2}\pi i} \lambda \chi) + D H_{1/3}^{(1)}(e^{-\frac{1}{2}\pi i} \lambda \chi)] \quad (4.14)$$

met

$$\chi(z) = \int_{-\beta}^z \left[\frac{(\alpha - x)(x + \beta)}{-x} \right]^{1/2} dx \quad \text{voor} \quad -\gamma \leq z < 0 \quad (4.14a)$$

en tenslotte in gebied IV (het vacuüm-gedeelte):

$$E_{yIV}(z) = e^{-i\lambda(z+\gamma)} + R e^{+i\lambda(z+\gamma)} \quad z \leq -\gamma \quad (4.15)$$

We zijn nu in staat de reflectiecoëfficiënt R te bepalen, want we kunnen de complexe constanten T, A, B, C, D en R nader bepalen door twee benaderingen te koppelen op elk overlappingsgebied. D.w.z. we moeten het volgende stelsel van 6 lineaire vergelijkingen met de 6 onbekenden oplossen:

$$\begin{aligned} E_{yI}(z_1) &= E_{yII}(z_1) & E_{yI}'(z_1) &= E_{yII}'(z_1) & 0 < z_1 < \infty \\ E_{yII}(z_2) &= E_{yIII}(z_2) & E_{yII}'(z_2) &= E_{yIII}'(z_2) & -\beta < z_2 < 0 \\ E_{yIII}(z_3) &= E_{yIV}(z_3) & E_{yIII}'(z_3) &= E_{yIV}'(z_3) & z_3 = -\gamma \end{aligned} \quad (4.16)$$

De plaats van de punten z_1 en z_2 mogen we in principe vrij kiezen uit de toegestane intervallen resp. $0 < z_1 < \infty$ en $-\beta < z_2 < 0$. Het punt z_3 ligt precies op de overgang vacuüm-plasma, d.w.z. we koppelen een transversale extra-ordinaire E.M.-golf met reflectie aan de oplossing in het plasma. Als we de absorptiecoëfficiënt $|A|^2 = 1 - |R|^2$ op deze wijze berekenen dan zal de formule voor $|A|^2$ erg lang en onoverzichtelijk zijn. De benaderingen voor $E_y(z)$ zijn vooral goed als $\lambda \gg 1$. We kunnen daarom beter de methode van Ting-Wei-Tang [zie lit. 2], en asymptotische uitdrukkingen van de benaderingen maken. Deze uitdrukkingen zijn immers ook goede benaderingen voor $E_y(z)$ op de koppelpunten ($z=z_1$, $z=z_2$ en $z=z_3$) en de verkregen formule voor $|A|^2$ verschaft meer inzicht in het probleem, en is simpeler te bepalen.

Hfd. 4.2 De asymptotische benaderingen voor $E_{\gamma}(z)$

In het handboek van Abramowitz [zie lit. 3 hfd. 9 Bessel Functions of Integer Order] kunnen we de asymptotische uitdrukkingen voor de Hankel-functies opzoeken. Bijvoorbeeld in gebied I kunnen we $E_{\gamma I}(z)$ benaderen met:

$$f_{I,r}(z) \approx T \left(\frac{z}{\sigma\lambda} \right)^{1/2} \left[\frac{z}{(z-\alpha)(z+\beta)} \right]^{1/4} e^{-\lambda\phi + i z^{2\pi/3}} \quad \alpha < z < \infty \quad (4.17)$$

met

$$\phi(z) = \int_{\alpha}^z \left[\frac{(x-\alpha)(x+\beta)}{x} \right]^{1/2} dx \quad (4.12a)$$

Op het interval $0 < z < \alpha$ moeten we eerst $\phi(z)$ continu voortzetten m.b.v. de definitie (4.12a) en de contour van z uit figuur 4.2, zodat

$$\phi(z) = e^{3/2 \pi i} |\phi(z)|, \quad \phi'(z) = e^{\pi i} |\phi'(z)| \quad (4.18)$$

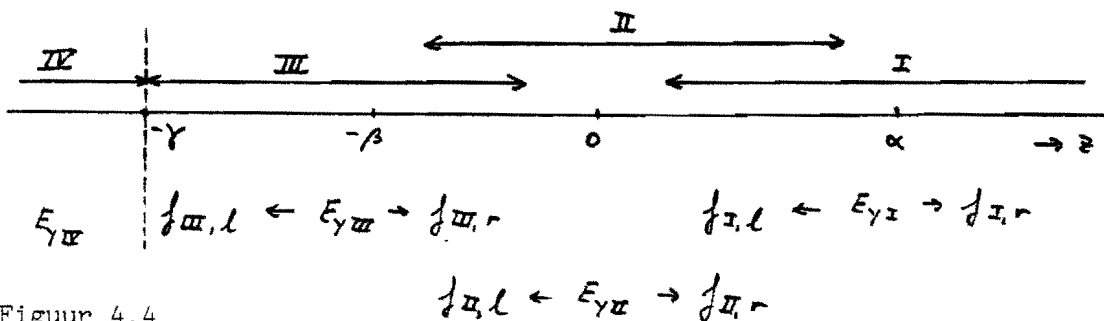
met

$$|\phi(z)| = \int_z^{\alpha} \left[\frac{(\alpha-x)(x+\beta)}{x} \right]^{1/2} dx \quad 0 < z < \alpha \quad (4.19)$$

M.b.v. het handboek [formules 9.1.38 en 9.2.3 + 9.2.4] vinden we een benadering:

$$f_{I,l}(z) \approx T e^{1/2 \pi i} \left(\frac{z}{\sigma\lambda} \right)^{1/2} \left(\frac{z}{(\alpha-z)(z+\beta)} \right)^{1/4} \cdot \left[e^{-i(\lambda|\phi| - \frac{5}{12}\pi)} + e^{1/3 \pi i} e^{i(\lambda|\phi| - \frac{5}{12}\pi)} \right] \quad (4.20)$$

De asymptotische benaderingen met hun intervallen, waarin ze de grootste nauwkeurigheid bezitten, zijn symbolische weergegeven in figuur 4.4.



Figuur 4.4

De overige benaderingen worden op soortgelijke wijze bepaald, en komen er dan als volgt uit te zien:

$$f_{II,r}(z) \approx \left(\frac{z}{\pi\lambda}\right)^{1/2} \left[\frac{z}{(\alpha-z)(z+\beta)}\right]^{1/4} \left[A e^{i(\lambda\psi - 3/4\pi)} + B e^{-i(\lambda\psi - 3/4\pi)} \right] \quad (4.21)$$

$$\psi(z) = \int_0^z \left[\frac{(\alpha-x)(x+\beta)}{x} \right]^{1/2} dx, \quad 0 < z < \alpha$$

$$f_{II,l}(z) \approx e^{i\pi/4} \left(\frac{z}{\pi\lambda}\right)^{1/2} \left[\frac{z}{(z-\alpha)(z+\beta)}\right]^{1/4} \cdot \left[(A-B) e^{-(\lambda|\psi| + i3\pi/4)} + B e^{\lambda|\psi| + i3\pi/4} \right] \quad (4.22)$$

$$|\psi(z)| = \int_z^0 \left[\frac{(x-\alpha)(x+\beta)}{x} \right]^{1/4} dx, \quad -\beta < z < 0 \quad (4.22a)$$

en

$$f_{III,r}(z) \approx e^{i\pi/4} \left(\frac{z}{\pi\lambda}\right)^{1/2} \left[\frac{z}{(z-\alpha)(z+\beta)}\right]^{1/4} \cdot \left[C e^{-\lambda x + i5\pi/12} + D e^{\lambda x - i5\pi/12} \right] \quad (4.23)$$

$$X(z) = \int_{-\beta}^z \left(\frac{(x-\alpha)(x+\beta)}{x} \right)^{1/2} dx, \quad -\beta < z < 0 \quad (4.23a)$$

$$f_{III,l}(z) \approx e^{i\frac{5\pi}{12}} \left(\frac{z}{\pi\lambda}\right)^{1/2} \left[\frac{z}{(\alpha-z)(z+\beta)}\right]^{1/4} \cdot \left[\left(C + \frac{1}{2} D e^{-i\pi/3} \right) e^{i\lambda|x|} + i \left(-\frac{1}{2} D e^{-i\pi/3} \right) e^{-i\lambda|x|} \right] \quad (4.24)$$

$$|X(z)| = \int_z^{-\beta} \left[\frac{(\alpha-x)(x+\beta)}{x} \right]^{1/2} dx, \quad -\gamma \leq z < -\beta \quad (4.24a)$$

We kunnen nu de constanten A en B uitdrukken in T, door in het gebied $0 < z < \alpha$ de benaderingen $f_{I,1}(z)$ en $f_{II,r}(z)$ asymptotisch te matchen. Hieruit volgt direct:

$$A = T e^{-i(\lambda L + \pi/3)}, \quad B = T e^{+i(\lambda L - \pi/3)} \quad (4.25)$$

$$L(s) = \int_0^{\alpha} \left[\frac{(\alpha - x)(x + \beta)}{x} \right]^{1/2} dx$$

De factoren $e^{\pm i\lambda L}$, die in vergelijking (4.25) voorkomen, zijn de fasedraaiingen die de golf ondergaat tijdens de reis door het plasma van de punten $z=0$ naar $z=\alpha$.

Evenzo zijn de constanten C en D uit te drukken in A en B, door in het gebied $-\beta < z < 0$ de benaderingen $f_{II,1}(z)$ en $f_{III,r}(z)$ met elkaar te vergelijken. Hieruit volgt direct:

$$C = B e^{\lambda m + i\pi/3}, \quad D = (A - B) e^{-(\lambda m + i\pi/3)} \quad (4.26)$$

$$m(s) = \int_{-\beta}^0 \left[\frac{(x - \alpha)(x + \beta)}{x} \right]^{1/2} dx$$

De faktor $e^{-\lambda m}$ representeert de demping van de golf tijdens de tunneling door evanescente gebied $-\beta < z < 0$.

Ting-Wei Tang defineert nu de reflectiecoëfficiënt R_t als volgt:

$$|R_T| = \left| \frac{C - \frac{1}{2} D e^{-i\pi/3}}{C + \frac{1}{2} D e^{-i\pi/3}} \right| \quad (4.27)$$

ofwel

$$|R_T|^2 = \frac{e^{2\lambda m} - 2 \sin^2(\lambda L) + e^{-2\lambda m} \sin^2(\lambda L)}{e^{2\lambda m} + 2 \sin^2(\lambda L) + e^{-2\lambda m} \sin^2(\lambda L)} \quad (4.28)$$

zodat

$$|A_T|^2 = \frac{4 e^{-2\lambda m} \sin^2(\lambda L)}{1 + e^{-2\lambda m} \sin^2(\lambda L) [2 + e^{-2\lambda m}]} \quad \lambda \gg 1 \quad (4.29)$$

Deze definitie is niet helemaal correct, omdat $f_{\text{III},1}(z)$ geen vlakke golf is en er dus geen reflectiecoëfficiënt éénduidig definieerbaar is. We kunnen de reflectie R veel beter definiëren door $f_{\text{III},1}(z)$ aan een invallende transversale vlakke golf te koppelen ofwel:

$$E_{y \text{ II}}(-\gamma) = f_{\text{III},1}(-\gamma) \rightarrow 1 + R = f_{\text{III},1}(-\gamma) \quad (4.30)$$

$$E_{y \text{ II}}'(-\gamma) = f_{\text{III},1}'(-\gamma) \rightarrow -i\lambda + i\lambda R = f_{\text{III},1}'(-\gamma)$$

met

$$f_{\text{III},1}(-\gamma) = k(\lambda) \left[c_1 e^{i\lambda|\tilde{x}|} + c_2 e^{-i\lambda|\tilde{x}|} \right]$$

$$f_{\text{III},1}'(-\gamma) = k(\lambda) \left[\left(\frac{1}{1-s^2} - i\lambda \right) c_1 e^{i\lambda|\tilde{x}|} + \left(\frac{1}{1-s^2} + i\lambda \right) c_2 e^{-i\lambda|\tilde{x}|} \right]$$

$$k(\lambda) = e^{i5\pi/12} \left(\frac{2}{\pi\lambda} \right)^{1/2}, \quad |\tilde{x}| = \int_{\beta}^{\gamma} \left(\frac{(x+\alpha)(x-\beta)}{x} \right)^{1/2} dx \quad (4.31)$$

en

$$c_1 = C + \frac{1}{2} D^{-i\pi/3} = T \left(e^{\lambda[m+iL]} + i e^{-\lambda m} \sin(\lambda L) \right) \quad (4.32)$$

$$c_2 = C - \frac{1}{2} D^{-i\pi/3} = T \left(e^{\lambda[m+iL]} - i e^{-\lambda m} \sin(\lambda L) \right) \quad (4.33)$$

Uit (4.30) volgt direct:

$$R = \frac{i\lambda f_{\text{III},1}(-\gamma) + f_{\text{III},1}'(-\gamma)}{i\lambda f_{\text{III},1}(-\gamma) - f_{\text{III},1}'(-\gamma)} \quad (4.34)$$

zodat

$$|A|^2 = 1 - |R|^2 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4 K^2 \sin^2(\lambda L)}{K^2 [e^{2\lambda m} + \sin^2(\lambda L)(2 + e^{-2\lambda m})] + 2K \sin(2\lambda L) + 4e^{2\lambda m} - 2e^{-2\lambda m} \cos^2(\lambda)} \\ & \approx \frac{K^2}{K^2 + 4} |A_T|^2 \quad (4.36) \end{aligned}$$

met $K = 2(1-s^2)\lambda$

De fasedraaiing $L(s)$ en demping $M(s)$ kunnen we uitdrukken in complete elliptische integralen van de eerste en tweede soort nl.

$$L(s) = \int_0^{\alpha} \left[\frac{(\alpha-x)(x+\beta)}{x} \right]^{1/2} dx = \int_0^{s(1+s)} \left(\frac{[s(1+s)-x][x+s(1-s)]}{x} \right)^{1/2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{2} s^{3/2} [(1-s)K(p) + 2sE(p)] \quad , \quad p = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{1/2} \quad (4.37)$$

en

$$M(s) = \int_{-\beta}^0 \left[\frac{(\alpha-x)(x+\beta)}{-x} \right]^{1/2} dx = \int_{-s(1-s)}^0 \left(\frac{[s(1+s)-x][x+s(1-s)]}{-x} \right)^{1/2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{2} s^{3/2} [(1+s)K(q) - 2sE(q)] \quad , \quad q = \left(\frac{1-s}{2} \right)^{1/2} \quad (4.38)$$

waarbij

$$K(p) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-pt^2)}} \quad , \quad E(p) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-pt^2}{1-t^2}} dt \quad (4.39)$$

De integralen $K(p)$ en $E(p)$ zijn volgens Abramowitz [lit.3 blz. 591 formules 17.3.34 en 17.3.36] goed te benaderen met de volgende polynomen:

$$K(p) = \sum_{n=0}^4 a_n p_i^n - \left(\sum_{n=0}^4 b_n p_i^n \right) \ln p_i + \epsilon_k(p) \quad (17.3.34)$$

met $a_0 = 1,38629 \ 436112$
 $a_1 = 0,09666 \ 344259$
 $a_2 = 0,03590 \ 092383$
 $a_3 = 0,03742 \ 563713$
 $a_4 = 0,01451 \ 196212$

$b_0 = \frac{1}{2}$
 $b_1 = 0,12498 \ 593597$
 $b_2 = 0,06880 \ 248576$
 $b_3 = 0,03328 \ 355346$
 $b_4 = 0,00441 \ 787012$

en

$$E(p) = 1 + \sum_{n=1}^4 a_n p_i^n - \left(\sum_{n=1}^4 b_n p_i^n \right) \ln p_i + \epsilon_e(p) \quad (17.3.36)$$

met $a_1 = 0,44325\ 141463$	$b_1 = 0,24998\ 368310$
$a_2 = 0,06260\ 601220$	$b_2 = 0,09200\ 180037$
$a_3 = 0,04757\ 383546$	$b_3 = 0,04069\ 697526$
$a_4 = 0,01736\ 506451$	$b_4 = 0,00526\ 449639$

waarbij

$$p_1 = 1 - p \quad \text{en} \quad |\varepsilon_k(p)| \leq 2 \cdot 10^{-8} \quad \text{en} \quad |\varepsilon_e(p)| \leq 2 \cdot 10^{-8}$$

M.b.v. de bovenstaande benaderingen kunnen we $L(s)$ en $M(s)$ voldoende nauwkeurig berekenen. In de figuren 4.5 en 4.6 hebben we L en M uitgezet als functie van respectievelijk s en s^2 .

Uit (4.37) en (4.38) volgt direct

$$L(0) = 0 \quad , \quad L(1) = \frac{4}{3} \sqrt{2} \cong 1,886, \tag{4.40}$$

$$M(0) = 0 \quad \text{en} \quad M(1) = 0.$$

Wanneer we (4.29) vergelijken met (4.35) dan krijgen we het volgende beeld:

$$|A|^2 \cong |A_t|^2 \quad \text{als} \quad 2(1-s^2)\lambda \gg 1$$

$$|A|^2 \approx |A_t|^2 \quad \text{als} \quad 2(1-s^2)\lambda \lesssim 1 \tag{4.41}$$

$$|A(s=1)|^2 = 0 \quad \text{en} \quad |A_t(s=1)|^2 = \frac{4 \sin^2(\frac{4}{3}\sqrt{2}\lambda)}{1 + 3 \sin^2(\frac{4}{3}\sqrt{2}\lambda)}$$

M.a.w. in het gebied waarvoor de benadering geldig is ($\lambda \gg 1$) geldt er $|A|^2 \cong |A_t|^2$ behalve in de buurt van het punt $s=1$. Door de reflectiecoëfficiënt iets zorgvuldiger te definiëren, hebben we een betere beschrijving van de absorptie verkregen in de buurt van het punt $s=1$.

Uit de formules (4.29) en (4.35) blijkt dat voor bepaalde s en λ de absorptie geheel verdwijnt. Uit figuur 4.3 blijkt namelijk dat het mogelijk is, dat zich tussen de punten $z=0$ en $z=\alpha$ een staande golf kan vormen. Wanneer er precies een knoop op het punt $z=0$ ligt, dan is $E_y(0)=0$ zodat eveneens $|A|^2=0$ volgens (3.34).

De voorwaarde voor dit verschijnsel blijkt dus te zijn $s=s_0$ met

$$\lambda L(s_0) = n \pi \quad \text{met} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.42)$$

In hoofdstuk 5 zullen we met numerieke berekeningen van $E_y(z)$, dit verschijnsel nader toelichten.

In de figuren 4.7 en 4.8 hebben we $|A_t|^2$ en $|A|^2$ getekend als functie van $s^2 = (\omega_c/\omega)^2$ voor resp. $\lambda = 5$ en 1 om het verschil tussen de formules (4.29) en (4.35) nog eens te verduidelijken.

Hfd. 4.3 De absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ voor $\lambda \gg 1$

Voor $(1-s^2)\lambda \gg 1$ kunnen we de absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ benaderen met:

$$|A|^2 \approx |A_t|^2 = \frac{4 \sin^2(\lambda L)}{e^{2\lambda m} + \sin^2(\lambda L) [2 + e^{-2\lambda m}]} \quad (4.43)$$

Het maximum van (4.43) ligt op $s=s_1$ met $\frac{d}{ds} |A_t|^2 \Big|_{s=s_1} = 0$ ofwel

$$L'(s_1) \cos(\lambda L) e^{2\lambda m} - m'(s_1) \sin(\lambda L) [e^{2\lambda m} - 2 \sin^2(\lambda L) e^{-2\lambda m}] = 0 \quad (4.44)$$

Voor $s \ll 1$ kunnen we $L(s)$ en $M(s)$ benaderen met:

$$L(s) = s^{3/2} [c_0 + c_1 s + O(s^2)] \quad (4.45)$$

$$M(s) = s^{3/2} [c_0 - c_1 s + O(s^2)] \quad (4.46)$$

met

$$c_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2} K(2^{-1/2}) \approx 1,9666749$$

$$c_1 = \frac{2}{3} \sqrt{2} [2^{-3/2} K'(2^{-1/2}) + 2E(2^{-1/2}) - K(2^{-1/2})] \approx 0,9365502$$

Vergelijking (4.44) kunnen we voor $\lambda \gg 1$ benaderen met:

$$L'(s_1) \cos(\lambda L) - m'(s_1) \sin(\lambda L) \approx 0$$

ofwel

$$\tan[\lambda L(s_1)] \approx \frac{L'(s_1)}{m'(s_1)} = \frac{c_0 + c_1 s_1}{c_0 - c_1 s_1} \approx 1$$

zodat $\lambda c_0 s_1^{3/2} \approx \pi/4$

De absorptie bereikt dus een maximum bij $\lambda s_1^{3/2} \approx 0,4$
van

$$|A|^2_{\max} \approx \frac{2}{e^{\pi/2} + \frac{1}{2} [2 + e^{-\pi/2}]} \approx 0,338 \quad (4.47)$$

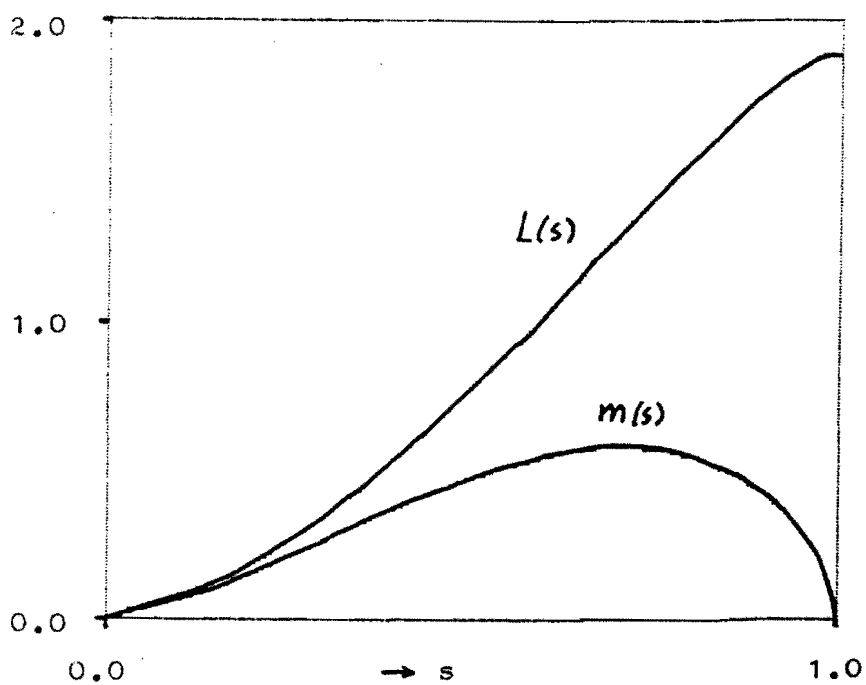
Dit maximum is onafhankelijk van λ en s . M.a.w. we kunnen bij een relatief zwak magneetveld ($s \ll 1$) toch nog een redelijke absorptie verkrijgen (ca. 34% van het ingestraalde vermogen) bij een zwak inhomogeen plasma ($\lambda \gg 1$) als we $\lambda s^{3/2} \approx 0,4$ maken.

Stel $\tau = \lambda s^{3/2}$ dan kunnen we als benadering voor de absorptie als functie van τ gebruiken:

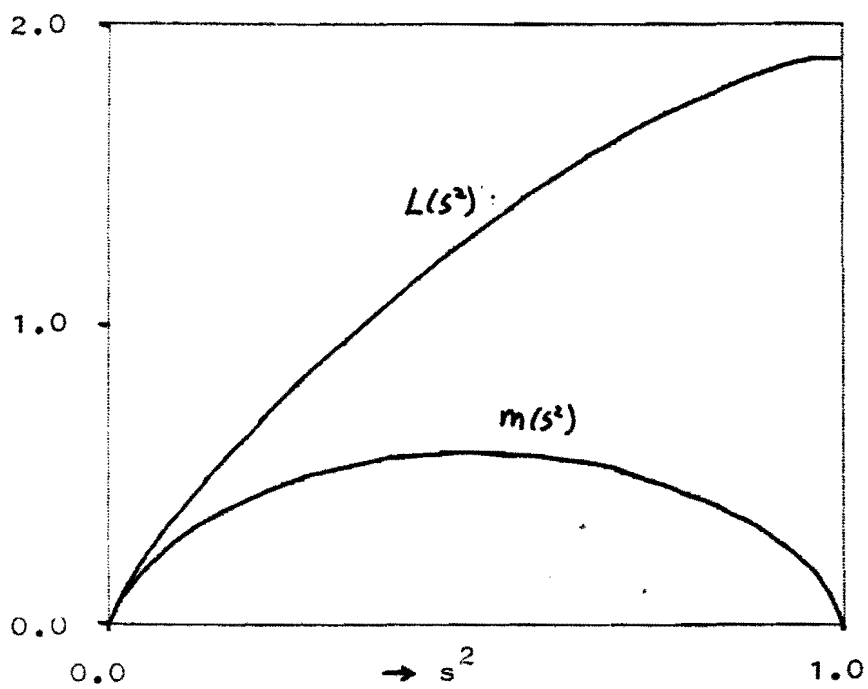
$$|A(\tau)|_{\infty}^2 \approx \frac{4e^{-4\tau} \sin^2(2\tau)}{1 + \sin^2(2\tau) [2 + e^{-4\tau}]}, \quad (1-s^2)\lambda \gg 1 \quad (4.48)$$

In figuur 4.9 hebben we $|A|^2$ getekend voor $\lambda = 5$, $12\frac{1}{2}$ en 50 volgens formule (4.35) en voor $\lambda \gg 1$ volgens (4.48). Dit figuur laat duidelijk zien dat $|A(\tau)|_{\infty}^2 \approx |A|^2$ voor $\tau \leq 0,3$.

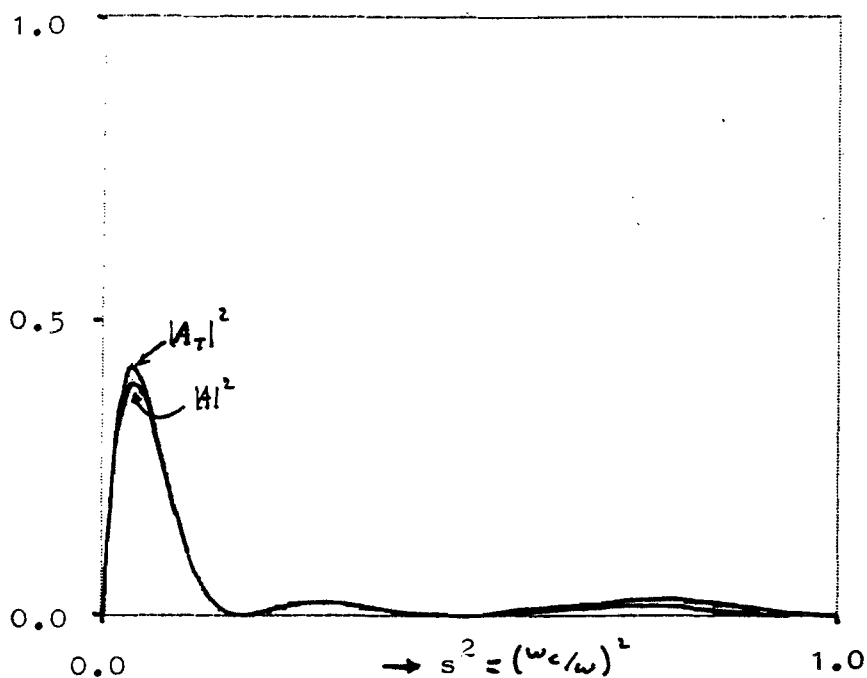
Tevens voorspelt (4.48) de ligging van het eerste punt waarbij $|A|^2 = 0$ redelijk nauwkeurig, nl. $\tau \approx \pi/2$. Voor $\lambda = 5$ is $|A|_{\max}^2 = 0,39$ bij $\tau = 0,45$. Dus (4.48) is voor $\lambda \gtrsim 5$ als goede benadering te gebruiken.



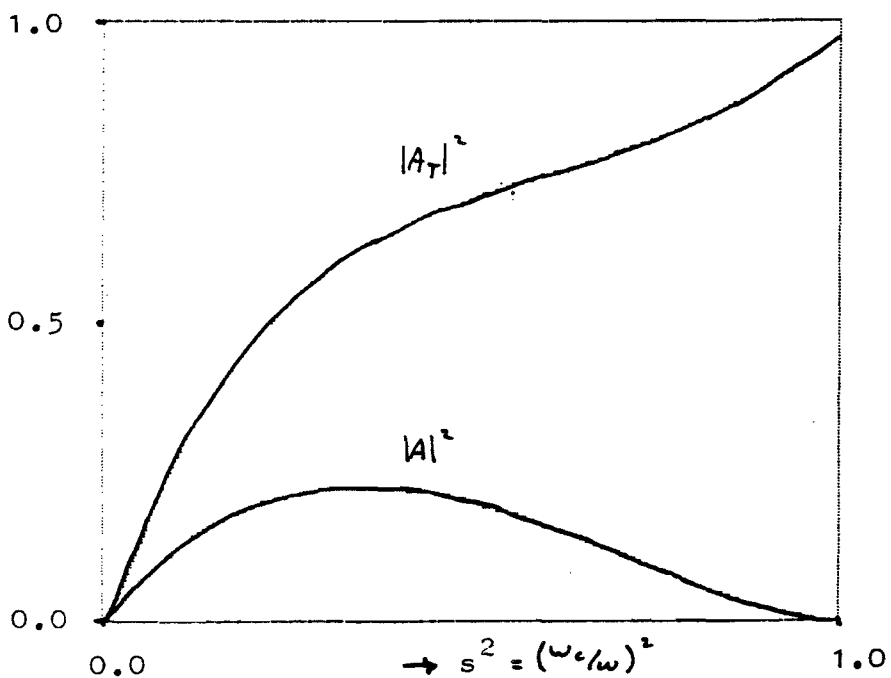
Figuur 4.5 $L(s)$ en $M(s)$ als funktie van $s = \omega_c/\omega$.



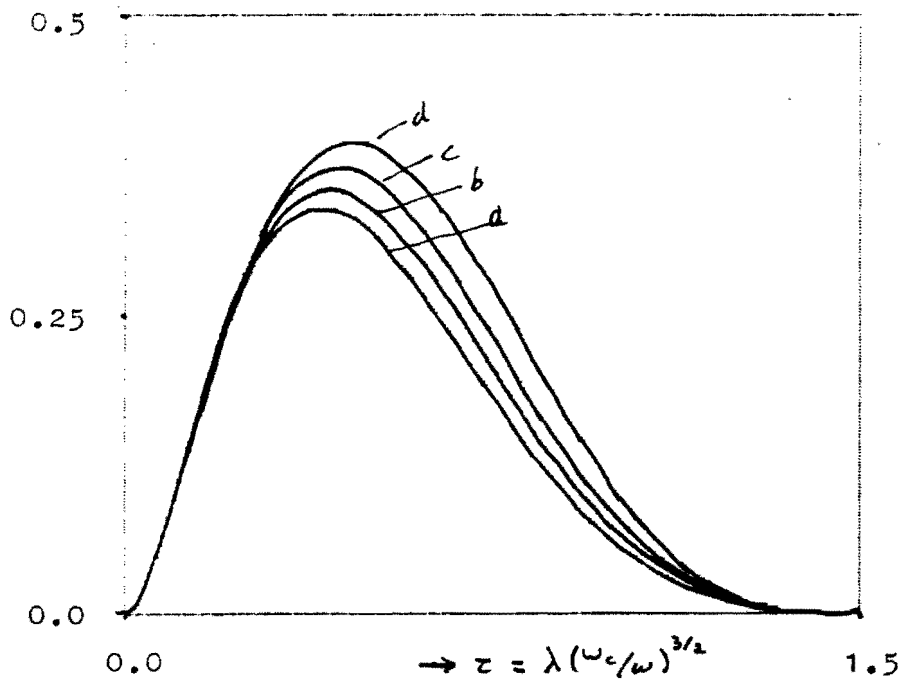
Figuur 4.6 $L(s^2)$ en $M(s^2)$ als funktie van $s^2 = (\omega_c/\omega)^2$.



Figuur 4.7 De absorptiecoëfficiënten $|A|^2$ en $|A_t|^2$ als functie van s^2 met $\lambda = 5$.



Figuur 4.8 De absorptiecoëfficiënten $|A|^2$ en $|A_t|^2$ als functie van s^2 met $\lambda = 1$.



Figuur 4.9 De absorptiecoefficient $|A|^2$ als functie van z met a) $\lambda \gg 1$ b) $\lambda = 50$ c) $\lambda = 12.5$ d) $\lambda = 5$

Hoofdstuk 5 De numerieke berekening van $|A|^2$

Hfd 5.0 Inleiding

In dit hoofdstuk zullen we $|A|^2 = 1 - |R|^2$ oplossen uit de onderstaande vergelijkingen:

$$E_{y,v}(\eta) = e^{-i\lambda\eta} + R e^{+i\lambda\eta}, \quad E_{x,v}(\eta) = 0, \quad \eta \leq 0 \quad (5.0)$$

en

$$E_y''(\eta) + \lambda^2 \frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta\eta + \eta^2}{\delta^2 - s^2 - \delta\eta} E_y(\eta) = 0 \quad (5.1)$$

voor $\eta \geq 0$

$$E_x(\eta) = +i \frac{s\eta}{\delta^2 - s^2 - \delta\eta} E_y(\eta) \quad (5.2)$$

met

$$\delta = 1 - i\nu/\omega, \quad s = \omega_c/\omega, \quad \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2} = x/L = \eta, \quad \lambda = k_0 L \quad (5.3)$$

en als randvoorwaarden

$$E_{y,v}(0) = E_y(0), \quad E_{y,v}'(0) = E_y'(0) \quad (5.4)$$

en $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} E_y(\eta) = 0$

ν/ω werd $\ll 1$ gekozen om het effect van $\nu/\omega \neq 0$ nader te analyseren. Volgens Crescentini [lit. 1] heeft een verhouding van $\nu/\omega \approx 10^{-2}$ een zeer duidelijke invloed op de grootte van $|A|^2$.

Hfd. 5.1 De Frobenius machtreeksontwikkeling

Met behulp van de methode van Frobenius [zie lit. 6,7] kunnen we $E_y(\quad)$ uitdrukken in een lineaire combinatie van twee machtreeksen.

Voor

$$z = \delta \eta - \delta^2 + s^2 \quad (5.5)$$

geldt er

$$dz = \delta d\eta, \quad \eta = \frac{z + \delta^2 - s^2}{\delta} \quad (5.6)$$

zodat (5.1) verandert in

$$z E_y''(z) - \left(\frac{\lambda}{\delta^2}\right)^2 [z^2 - 2s^2 z - s^2(\delta^2 - s^2)] E_y(z) = 0 \quad (5.7)$$

We ontwikkelen $E_y(z)$ in een machtreeks $g(z)$ volgens Frobenius:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\alpha} \quad (5.8)$$

waarbij we α en a_n kunnen bepalen door (5.8) in (5.7) te substitueren.

Dit geeft nl.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha-1)(n+\alpha) a_n z^{n+\alpha-1} - \left(\frac{\lambda}{\delta^2}\right)^2 [z^2 - 2s^2 z - s^2(\delta^2 - s^2)] a_n z^{n+\alpha} = 0 \quad (5.9)$$

ofwel

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{n+\alpha-1} = 0 \quad (5.10)$$

Aan vergelijking (5.10) kan voldaan worden als $g_n \hat{=} 0$.

Voor $n=0$ volgt uit (5.9) dat moet gelden: $(\alpha-1)\alpha a_0 = 0$, zodat $\alpha = \alpha_1 = 1$ of $\alpha = \alpha_2 = 0$, waarbij we a_0 vrij mogen kiezen, bijv. $a_0 = 1$.

Voor $\alpha = \alpha_1 = 1$ volgt uit (5.9) en (5.10) dat er moet gelden:

$$n(n+1) a_n - \left(\frac{\lambda}{\delta^2}\right)^2 [a_{n-3} - 2s^2 a_{n-2} - s^2(\delta^2 - s^2) a_{n-1}] = 0$$

Als we definiëren: $a_{-3}=0$, $a_{-2}=0$, $a_{-1}=0$ en $a_0=1$, dan volgt a_n uit de volgende recurrente betrekking:

$$a_n = \left(\frac{\lambda}{\delta^2}\right)^2 \frac{a_{n-3} - 2s^2 a_{n-2} - s^2(\delta^2 - s^2) a_{n-1}}{n(n+1)} \quad \text{voor } n \geq 1 \quad (5.11)$$

De eerste machtreeks in z is nu volledig bepaald, nl.:

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \quad (5.12)$$

Daar $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$ een geheel getal is, bevat de tweede machtreeks $g_2(z)$ een logaritmische singulariteit, nl.:

$$g_2(z) = b_1 g_1(z) \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n \quad (5.13)$$

Als we (5.13) invullen in (5.7), dan resulteert dit in:

$$\begin{aligned} & 2 b_1 g_1'(z) - b_1 g_1(z)/z + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)n k_n z^{n-1} \\ & - (\lambda/\delta^2)^2 [z^2 - 2s^2 z - s^2(\delta^2 - s^2)] \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Volgens Boersma [lit.6, hfd.1] moet er tevens gelden:

$$b_1 = -2a_1, \quad k_{-1} = 0, \quad k_0 = -1 \quad \text{en} \quad k_1 = -a_1 \quad (5.15)$$

zodat uit (5.14) volgt voor $n \geq 2$:

$$-2a_1(2n-1)a_{n-1} + (n-1)n k_n - (\lambda/\delta^2)^2 [k_{n-3} - 2s^2 k_{n-2} - s^2(\delta^2 - s^2)k_{n-1}] = 0$$

ofwel

$$k_n = \frac{(\lambda/\delta^2)^2 [k_{n-3} - 2s^2 k_{n-2} - s^2(\delta^2 - s^2)k_{n-1}] + 2(2n-1)a_1 a_{n-1}}{(n-1)n} \quad (5.16)$$

met $n \geq 2$

De E_y -component van de extra-ordinaire golf in het plasma is nu op twee constanten na bekend:

$$E_y(z) = c_2 [c_1 g_1(z) + g_2(z)] \quad (5.17)$$

De diff. vergl. (5.7) heeft een regulier singulier punt op $z=0$ en een niet-regulier singulier punt op $z=\infty$. Volgens Frobenius zijn de convergentiestralen van de machtreeksen $g_1(z)$ en $g_2(z)$ en gelijk aan de afstand van deze twee singuliere punten.

M.a.w. de ontwikkeling (5.17) is geldig voor $z \in \mathbb{C}$.

Uit de voorwaarde (5.4) volgt dat er moet gelden:

$$\lim_{\operatorname{Re}(z) \rightarrow \infty} E_Y(z) = 0$$

ofwel

$$c_1 = - \lim_{\operatorname{Re}(z) \rightarrow \infty} \frac{g_2(z)}{g_1(z)} \quad (5.18)$$

De constante c_2 bepalen we uit de voorwaarde (5.3), de koppeling met het vacuüm, ofwel

$$1 + R = g(z_0) \quad , \quad -i\lambda + i\lambda R = \delta g'(z_0)$$

met

$$z_0 = -\delta^2 + s^2 \quad , \quad g(z_0) = c_1 g_1(z_0) + g_2(z_0) \quad (5.19)$$

$$g'(z_0) = c_1 g_1'(z_0) + g_2'(z_0)$$

zodat

$$R = \frac{i\lambda g(z_0) + \delta g'(z_0)}{i\lambda g(z_0) - \delta g'(z_0)} \quad (5.20)$$

en

$$\begin{aligned} |A|^2 &= 1 - |R|^2 \\ &= \frac{2 \operatorname{Im} [\lambda \delta^* g(z_0) g'^*(z_0)]}{\lambda^2 |g(z_0)| + \operatorname{Im} [\lambda \delta^* g(z_0) g'^*(z_0)] + |\delta|^2 |g'(z_0)|^2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Een nadeel van deze methode is dat voor een praktische berekening van c_1 de waarde van $g_1(z)$ en $g_2(z)$ voor grootte $\text{Re}[z]$ nauwkeurig bekend moeten zijn. Voor $|z| \rightarrow \infty$ is diff. vergl. (5.7) bij benadering gelijk aan:

$$E_y''(z) - \lambda/\delta^2 z E_y(z) = 0 \quad (5.22a)$$

zodat de oplossing $E_y(z)$ bestaat uit een lineaire combinatie van Airy-functies. Voor deze Airy-functies gelden de volgende asymptotische benaderingen:

$$\begin{aligned} A_i(z) &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3} z^{3/2}} & |z| \rightarrow \infty \\ B_i(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{+\frac{2}{3} z^{3/2}} & |\arg(z)| < \pi \end{aligned} \quad (5.22b)$$

Wanneer we een rekenmachine gebruiken met een relatieve machine nauwkeurigheid ϵ , dan kunnen we de fout in $g_1(z)$ en $g_2(z)$ als volgt benaderen:

$$|\Delta g_1(z)| \approx \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z|^{n+1} \approx \epsilon B_i(\lambda^{2/3}|z|) \approx \epsilon e^{2/3 \lambda |z|^{3/2}} \quad (5.22c)$$

$$|\Delta g_2(z)| = \text{orde} [\Delta g_1(z)]$$

M.a.w. het constant worden van de verhouding tussen $g_2(z)$ en $g_1(z)$ voor steeds groter wordende $\text{Re}[z]$, wordt verstoord door de onvermijdbare rekenfouten in $g_1(z)$ en $g_2(z)$. Met $\epsilon = 10^{-10}$ en de eis

$$|\Delta g_1(z)| \leq 10^{-6}$$

kunnen we de machtreeksontwikkeling volgens vergl. (5.22c) gebruiken als:

$$|z| \leq (14/\lambda)^{2/3} \quad (5.23)$$

Uit formule (5.23) blijkt duidelijk dat het interval waarop de machtreeksontwikkelingen bruikbaar zijn steeds kleiner wordt als λ groter wordt.

De bovenstaande methode is reeds toegepast door A.Ya. Omel'chenko en andere in 1972 [zie lit. 8], voor een botsingsloos plasma ($\nu/\omega = 0$ ofwel $\delta = 1$). De door hun gebruikte rekenmachine had een $\epsilon = 10^{-6}$. Deze fout is voor de berekening van $|A|^2$ nogal groot, zodat de grafieken ($|A|^2$ als functie van s^2) niet helemaal compleet waren. De door ons gebruikte rekenmachine had een $\epsilon = 10^{-10}$, zodat het mogelijk is $|A|^2$ voor $0 \leq s \leq 1$ te berekenen.

De bepaling van c_1 m.b.v. (5.18) is nogal moeilijk te vertalen in een betrouwbaar algoritme. We hebben de volgende benadering voor c_1 gebruikt:

$$c_1 \approx - \frac{g_2(z_1)}{g_1(z_1)}, \quad z_1 = \left(\frac{14}{\lambda}\right)^{2/3} + 1 - s^2 \quad (5.24)$$

De benadering blijkt betrouwbaar te zijn voor $\lambda \leq 5$ als we de resultaten vergelijken met de veel nauwkeurigere methode uit Hfd. 5.3.

De absorptiecoëfficiënten $|A|^2$, berekend volgens bovenstaande methode en die uit Hfd. 5.3, komen (voor zover vergelijking mogelijk is) zeer goed overeen met de resultaten van Omel'chenko.

We zullen met de bespreking van de resultaten wachten tot we de nauwkeurigere methode uit Hfd. 5.3 besproken hebben.

Hfd. 5.2 Een asymptotische uitdrukking voor $E_y(z)$

De voorwaarde (5.4) maakt het noodzakelijk om een betere benadering voor $E_y(z)$ te maken voor $|z|$ groot, omdat hier de Frobenius-machtreeksen niet toereikend zijn.

M.a.w. bepaal de oplossing van

$$z y''(z) - \rho^2 (z^2 - \alpha z - \beta) y(z) = 0 \quad (5.27)$$

met

$$\lim_{\operatorname{Re}[z] \rightarrow +\infty} y(z) = 0, \quad \operatorname{Re}[\rho] > 0$$

$$\rho = \lambda/\delta^2, \quad \alpha = 2s^2, \quad \beta = s^2(\delta^2 - s^2)$$

Voer de volgende hulp-functie in:

$$\psi(z) = \frac{y'(z)}{y(z)} \quad (5.28)$$

zodat

$$\psi'(z) = \frac{y''(z)}{y(z)} - \left(\frac{y'(z)}{y(z)} \right)^2 \quad y''(z) = \psi'(z) + \psi^2(z)$$

Vergelijking (5.27) verandert in een Ricatti-vergelijking:

$$\psi'(z) + \psi^2(z) = \rho^2 (z - \alpha - \beta z^{-1}) \quad (5.29)$$

We kunnen voor $\psi(z)$ een asymptotische ontwikkeling in $z^{-\frac{1}{2}}$ opstellen, als oplossing voor (5.29) nl.

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-\frac{1}{2}(n-1)} \quad (5.30)$$

zodat

$$\begin{aligned} R(z) &= \psi'(z) + \psi^2(z) - \rho^2 (z - \alpha - \beta z^{-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2}(n-1) c_n z^{-\frac{1}{2}(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_m c_{n-m} z^{-\frac{1}{2}(n-2)} \\ &\quad - \rho^2 (z - \alpha - \beta z^{-1}) \end{aligned}$$

ofwel

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^{-1/2(n-2)}$$

Door alle coëfficiënten $r_n \equiv 0$ te stellen, kunnen we de coëfficiënten c_n bepalen, zodat $\psi(z)$ een oplossing is van (5.29). Nl. uit $r_0 \equiv 0$ volgt:

$$c_0^2 - \rho^2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_0 = \pm \rho$$

Voor $|z| \rightarrow \infty$ geldt er

$$\psi(z) \simeq e^{c_0 \int z^{1/2} dz} \simeq e^{\frac{2}{3} c_0 z^{3/2}}$$

en daar moet gelden

$$\lim_{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty} \psi(z) = 0, \quad \operatorname{Re}(\rho) > 0$$

(5.31a)

kiezen we $c_0 = -\rho$.

Uit $r_n \equiv 0$ volgt er tevens:

$$r_1 = 0 \quad \rightarrow \quad 2c_0 c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0 \quad c_0 \neq 0 \quad (5.31b)$$

$$r_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1^2 + 2c_0 c_2 + \alpha \rho^2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{c_1^2 + \alpha \rho^2}{2c_0} = \frac{1}{2} \alpha \rho \quad (5.31c)$$

$$r_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} c_0 + 2c_1 c_2 + 2c_0 c_3 = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = -1/4 \quad (5.31d)$$

$$r_4 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2^2 + 2c_1 c_3 + 2c_0 c_4 + \beta \rho^2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_4 = \frac{1}{2} (\beta + \frac{1}{4} \alpha^2 \rho) \quad (5.31e)$$

Voor $n \geq 3$ moet er gelden:

$$-\frac{1}{2}(n-2)c_{n-1} + \sum_{m=0}^{n+2} c_m c_{n+2-m} = 0$$

ofwel

$$c_{n+2} = \frac{1}{2} (n-2) \frac{c_{n-1}}{c_0} - \frac{1}{2c_0} \sum_{m=0}^{n+1} c_m c_{n+2-m} \quad (5.31f)$$

M.b.v. de betrekkingen (5.31a) t/m (5.31f) zijn alle coëfficiënten c_n bekend en ligt de oplossing $\psi(z)$ vast.

Uit (5.28) volgt direct dat:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= c \exp \left[\int_0^z \psi(x) dx \right] \\
 &= c z^{-1/4} \exp \left[- \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 3}}^{\infty} \frac{2}{n-3} c_n z^{-1/2(n-3)} \right]
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

en

$$Y'(z) = c \psi(z) Y(z) \tag{5.33}$$

Wanneer we $\psi(z)$ benaderen met

$$\psi_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n z^{-1/2(n-1)}$$

dan geldt er

$$Y(z) = \left[1 + O \left(\frac{z^{N+1}}{z-N} z^{-1/2(N-2)} \right) \right] Y_N(z) \tag{5.34}$$

M.a.w. we kunnen de relatieve fout in $Y(z)$ zo klein maken als we zelf willen door $|z|$ maar groot genoeg te nemen of het aantal termen te vergroten.

Om een orde van grootte voor $|z|$ aan te geven, zodat benadering (5.34) redelijk goed is, kiezen we $N = 3$ en eisen dat voor de absolute fout

$\Delta Y(z)$ moet gelden:

$$|\Delta Y(z)| \leq 10^{-6} \tag{5.35}$$

$$|\Delta Y(z)| \approx \left| \frac{1}{2} \kappa \lambda z^{-3/4} \right| \exp \left[-\frac{2}{3} \lambda z^{3/2} + \kappa \lambda z^{1/2} \right] \tag{5.36}$$

ofwel

$$-\frac{2}{3} \lambda |z|^{3/2} + 2s^2 \lambda |z|^{1/2} \leq -6 \ln(10)$$

$$|z|^{1/2} (|z| - 3) \geq 20/\lambda \quad 0 \leq s \leq 1$$

ofwel

$$|z| \geq \left(\frac{20}{\lambda} \right)^{2/3} + 3 \tag{5.37}$$

Hfd. 5.3 De numerieke berekening van de absorptie

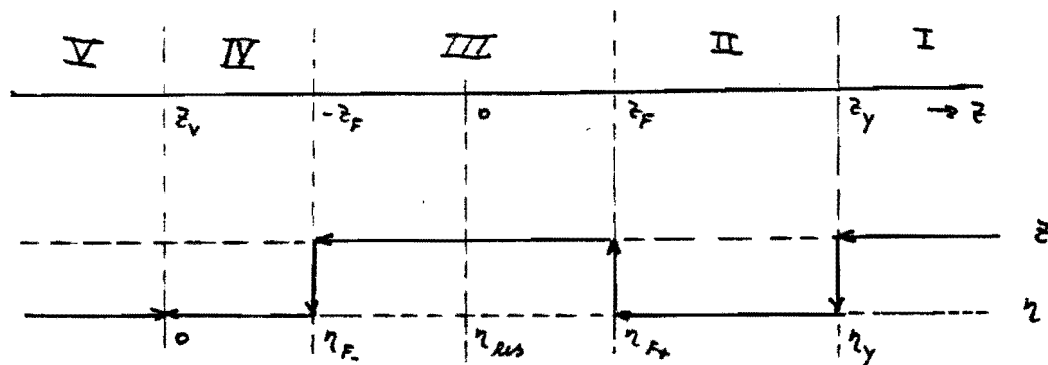
Voor de numerieke berekening van de absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ wordt veel gebruik gemaakt van de Runge-Kutta integratie-methode met automatische stapgrootte regeling. Men maakt een asymptotische schatting voor $E_y(\eta)$ voor η groot, zoals is afgeleid in hfd. 5.2. Deze schatting kan men direct gebruiken als beginwaarden voor de numerieke integratie van diff. vergl. (5.1) als $\nu/\omega > 0$. Deze methode wordt gevolgd door Omel'chenko en Maki [zie literatuur nr. 8 en 10], waarbij men de verhouding ν/ω zeer klein kiest, b.v. $O(\nu/\omega) = 10^{-3}$.

Een tweede methode om de absorptie van een botsingsloos plasma te bepalen is, het integreren rondom de singulariteit $z=0$. Deze methode werd gevolgd door Nijs [zie literatuur nr. 11].

We hebben gekozen voor een methode, die zowel voor $\nu/\omega = 0$ als voor $\nu/\omega \ll 1$ de absorptie correct berekent. De methode bestaat uit een combinatie van

- een asymptotische schatting voor $E_y(z_y)$ en $E_y'(z_y)$
- een Runge-Kutta integratie langs de η -as
- twee Frobenius machtreeks ontwikkelingen in z
- een eventuele tweede Runge-Kutta integratie om voldoende nauwkeurig de oplossing met vacuüm te matchen.

In figuur 5.0 hebben we de indeling de z -as symbolisch weergegeven.



Figuur 5.0 De indeling van de z - en η -as.

$$|z|_y = \left(\frac{z_0}{\lambda}\right)^{2/3} + 3$$

$$|z|_F = \left(\frac{14}{\lambda}\right)^{2/3} \quad (5.38)$$

$$z_v = s^2 - \delta^2$$

In gebied I ($|z| \geq |z|_y$) gebruiken we $Y_N(z)$ uit hfd. 5.2 als schatting voor $E_y(z)$.

In gebied II ($|z|_F \leq |z| \leq |z|_y$) gebruiken we de Runge-Kutta integratie methode met automatische stapgrootte aanpassing om $E_y(\eta)$ te bepalen.

We gebruiken als startwaarden de $Y_n(z_y)$ en $Y_n'(z_y)$ uit hfd. 5.2.

De discretisatie, die gebruikt wordt bij deze methode, kan geen problemen opleveren, omdat vergl. (5.1) in gebied II behoorlijk "glad" is.

In gebied III gebruiken we de twee Frobenius machtreeksen om $E_y(z)$ te beschrijven. De constante c_1 bepalen we nu d.m.v. matching met de

$E_{y,r}(\eta_{F+})$ en $E_{y,r}'(\eta_{F+})$ uit de Runge-Kutta integratie van gebied II. Ofwel

$$c_1 g_1(z_F) + g_2(z_F) = c E_{y,r}(\eta_{F+})$$

$$\delta [c_1 g_1'(z_F) + g_2'(z_F)] = c E_{y,r}'(\eta_{F+})$$

zodat

$$c_1 = \frac{\delta g_2'(z_F) E_{y,r}(\eta_{F+}) - g_2(z_F) E_{y,r}'(\eta_{F+})}{g_1(z_F) E_{y,r}'(\eta_{F+}) - \delta g_1'(z_F) E_{y,r}(\eta_{F+})} \quad (5.39)$$

Wanneer $|z|_F \geq |z|_v$ dan kunnen m.b.v. de twee Frobenius reeksen de absorptie-coëfficiënten berekend worden.

Is $|z|_F \leq |z|_v$ dan gebruiken we nogmaals de Runge-Kutta methode om $E_y(z_v)$ en $E_y'(z_v)$ voldoende nauwkeurig te bepalen, en berekenen tenslotte de absorptie-coëfficiënt.

Hfd. 5.4 De resultaten

De methode uit hfd. 5.3 is geïmplementeerd in een Pascal-programma Berekening-Absorptie, dat uitgevoerd wordt door een micro-computer (zie appendix B). De gebruikte Turbo-Pascal compiler had een rekennauwkeurigheid van $\epsilon = 10^{-11}$. De programmatuur om operaties op complexe getallen uit te voeren, is geheel ontworpen door ondergetekende (zie appendix C).

De Runga-Kutta methode met variabele stap is vertaald uit de Algol-procedure RK2 van het rekencentrum (zie lit. 12 + 13). De methode is uitgebreid om complexe functies met reële variabelen te integreren.

Uit de figuren 5.1 en 5.2 blijkt dat de analytische W.K.B.-benadering voor $|A|^2$ zeer goede resultaten oplevert, als we deze vergelijken met exacte numerieke berekeningen. De maxima en minima liggen nagenoeg op dezelfde plaats, maar de grootte van de absorptie wordt m.b.v. de W.K.B.-methode te klein ingeschat.

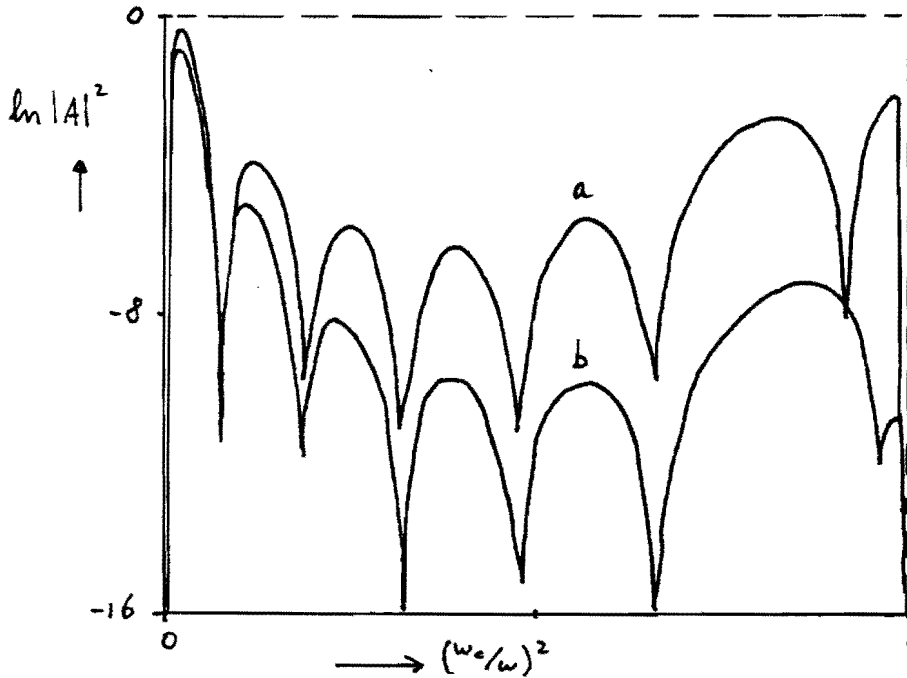
Het optreden van maxima en minima in het absorptieprofiel is een gevolg van de vorming van een staande golf tussen de punten η_{res} en η_c . Een maximum in het $|E_y(\eta)|^2$ -profiel (buik) op de plaats van de upper-hybrid resonantie ($\eta = \eta_{res}$) geeft een maximum in de absorptiekromme volgens formule (3.34). Een minimum in het $|E_y(\eta)|^2$ -profiel (knoop) geeft eveneens een minimum in het absorptieprofiel. De figuren 5.3 en 5.4 illustreren dit verschijnsel duidelijk voor een botsingsloos plasma met $\lambda = 5$.

De invloed van de thermische snelheid van de elektronen (v_e) in een warm plasma op de absorptie is o.a. onderzocht door W. Woo en J. Nijs (zie lit. 9 + 11). In figuur 5.5 zijn de absorptiekrommen weergegeven volgens mijn numerieke berekeningen voor een koud plasma en die van Woo voor ($v_e/c = 0,1$). Uit dit figuur blijkt dat de thermische snelheid maar een geringe invloed (ongeveer Orde(v_e/c)) op de absorptiekromme heeft voor $\lambda = 10$.

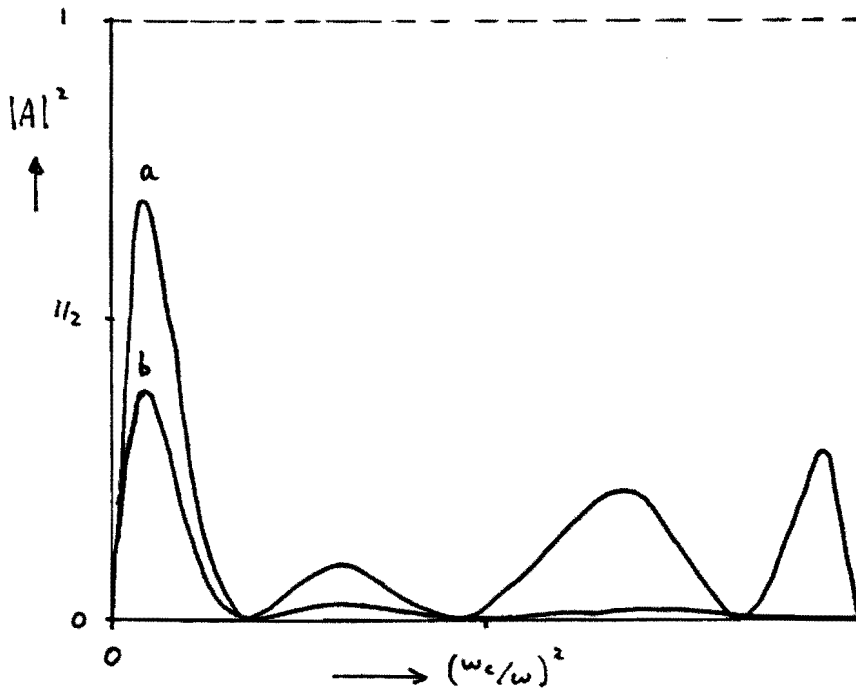
Woo heeft tevens onderzocht wat het effect is van het lineariseren van de basisvergelijkingen. M.a.w. hij heeft de absorptie berekend m.b.v. de niet-lineaire basisvergelijkingen voor een warm plasma met een eindige grootte voor het elektrische veld van de E.M.-golf (E_1). In figuur 5.6 is het effect van deze niet-lineaire verschijnselen vergeleken met mijn berekeningen voor een koud plasma met $\lambda = 10$ en $v_1/c = 0,05$ waarbij $v_1 := e|E_1|/m$. Uit dit figuur blijkt duidelijk dat de niet-lineaire effecten een belangrijke rol spelen in deze situatie.

In de figuren 5.7 t/m 5.12 hebben we de numeriek berekende absorptiekrommen weergegeven voor een botsingsloos plasma ($\nu/\omega = 0$) en een niet-botsingsloos plasma ($\nu/\omega = 0,01$). De absorptie vertoont een duidelijk maximum bij $\lambda (\omega_c/\omega)^{3/2} \approx 0,4$ voor zwak inhomogene plasma's ($\lambda \gg 1$). In het gebied $\lambda \approx 1$ vertoont het absorptieprofiel allerlei interessante maxima. Uit figuur 5.10 blijkt duidelijk dat het mogelijk is nagenoeg 100% absorptie te verkrijgen voor een inhomogeen plasma met $\lambda = 1$ en $(\omega_c/\omega) = 0,4$. Voor sterk inhomogene plasma's ($\lambda \ll 1$) treedt er nagenoeg geen absorptie op, omdat de golflengte van de E.M.-golf te groot wordt om nog een staande golf te vormen in het plasma. M.a.w. de buik wordt niet groot genoeg meer.

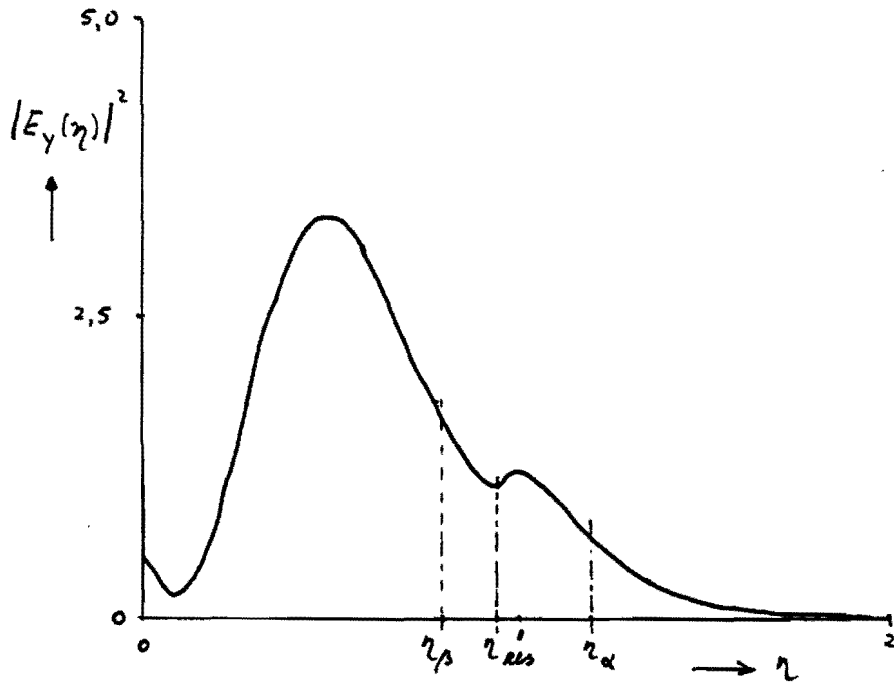
De invloed van de botsingen tussen de elektronen en de ionen blijkt vooral groot te zijn in een zwak inhomogeen plasma met een redelijk sterke homogene voormagnetisatie. Deze extra absorptie is hoofdzakelijk het gevolg van het feit dat de botsingen de golfvorm beïnvloeden.



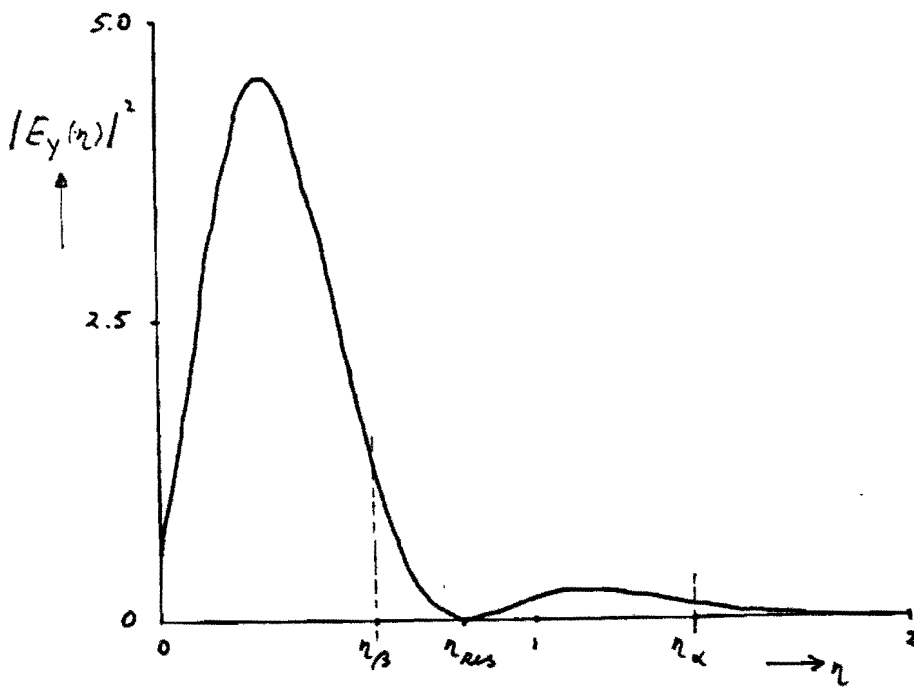
Figuur 5.1 De logaritme van de absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ met $\lambda = 10$ volgens a) een numerieke berekening
b) een analytische benadering voor



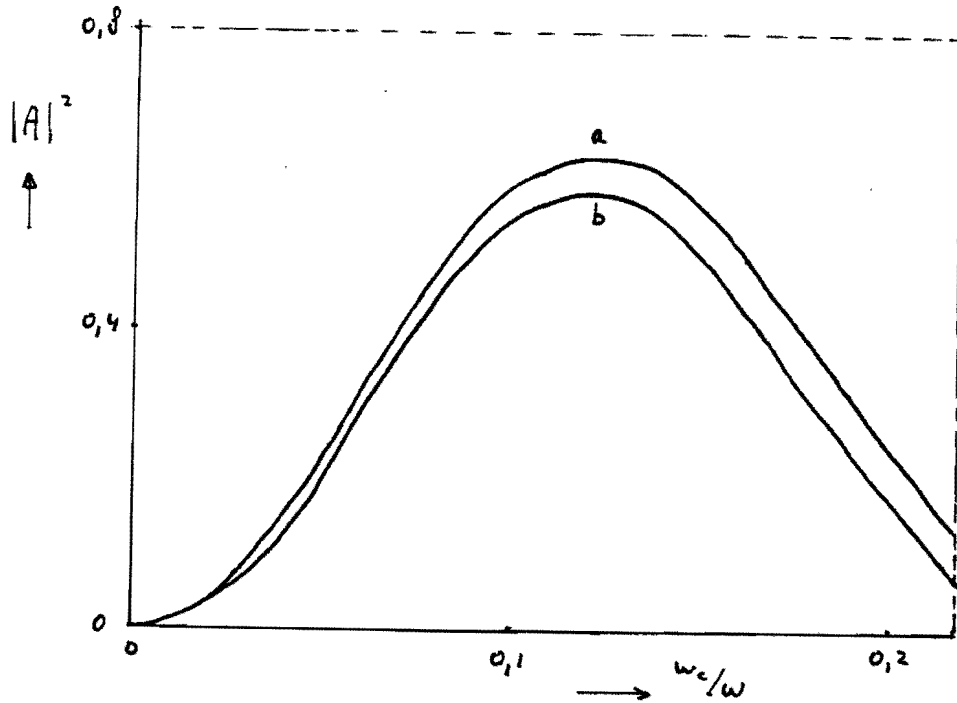
Figuur 5.2 De absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ met $\lambda = 5$ volgens
a) een numerieke berekening
b) een analytische benadering voor $\lambda \gg 1$



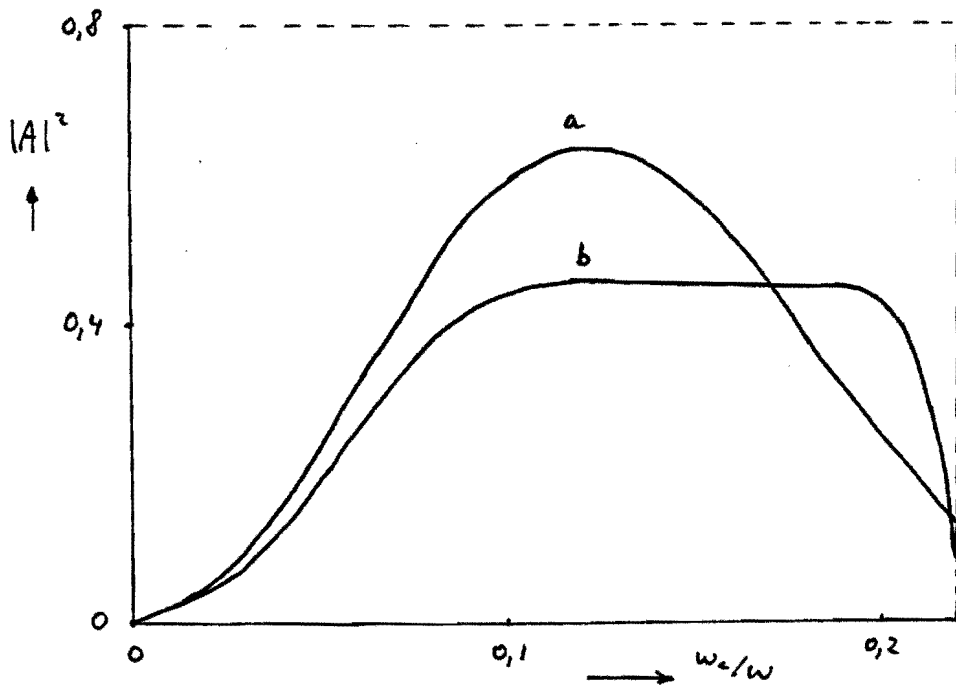
Figuur 5.3 Een buik in het $|E_y(\eta)|^2$ -profiel bij $\eta = \eta_{res}$ geeft maximale absorptie met $\lambda = 5$ en $(\omega_c/\omega)^2 = 0,04$



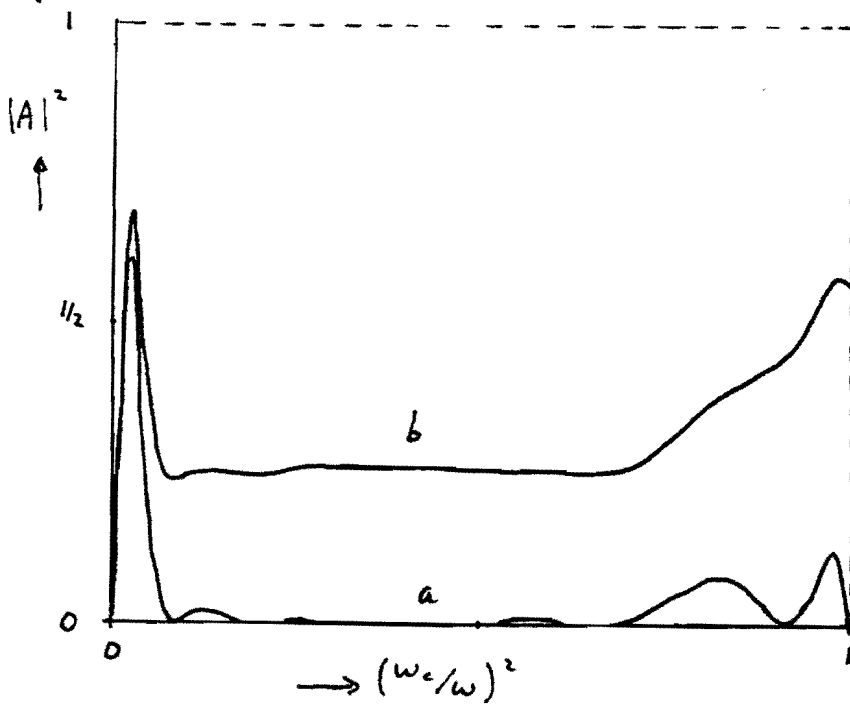
Figuur 5.4 Een knoop in het $|E_y(\eta)|^2$ -profiel bij $\eta = \eta_{res}$ geeft minimale absorptie met $\lambda = 5$ en $(\omega_c/\omega)^2 = 0,18$



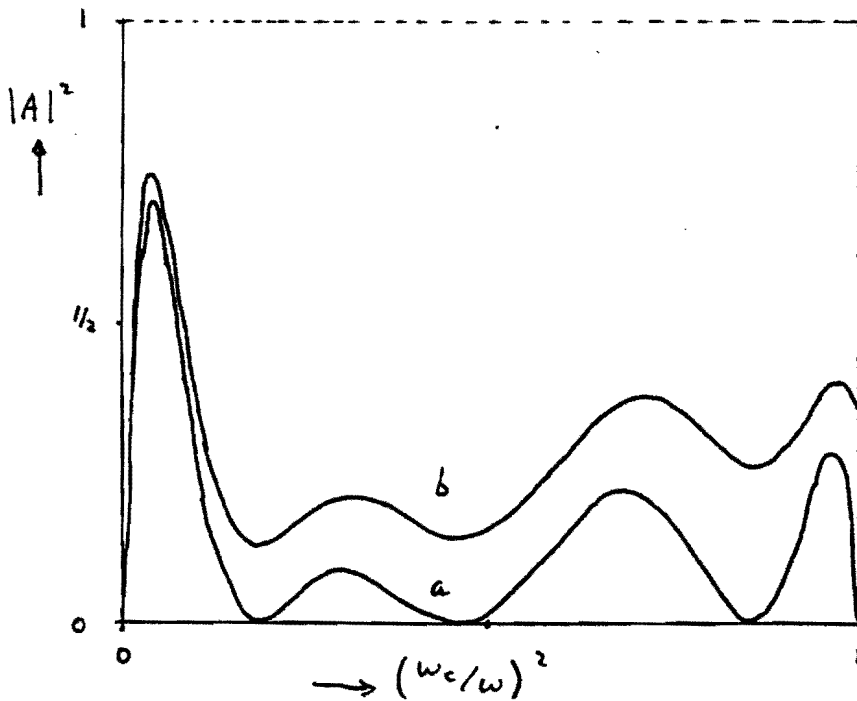
Figuur 5.5 De absorptiekrommen voor a) een koud plasma ($v_e/c = 0$)
b) een warm plasma ($v_e/c = 0,1$) [zie lit. 9] $\lambda = 10$



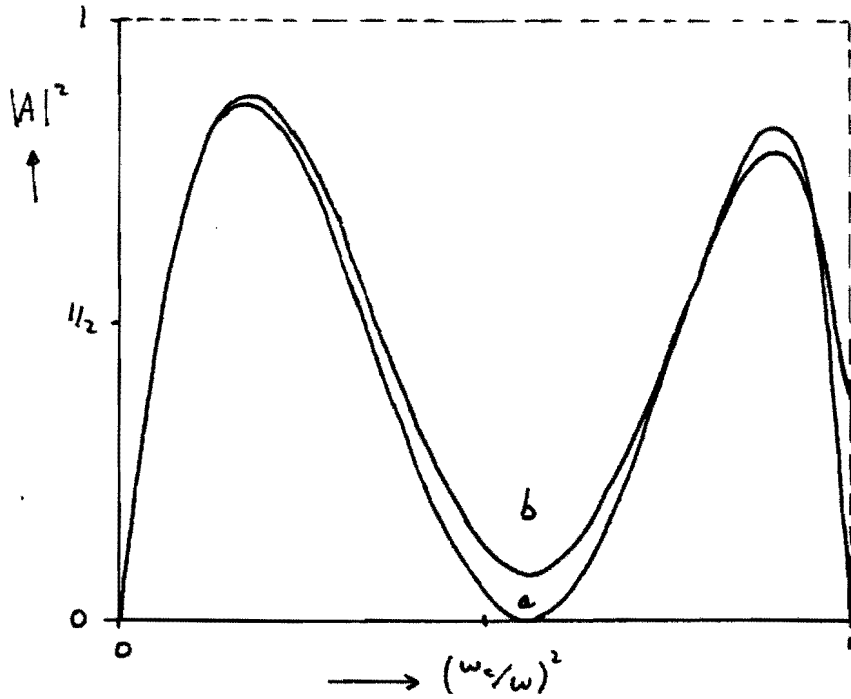
Figuur 5.6 De absorptiekrommen voor a) een koud plasma ($v_e/c = 0$)
b) een warm plasma met $v_e/c = 0,1$ en $v_i/c = 0,05$ $\lambda = 10$
beschreven met niet-lineaire vergelijkingen [zie lit. 9]



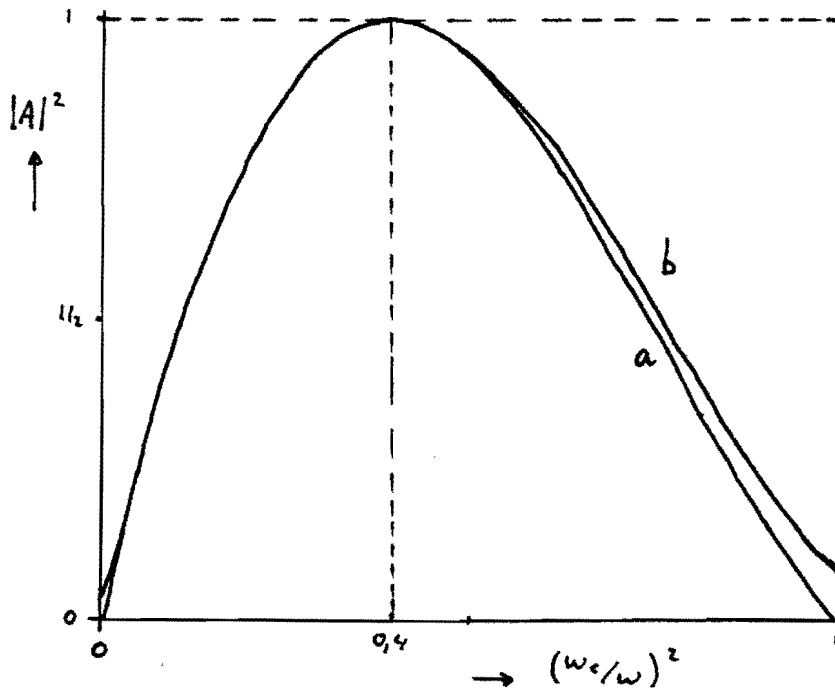
Figuur 5.7 De absorptiedoëfficiënt $|A|^2$ als functie van $(\omega_c/\omega)^2$ met $\lambda = 10$ en a) $\nu/\omega = 0$ b) $\nu/\omega = 0,01$



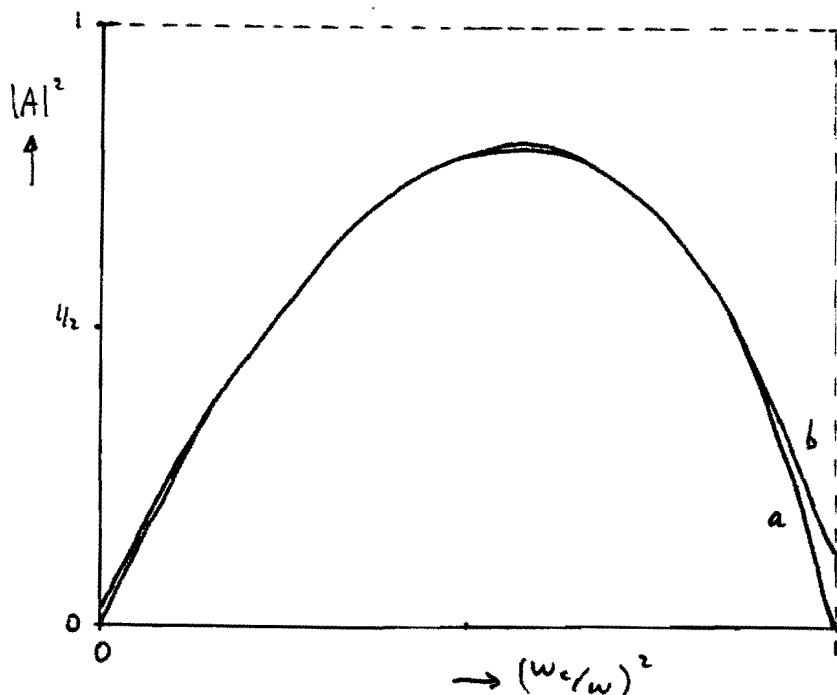
Figuur 5.8 De absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ als functie van $(\omega_c/\omega)^2$ met $\lambda = 5$ en a) $\nu/\omega = 0$ b) $\nu/\omega = 0,01$



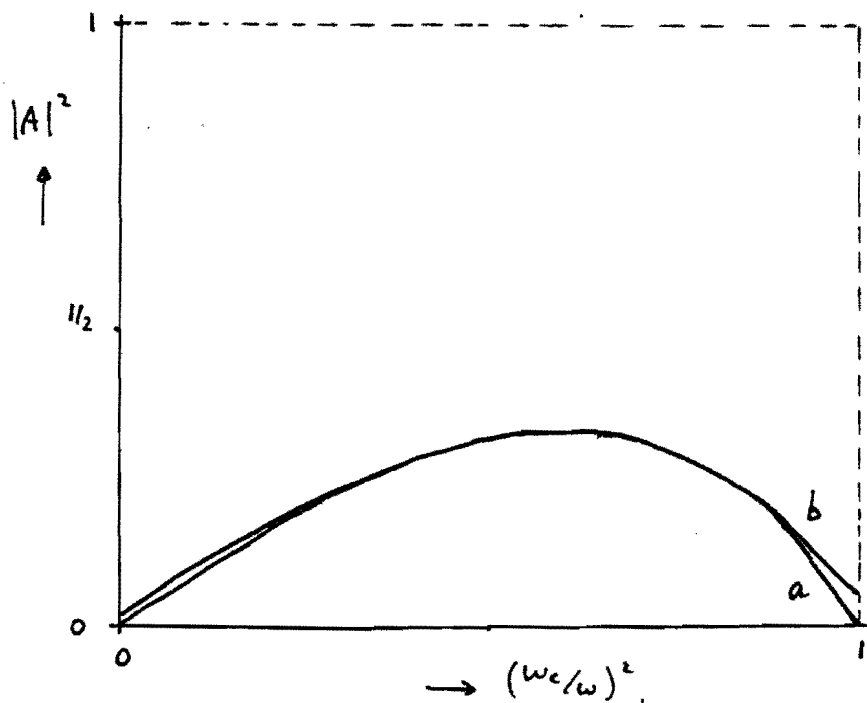
Figuur 5.9 De absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ als functie van $(\omega_c/\omega)^2$ met $\lambda = 2$ en a) $\nu/\omega = 0$ b) $\nu/\omega = 0,01$



Figuur 5.10 De absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ als functie van $(\omega_c/\omega)^2$ met $\lambda = 1$ en a) $\nu/\omega = 0$ b) $\nu/\omega = 0,01$



Figuur 5.11 De absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ als functie van $(\omega_c/\omega)^2$ met $\lambda = 0,5$ en a) $\nu/\omega = 0$ b) $\nu/\omega = 0,01$



Figuur 5.12 De absorptiecoëfficiënt $|A|^2$ als functie van $(\omega_c/\omega)^2$ met $\lambda = 0,2$ en a) $\nu/\omega = 0$ b) $\nu/\omega = 0,01$

Literatuurlijst

- [1] Cold wave propagation in Resonance Regime.
A.A. Crescentini and C. Maroli, Il Nuovo Cimento, Vol. 25B, N.1, 1975.
- [2] Mode conversion in a weakly inhomogeneous collisionless magnetoplasma.
Ting-wei Tang, The Physics of fluids, Vol.13, Nr. 1,1970.
- [3] Handbook of Mathematical Functions.
M. Abramowitz and I.A. Stegun,
National Bureau of Standards Applied Mathematics Series,
Ninth Printing, 1972.
- [4] Resonance absorption of Laser-Energy in a Magnetized Target-Plasma.
H. Maki and K. Niu, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 46,
No. 2, Febr. 1979.
- [5] Amplification and Absorption of Elektromagnetic waves in overdense
Plasmas, R.B White, F.F Chen, Plasma Physics, Vol. 16 (1974)
- [6] Toegepaste Analyse I, J. Boersma, Collegedictaat Technische Hoge-
school Eindhoven, Nr. 2.208, Hoofdstuk I (1981)
- [7] Ordinary differential equations, E.L. Ince
Dover Publications Inc. (1956)
- [8] Absorption of the extraordinary elektromagnetic wave in a linear
plasma layer in the region of the hybrid resonance.
A.Ya. Omel'chenko, V.I. Panchenko and K.N. Stepanov.
Radio Physics and Quantum Electronics, 15, 501 (1972)
- [9] Resonant absorption of laser light by a Magnetized Plasma,
W. Woo, K. Estabrook and J.S. deGroot
Physical Review Letters, Vol. 40, Nr. 16, Apr. 1978

- [10] Resonance absorption of laser-energy in a Magnetized Target-Plasma,
H. Maki and K.Niu,
Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 46, Nr. 2 (1979).

- [11] Resonant Absorption in a warm Magneto Plasma
J. Nijs, F.W. Sluyter, Eindhoven University of Technology,
Niet gepubliceerd artikel (1985).

- [12] RC-Informatie PP-3.42
Technische Hogeschool Eindhoven, Rekencentrum (1976).

- [13] Automatic Numerical Integration,
J.A. Zonneveld,
Math. Centre Tracts 8, M.C. Amsterdam 1964.

Lijst van gebruikte symbolen en definities

Index 0 geeft de grootheden van de rust- of evenwichtstoestand aan en index 1 de door de Electro-Magnetische golf verstoorte grootheden.

- \vec{E} : het elektrische veld
 D : de dielektrische verplaatsing
 ρ : de ladingsdichtheid
 \vec{H} : het magnetische veld
 \vec{B} : de magnetische inductie
 \vec{v} : de gemiddelde snelheid van de elektronen
 \vec{j} : de stroomdichtheid van de elektronen
 e : de eenheid van elementaire lading
 m : de rustmassa van een elektron
 n : de dichtheid van de elektronen
 n_i : de dichtheid van de ionen
 p : de impuls van een elektron
 ∇ : de vector-operator gelijk aan $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$
 c : de lichtsnelheid in vacuüm
 ϵ_0 : de elektrische permittiviteit van vacuüm
 μ_0 : de magnetische permeabiliteit van vacuüm
 ν : de frequentie van de botsingen tussen de elektronen en de ionen
 ω : de frequentie van de E.M.-golf
 $\underline{\underline{\epsilon}}$: de plasma-tensor
 x : de plaatscoördinaat in de richting van de gelaagdheid
 L : de gradient-lengte van de elektronendichtheid in de rusttoestand
 $k_0 = \omega/c$: de lengte van de golf-vector $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_y \underline{e}_y$ in vacuüm
 $\lambda = k_0 L$: de W.K.B.-parameter
 $\delta = 1 - i\nu/\omega$: een relatieve maat voor de botsingsfrequentie
 $\omega_p^2(x) = e^2 n_0 / m \epsilon_0$: het kwadraat van de plasmafrequentie
 $r(x) = \omega_p^2(x) / \omega^2$: een plaatsafhankelijke relatieve maat voor de dichtheid
 $\omega_c = e B_0 / m$: de elektroncyclotron frequentie
 $S = \omega_c / \omega$: een relatieve maat voor de voormagnetisatie
 $\omega_{UH}^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$: de upper-hybrid resonantie in het kwadraat

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{E}_1^* \times \underline{H}_1] \quad : \text{ de Poynting-vector}$$

$$P_{\text{diss}}(x) = - \frac{d}{dx} S_{1x}(x) \quad : \text{ het plaatselijk door het plasma gedissipeerde vermogen}$$

$$P_{\text{abs}} = \int_0^{\infty} P_{\text{diss}}(x) dx \quad : \text{ het totaal door het plasma gedissipeerde vermogen}$$

$$\eta = x/L \quad : \text{ de genormeerde plaatscoördinaat}$$

$$z = \delta \eta - \delta^2 + s^2 \quad : \text{ de verschoven genormeerde plaatscoördinaat}$$

$$z = -\gamma = \delta^2 - s^2 \quad : \text{ de plaats van de overgang vacuüm-plasma}$$

$$z = -\beta = -s(\delta - s) \quad : \text{ de plaats van de eerste cut-off}$$

$$z = 0 \quad : \text{ de plaats van de upper-hybrid resonantie}$$

$$z = \alpha = s(\delta + s) \quad : \text{ de plaats van de tweede cut-off}$$

$$H_v^{(1)}(z), H_v^{(2)}(z) \quad : \text{ de v-de orde Hankel-funkties van de eerste en tweede soort}$$

$$A_i(z), B_i(z) \quad : \text{ de Airy-funkties}$$

$$|R|^2 \quad : \text{ de reflectiecoëfficiënt}$$

$$|A|^2 = 1 - |R|^2 \quad : \text{ de absorptiecoëfficiënt}$$

Appendix A : De brekingsindex $n^2(\eta)$ voor een botsingsloos plasma

Bepaal

$$\lim_{\nu/\omega \downarrow 0} \frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta r + r^2}{\delta^2 - s^2 - \delta r} = \lim_{\nu/\omega \downarrow 0} n^2(\eta)$$

met

$$\delta = 1 - iu, \quad u = \nu/\omega.$$

Breuksplitsing geeft:

$$\frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta r + r^2}{\delta^2 - s^2 - \delta r} = ar + b + \frac{c}{\delta^2 - s^2 - \delta r}$$

met

$$a = -1/\delta, \quad \delta b = 2 + a(\delta^2 - s^2), \quad c = (\delta^2 - s^2)(1 - b)$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{u \downarrow 0} ar = \lim_{u \downarrow 0} -\frac{(1+iu)r}{1+u^2} = -r$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \lim_{u \downarrow 0} b &= \lim_{u \downarrow 0} \left[\frac{2(1+iu)}{1+u^2} - 1 + \frac{s^2(1-u^2+2iu)}{(1+u^2)^2} \right] \\ &= 1 + s^2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{u \downarrow 0} \frac{c}{\delta^2 - s^2 - \delta r} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{1 - u^2 - 2iu - s^2}{1 - u^2 - s^2 - r + iu(r-2)}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \left(2 - \frac{2(1+iu)}{1+u^2} - \frac{s^2(1-u^2+2iu)}{(1+u^2)^2} \right) \\ &= \frac{-s^2(1-s^2)}{1-s^2-r} + i \lim_{u \downarrow 0} \frac{u [2(1-s^2-r)(3s^2-2) + s^2(1-s^2)(r-2)]}{(1-s^2-r)^2 + u^2(r-2)^2} \end{aligned}$$

De vergelijking $r(\eta_{\text{res}}) = 1 - s^2$ legt een of meerdere resonantie-punten η_{res} vast op de dimensieloze plaatscoördinaat-as η .

In de buurt van $\eta = \eta_{\text{res}}$ geldt er:

$$r(\eta - \eta_{\text{res}}) \approx 1 - s^2 + r'(\eta_{\text{res}})(\eta - \eta_{\text{res}}), \quad |\eta - \eta_{\text{res}}| \ll 1$$

zodat

$$1 - s^2 - r(\eta - \eta_{\text{res}}) \approx -r'(\eta_{\text{res}})(\eta - \eta_{\text{res}})$$

$$r(\eta - \eta_{\text{res}}) - 2 \approx -[1 + s^2 - r'(\eta_{\text{res}})(\eta - \eta_{\text{res}})]$$

Stel nu

$$\epsilon = r'(\eta_{\text{res}})(\eta - \eta_{\text{res}})$$

dan geldt er met $|\eta - \eta_{\text{res}}| \ll 1$ dat:

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{2u(1-s^2-r)(3s^2-2)}{(1-s^2-r)^2 + u^2(r-2)^2} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{-2(3s^2-2)u\epsilon}{\epsilon^2 + u^2(1+s^2)^2} = 0$$

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{u s^2(1-s^2)(r-2)}{(1-s^2-r)^2 + u^2(r-2)^2} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{-s^2(1-s^2)u(1+s^2-\epsilon)}{\epsilon^2 + u^2(1+s^2)^2}$$

$$= \lim_{u \downarrow 0} \frac{-s^2(1-s^2)u(1+s^2)}{\epsilon^2 + u^2(1+s^2)^2} + \lim_{u \downarrow 0} \frac{-s^2(1-s^2)u\epsilon}{\epsilon^2 + u^2(1+s^2)^2}$$

$$= -\pi s^2(1-s^2) \delta_0(\epsilon) + 0$$

$$= -\pi s^2(1-s^2) \int_0 \left[r'(\eta_{\text{res}})(\eta - \eta_{\text{res}}) \right]$$

$$= \frac{-\pi s^2(1-s^2)}{|r'(\eta_{\text{res}})|} \int_0 (\eta - \eta_{\text{res}})$$

daar

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\alpha}{\epsilon^2 + \alpha^2} = \pi \int_0(\epsilon), \quad \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\alpha \epsilon}{\epsilon^2 + \alpha^2} = 0$$

Het resultaat komt er nu als volgt uit te zien:

$$\lim_{\nu/\omega \downarrow 0} \frac{\delta^2 - s^2 - 2\delta r + r^2}{\delta^2 - s^2 - \delta r} = \frac{1 - s^2 - 2r + r^2}{1 - s^2 - r} - \frac{i\pi s^2(1-s^2)}{|r'(\eta_{res})|} \int_D (\eta - \eta_{res})$$

met

$$r(\eta_{res}) = 1 - s^2, \quad \delta = 1 - i\nu/\omega, \quad 0 \leq s \leq 1$$

Appendix B Het programma voor de berekening van de absorptiecoëfficiënt.

Program BerekeningAbsorptie;

(* \$I Complex.Box *)

Const MaxDimY=40; MaxDimF=80; Sp= ' ';

Var C:Array[-1..MaxDimY] of Complex;

A,K:Array[-1..MaxDimF] of Complex;

DimY,DimF,M: Integer;

lb,lb2,s2,v,v2,reY,aeR,reR,aeF,A2: Real;

d,lbC,Ey,dEydz,dEydx,G1,dG1dz,dG1dx,G2,dG2dz,dG2dx: Complex;

xy,xf1,xf2,xv: Real; zy,zf1,zf2,zv,c1,Hulp,T,N,R: Complex;

x,h,Interval: Real;

Procedure InitConstanten;

Var Noemer,zfm: Real;

Begin

Casg(d,1,-v);

lb2:=Sqr(lb); v2:=Sqr(v); Noemer:=Sqr(1+v2);

Casg(lbC,lb*(1-v2)/Noemer,2*lb*v/Noemer);

xy:=Exp(2/3*Ln(20/lb))+3-s2;

Casg(zy,xy-1+v2+s2,v*(2-xy));

zfm:=Exp(2/3*Ln(14/lb));

xf1:=1-s2+zfm;

Casg(zf1,xf1-1+v2+s2,v*(2-xf1));

xf2:=1-s2-zfm;

Casg(zf2,xf2-1+v2+s2,v*(2-xf2));

Casg(zv, -1+v2+s2,v*2);

End;

Procedure MaakC(z0,reY: Real; Var DimY: Integer);

(* Array C wordt gevuld *)

Var n,m: Integer; Factor,Term,v2,nv2: Real; Som,Hulp: Complex;

Begin

If z0>0 then

Begin

RmulC(-1,lbC,C[0]);

Casg(C[1], 0,0);

RmulC(s2,lbC,C[2]);

Casg(C[3], -1/4,0);

Casg(C[4],s2*lb/2,0);

Writeln;

Writeln('Bepaling v.d coëfficiënten van de asymptotische ontwikkeling');

Writeln('voor |z| > z0 met z0 = ',z0:9:6); Writeln;

Writeln('n':8,'Re{C[n]}':14,'Im{C[n]}':14,'|C[n]|*z0^1/2*(1-n)':20);

Factor:=1/Sqrt(Abs(z0)); Term:=Abs(z0);

For n:=0 to 4 do

Begin

Term:=Term*Factor; (* Term := z0^1/2*(1-n) *)

Writeln(n:8,C[n].Re:14:8,C[n].Im:14:8,Norm(C[n])*Term:20:8);

End;

n:=2;

While ((n+2)<MaxDimY) and (Norm(C[n+2])*Term>reY) do

Begin

n:=n+1; Term:=Term*Factor; Casg(Som,0.0,0.0);

For m:=1 to n+1 do

Begin

Cmul(C[m],C[n+2-m],Hulp); Cadd(Som,Hulp,Som);

End;

Casg(C[n+2],((n-2)*C[n-1].Re-2*Som.Re)/4,((n-2)*C[n-1].Im-2*Som.Im)/4);

Cdiv(C[n+2],C[0],C[n+2]);

Writeln(n+2:8,C[n+2].Re:14:8,C[n+2].Im:14:8,Norm(C[n+2])*Term:20:8);

End;

DimY:=n+2; Writeln;

```
End else Writeln('Deze asymptotische benadering geldt alleen voor  $z \neq 0$  !')
End;
```

```
Procedure AsymY(z:Complex; Var Y,dYdz:Complex);
(* Het array C wordt gebruikt *)
Var n:Integer; Factor,Term0,Term1,Term2,Som,dSom,Hulp,dHulp:Complex;
Begin
  If Modulus(z)>0 then
    Begin
      RmachtC(z,0.5,Factor);
      Cmul(z,z,Term0); Cdiv(Term0,Factor,Term1); Term2:=z;
      Casg(Som,0,0); Casg(dSom,0,0);
      For n:=0 to DimY do
        Begin
          Term0:=Term1; Term1:=Term2; Cdiv(Term2,Factor,Term2);
          (* Termi:=z^(1/2*(3-i-n) *)
          If n<>3 then
            Begin
              Cmul(Term0,C[n],Hulp); RmulC(2/(3-n),Hulp,Hulp);
            End else
            Begin
              Cln(z,Hulp); Cmul(Hulp,C[n],Hulp);
            End;
          Cadd(Som,Hulp,Som);
          Cmul(Term2,C[n],dHulp); Cadd(dSom,dHulp,dSom);
        End;
      Cexp(Som,Y); Cmul(dSom,Y,dYdz);
    End else
    Begin
      Casg(Y,0,0); Casg(dYdz,1,0);
      Writeln('De functie AsymY(z) bestaat alleen voor  $|z| > 0$  !');
    End;
  End;
```

```
Procedure Frobanius(z0,aeF:Real; Var DimF:Integer);
(* Deze procedure vult de array's A en K en de waarde DimF *)
Var n:Integer; Term,c1:Real; lbc2,Hulp,c2:Complex;
```

```
Procedure DeelTerm(A_3,A_2,A_1:Complex; Var A:Complex);
Var Hulp:Complex;
Begin
  RmulC(c1,A_2,Hulp); Csub(A_3,Hulp,A); Cmul(c2,A_1,Hulp);
  Csub(A,Hulp,A); Cmul(lbc2,A,A);
End;
```

```
Begin
  Cmul(lbc,lbc,lbc2); c1:=2*s2; Casg(c2,s2*(1-v2-s2),-2*v*s2);
  Casg(A[-1],0,0); Casg(A[0],1,0);
  Casg(A[1],-1/2,0); Cmul(A[1],c2,A[1]); Cmul(lbc2,A[1],A[1]);
  Casg(K[-1],0,0); Casg(K[0],-1,0); RmulC(-1,A[1],K[1]);
  Writeln('De Frobanius reeks-ontwikkeling'); Writeln;
  Writeln('n':5,'Re{A[n]}' :16,'Im{A[n]}' :16,'Re{K[n]}' :16,'Im{K[n]}' :16);
  For n:=0 to 1 do
    Writeln(n:5,Sp,A[n].Re:14,Sp,A[n].Im:14,Sp,K[n].Re:14,Sp,K[n].Im:14);
    n:=1; Term:=z0; (* Term := z0^n *)
  Repeat
    n:=n+1; Term:=z0*Term;
    DeelTerm(A[n-3],A[n-2],A[n-1],A[n]);
    RmulC(1/(n*(n+1)),A[n],A[n]);
    DeelTerm(K[n-3],K[n-2],K[n-1],K[n]); RmulC(2*(2*n-1),A[1],Hulp);
    Cmul(Hulp,A[n-1],Hulp); Cadd(K[n],Hulp,K[n]);
    RmulC(1/((n-1)*n),K[n],K[n]);
    Writeln(n:5,Sp,A[n].Re:14,Sp,A[n].Im:14,Sp,K[n].Re:14,Sp,K[n].Im:14);
  Until ( (Term*Norm(A[n])<aeF) and (Term*Norm(K[n])<aeF) ) or (n>=MaxDimF);
```

```
DimF:=n; Writeln;
End;

Procedure G1G2(z:Complex; Var G1,dG1dz,G2,dG2dz:Complex);
Var n:Integer; Hulp,b1,Lnz,b1Lnz,b1G1_z:Complex;
Begin
  Casg(G1,0,0); Casg(G2,0,0); Casg(dG1dz,0,0);
  For n:=DimF downto 0 do
  Begin
    Cmul(G1,z,G1); Cadd(A[n],G1,G1);
    Cmul(G2,z,G2); Cadd(K[n],G2,G2);
    Cmul(dG1dz,z,dG1dz); RmulC(n+1,A[n],Hulp); Cadd(Hulp,dG1dz,dG1dz);
  End;
  Casg(dG2dz,0,0);
  For n:=DimF downto 1 do
  Begin
    Cmul(dG2dz,z,dG2dz); RmulC(n,K[n],Hulp); Cadd(Hulp,dG2dz,dG2dz);
  End;
  RmulC(-2,A[1],b1); Cmul(b1,G1,b1G1_z); Cln(z,Lnz); Cmul(b1,Lnz,b1Lnz);
  (* Bereken G2 volgens de definitie *)
  Cmul(z,G1,Hulp); Cmul(b1Lnz,Hulp,Hulp); Cadd(Hulp,G2,G2);
  (* Bereken dG2dz volgens de definitie *)
  Cmul(b1Lnz,dG1dz,Hulp); Cadd(Hulp,b1G1_z,Hulp); Cadd(Hulp,dG2dz,dG2dz);
  (* Bereken tenslotte G1 volgens de definitie *)
  (* dG1dz en G2 waren reeds juist *)
  Cmul(z,G1,G1);
End;

Procedure N2(x:Real; y:Complex; Var N2x:Complex);
Var T,N:Complex;
Begin
  Casg(T,x*(x-2)+1-s2-v2,2*v*(x-1));
  Casg(N,-x+1-s2-v2,v*(x-2));
  Cdiv(T,N,N2x);
End;

Procedure F(x:Real; y,dydx:Complex; s:Real; Var Fx:Complex);
Begin
  N2(x,y,Fx); Cmul(Fx,y,Fx); RmulC(-s*1b2,Fx,Fx);
End;

Procedure RK2(Var x:Real; Var y,dydx:Complex; Var h:Real; d,ae,re:Real;
  Var M:Integer);
(* Vertaal uit de Burroughs-Extended Algol Soucre-tekst van de procedure *)
(* RK2(FXYdYdX,X,Y,dYdX,D,H,AE,RE,M) zie THE-RC inf. PP-3.4.2 *)
Var Last,First,Reject:Boolean;
  x1,s,inter,b,Hmin,h1,AbsH,DiscrY,DiscrZ,TolY,TolZ,mu,mu1,fhy,fhz:Real;
  y1,z1,k0,k1,k2,k3,k4,k5:Complex;
  Label Test,Stap,Acc,Next;

Procedure Ber(y1:Complex; c,c0,c1,c2,c3,c4,c5:Integer; c_Noemer:Real;
  Var y:Complex);
(* y:=y1+(c*z1+c0*k0+c1*k1+c2*k2+c3*k3+c4*k4+c5*k5)/N *)
Var Hulp:Complex;
Begin
  If c <>0 then RmulC(c,z1,y) else Casg(y,0,0);
  If c0<>0 then Begin RmulC(c0,k0,Hulp); Cadd(y,Hulp,y); End;
  If c1<>0 then Begin RmulC(c1,k1,Hulp); Cadd(y,Hulp,y); End;
  If c2<>0 then Begin RmulC(c2,k2,Hulp); Cadd(y,Hulp,y); End;
  If c3<>0 then Begin RmulC(c3,k3,Hulp); Cadd(y,Hulp,y); End;
  If c4<>0 then Begin RmulC(c4,k4,Hulp); Cadd(y,Hulp,y); End;
  If c5<>0 then Begin RmulC(c5,k5,Hulp); Cadd(y,Hulp,y); End;
  RmulC(c_Noemer,y,y); Cadd(y1,y,y);
End;
```

```

Procedure Discr(Var DiscrY,DiscrZ:Real);
Var v0,v1,v2,v3,Hulp,Som:Complex;
Begin
  Csub(k0,k3,v0); Csub(k2,k3,v1); Csub(k4,k3,v2); Csub(k5,k3,v3);
  RmulC(-21,v0,Som); RmulC(108,v1,Hulp); Cadd(Som,Hulp,Som);
  RmulC(25,v2,Hulp); Cadd(Som,Hulp,Som);
  RmulC(s/56,Som,Som); DiscrY:=Norm(Som);
  RmulC(21,v0,Som); RmulC(-162,v1,Hulp); Cadd(Som,Hulp,Som);
  RmulC(-125,v2,Hulp); Cadd(Som,Hulp,Som);
  RmulC(42,v3,Hulp); Cadd(Som,Hulp,Som);
  RmulC(1/14,Som,Som); DiscrZ:=Norm(Som);
End;

Begin
  If d<>0 then
    Begin
      m:=0; x1:=x; y1:=y; z1:=dydx; b:=x+d;
      AbsH:=Abs(h); If d>0 then s:=AbsH else s:=-AbsH;
      Inter:=Abs(d); Hmin:=Inter*Re+Ae; Ae:=Ae/Inter; Re:=Re/Inter;
      First:=True;
    Test:
      AbsH:=Abs(s);
      If AbsH<Hmin then
        Begin
          If s>0 then s:=Hmin else s:=-Hmin; AbsH:=Hmin;
        End;
      If (s>=b-x1) = (s>=0) then
        Begin
          h:=s; last:=True; s:=b-x1; AbsH:=Abs(s);
        End else Last:=False;
    Stap:
      x:=x1; y:=y1; dydx:=z1;
      F(x,y,dydx,s,k0); x:=x1+s*2/9;
      Ber(y1,18,2,0,0,0,0,0,s/81,y); Ber(z1,0,2,0,0,0,0,0,1/9,dydx);
      F(x,y,dydx,s,k1); x:=x1+s/3;
      Ber(y1,6,1,0,0,0,0,0,s/18,y); Ber(z1,0,1,3,0,0,0,0,1/12,dydx);
      F(x,y,dydx,s,k2); x:=x1+s/2;
      Ber(y1,8,1,0,1,0,0,0,s/16,y); Ber(z1,0,1,0,3,0,0,0,1/8,dydx);
      F(x,y,dydx,s,k3); x:=x1+s*0.8;
      Ber(y1,100,12,0,0,28,0,0,s/125,y);
      Ber(z1,0,53,-135,126,56,0,0,1/125,dydx);
      F(x,y,dydx,s,k4); If Last then x:=b else x:=x1+s;
      Ber(y1,336,21,0,92,0,55,0,s/336,y);
      Ber(z1,0,133,-378,276,112,25,0,1/168,dydx);
      F(x,y,dydx,s,k5);
      Discr(DiscrY,DiscrZ);
      TolY:=AbsH*(Norm(z1)*Re+Ae);
      TolZ:=Norm(k0)*Re+AbsH*Ae;
      Reject:=(DiscrY>TolY) or (DiscrZ>TolZ);
      Fhy:=DiscrY/TolY; Fhz:=DiscrZ/TolZ;
      If Fhz>Fhy then Fhy:=Fhz;
      Mu:=1/(1+Fhy)+0.45;
      If Reject then
        Begin
          If AbsH<=Hmin then
            Begin
              m:=m+1; Write(Chr(7)); (* Alarm-bel *)
              y:=y1; dydx:=z1; First:=True; Goto Next;
            End;
          s:=Mu*s; Goto Test;
        End;
      If First then
        Begin

```

```
    First:=False; h1:=s; s:=Mu*s; Goto Acc;
End;
Fhy:=Mu*s/h1+Mu-Mul;
h1:=s; s:=Fhy*s;
Acc:
    Mul:=Mu;
    Ber (y1,56,7,0,36,0,-15,0,h1/56,y);
    Ber (z1,0,-63,189,-36,-112,50,0,1/28,dydx);
    F(x,y,dydx,h1,k5);
    Ber (y1,336,35,0,108,0,25,0,h1/336,y);
    Ber (z1,0,35,0,162,0,125,14,1/336,dydx);
Next:
    If b<>x then
    Begin
        x1:=x; y1:=y; z1:=dydx; Goto Test;
    End;
    If Not Last then h:=s;
End;
End;

Begin
    Writeln('Berekening v.d absorptie van de loodrecht invallende ');
    Writeln('extra-ordinaire golf op een plasma met een lineaire elektronen-',
        'dichtheid. ');
    Write('k0*L,s^2,v/w,reY,aeR,reR,aeF: ');
    lb:=5; s2:=0.5; v:=0.01; reY:=1e-3; aeR:=1e-6; reR:=1e-6; aeF:=1e-9;
    Readln(lb,s2,v,reY,aeR,reR,aeF);
    While (lb>0) and (reY>0) and (aeR>0) and (reR>0) and (aeF>0) do
    Begin
        InitConstanten;
        Writeln('Bepaling van de asymptotische waarde');
        Cpvt('zy ',zy,12); Writeln;
        MaakC(Modulus(zy),reY,DimY);
        AsymY(zy,Ey,dEydz); Cdiv(dEydz,d,dEydx);
        Cpvt('Ey ',Ey,12); Cpvt('dEydx ',dEydx,12); Writeln; Writeln;
        (* Runge-Kutta integratie *)
        x:=xy; h:=(xy-xf1)/4; Interval:=xf1-xy; (* N.B Interval < 0 *)
        Rk2(x,Ey,dEydx,h,Interval,aeR,reR,M);
        Writeln('Koppeling Runge-Kutta integratie aan Frobanius-reeksen');
        Cpvt('zf ',zf1,12); Writeln;
        Frobanius(Modulus(zf1),aeF,DimF);
        G1G2(zf1,G1,dG1dz,G2,dG2dz); Cmul(dG1dz,d,dG1dx); Cmul(dG2dz,d,dG2dx);
        Cpvt('G1 ',G1,12); Cpvt('dG1dx ',dG1dx,12); Writeln;
        Cpvt('G2 ',G2,12); Cpvt('dG2dx ',dG2dx,12); Writeln;
        Determinant(Ey,G2,dEydx,dG2dx,T);
        Determinant(G1,Ey,dG1dx,dEydx,N); Cdiv(T,N,c1);
        Cpvt('c1 ',c1,12); Writeln;
        If xf2>0
        then G1G2(zf2,G1,dG1dz,G2,dG2dz)
        else G1G2(zv ,G1,dG1dz,G2,dG2dz);
        Cmul(c1, G1,Hulp); Cadd(Hulp, G2, Ey);
        Cmul(c1,dG1dz,Hulp); Cadd(Hulp,dG2dz,dEydz); Cmul(dEydz,d,dEydx);
        Cpvt('Ey ',Ey,12); Cpvt('dEydx ',dEydx,12); Writeln; Writeln;
        If xf2>0 then
        Begin
            Writeln('De extra Runge-Kutta integratie');
            x:=xf2; h:=xf2/4; Interval:=-xf2;
            Rk2(x,Ey,dEydx,h,Interval,aeR,reR,M);
            Cpvt('Ey ',Ey,12); Cpvt('dEydx ',dEydx,12); Writeln; Writeln;
        End;
        (* Berekening v.d Absorptie A^2 *)
        Casg(Hulp,0,lb); Cmul(Hulp,Ey,Ey);
        Cadd(Ey,dEydx,T); Csub(Ey,dEydx,N); Cdiv(T,N,R);
```

```

(*****)
(* PROCEDURES EN FUNKTIES VOOR BEWERKINGEN OP COMPLEXE GETALLEN *)
(* *)
(* STEL A, B EN C ZIJN COMPLEXE GETALLEN EN R REAL DAN *)
(* *)
(* C:=A+B WORDT CADD(A, B, C) EN C:=A-B WORDT CSUB(A, B, C) *)
(* C:=A*B WORDT CMUL(A, B, C) EN C:=A/B WORDT CDIV(A, B, C) *)
(* C:=EXP(A) WORDT CEXP(A, C) EN C:=LN(A) WORDT CLN(A, C) *)
(* C:=A^B WORDT CMACHT(A, B, C) EN C:=A^R WORDT CMACHTR(A, R, C) *)
(* *)
(* DE BOOLEAN TRANSOK:=TRUE ALS DE FUNKTIE-WAARDEN IN HET GETALLEN- *)
(* BEREIK VAN DE MACHINE LIGGEN. *)
(*****)

```

```

TYPE
  COMPLEX=RECORD
    RE, IM:REAL;
  END;
  STRING80=STRING(80);

```

```
VAR TRANSOK:BOOLEAN;
```

```

FUNCTION RLN(X:REAL):REAL;
BEGIN
  IF X<=0.0 THEN
    BEGIN
      WRITELN('LN(X) VOOR X<=0 IS NIET GEDEFINEERD. '); TRANSOK:=FALSE;
      IF X<0.0 THEN RLN:=-LN(-X) ELSE RLN:=-85.0;
    END ELSE
    BEGIN
      TRANSOK:=TRUE; RLN:=LN(X);
    END;
END;

```

```

FUNCTION REXP(X:REAL):REAL;
BEGIN
  IF X<-85.0 THEN
    BEGIN
      WRITELN('EXP(X) IS NIET GEDEFINEERD VOOR X<-85.0');
      TRANSOK:=FALSE; REXP:=1.2E-37;
    END ELSE
    IF X>85.0 THEN
    BEGIN
      WRITELN('EXP(X) IS NIET GEDEFINEERD VOOR X>85.0');
      TRANSOK:=FALSE; REXP:=8.2E+36;
    END ELSE
    BEGIN
      TRANSOK:=TRUE; REXP:=EXP(X);
    END;
END;

```

```

FUNCTION RMIN(A, B:REAL):REAL;
BEGIN
  IF A<B THEN RMIN:=A ELSE RMIN:=B;
END;

```

```

FUNCTION RMAX(A, B:REAL):REAL;
BEGIN
  IF A>B THEN RMAX:=A ELSE RMAX:=B;
END;

```

```

FUNCTION MACHT(A, B:REAL):REAL;
BEGIN

```



```
MACHT:=REXP(B*RLN(A));  
END;
```

```
PROCEDURE NORMEER(VAR A:COMPLEX; VAR NORM:REAL);  
BEGIN  
  WITH A DO  
  BEGIN  
    NORM:=RMAX(ABS(RE),ABS(IM));  
    IF NORM<>0.0 THEN  
      BEGIN RE:=RE/NORM; IM:=IM/NORM; END;  
    END;  
  END;
```

```
FUNCTION NORM(A:COMPLEX):REAL;  
BEGIN  
  NORM:=RMAX(ABS(A.RE),ABS(A.IM));  
END;
```

```
FUNCTION MODULUS2(A:COMPLEX):REAL;  
BEGIN  
  MODULUS2:=SQR(A.RE)+SQR(A.IM);  
END;
```

```
FUNCTION MODULUS(A:COMPLEX):REAL;  
VAR MAX:REAL;  
BEGIN  
  NORMEER(A,MAX);  
  IF MAX=0.0  
  THEN MODULUS:=0.0  
  ELSE MODULUS:=MAX*SQRT(SQR(A.RE)+SQR(A.IM));  
END;
```

```
FUNCTION ARGUMENT(A:COMPLEX):REAL;  
BEGIN  
  WITH A DO  
  BEGIN  
    IF RE=0.0  
    THEN IF IM=0.0  
      THEN ARGUMENT:=0.0 (* DIT IS EEN WILLEKEURIGE KEUZE *)  
      ELSE IF IM>0.0  
        THEN ARGUMENT:=PI/2  
        ELSE ARGUMENT:=-PI/2  
    ELSE IF RE>0.0  
      THEN ARGUMENT:=ARCTAN(IM/RE)  
      ELSE IF IM>=0.0  
        THEN ARGUMENT:=ARCTAN(IM/RE)+PI  
        ELSE ARGUMENT:=ARCTAN(IM/RE)-PI;  
    END;  
  END;
```

```
PROCEDURE RMULC(A:REAL; B:COMPLEX; VAR C:COMPLEX);  
BEGIN  
  C.RE:=A*B.RE; C.IM:=A*B.IM;  
END;
```

```
PROCEDURE CADD(A,B:COMPLEX; VAR C:COMPLEX);  
BEGIN  
  C.RE:=A.RE+B.RE; C.IM:=A.IM+B.IM;  
END;
```

```
PROCEDURE CSUB(A,B:COMPLEX; VAR C:COMPLEX);  
BEGIN  
  C.RE:=A.RE-B.RE; C.IM:=A.IM-B.IM;  
END;
```

```

PROCEDURE CMUL(A, B: COMPLEX; VAR C: COMPLEX);
VAR MAXA, MAXB, FACT: REAL;
BEGIN
  NORMEER(A, MAXA); NORMEER(B, MAXB); FACT := MAXA * MAXB;
  C.RE := FACT * (A.RE * B.RE - A.IM * B.IM);
  C.IM := FACT * (A.RE * B.IM + A.IM * B.RE);
END;

PROCEDURE CDIV(A, B: COMPLEX; VAR C: COMPLEX);
VAR MAXA, MAXB, NOEMER: REAL;
BEGIN
  NORMEER(A, MAXA); NORMEER(B, MAXB);
  NOEMER := (SQRT(B.RE) + SQRT(B.IM)) * MAXB;
  IF NOEMER = 0.0 THEN
    BEGIN
      TRANSOK := FALSE; WRITELN('U PROBEERT DOOR NUL TE DELEN');
    END ELSE
    BEGIN
      C.RE := (A.RE * B.RE + A.IM * B.IM) / NOEMER * MAXA;
      C.IM := (A.IM * B.RE - A.RE * B.IM) / NOEMER * MAXA;
    END;
END;

PROCEDURE CEXP(A: COMPLEX; VAR C: COMPLEX);
VAR R: REAL;
BEGIN
  R := REXP(A.RE);
  C.RE := R * COS(A.IM); C.IM := R * SIN(A.IM);
END;

PROCEDURE CLN(A: COMPLEX; VAR C: COMPLEX);
BEGIN
  C.RE := LN(MODULUS(A)); C.IM := ARGUMENT(A);
END;

PROCEDURE RMACHTC(A: COMPLEX; B: REAL; VAR C: COMPLEX);
BEGIN
  CLN(A, C); RMULC(0.5, C, C); CEXP(C, C);
END;

PROCEDURE CMACHT(A, B: COMPLEX; VAR C: COMPLEX);
BEGIN
  CLN(A, C); CMUL(B, C, C); CEXP(C, C);
END;

PROCEDURE CASG(VAR A: COMPLEX; R, I: REAL);
BEGIN
  WITH A DO BEGIN RE := R; IM := I; END;
END;

PROCEDURE CPRT(NAAM: STRING$0; A: COMPLEX; N: INTEGER);
BEGIN
  WITH A DO
    IF IM > 0
    THEN WRITE(NAAM, ' = ', RE: N, ' + I ', IM: N, ' ')
    ELSE WRITE(NAAM, ' = ', RE: N, ' - I ', ABS(IM): N, ' ');
  END;
END;

PROCEDURE DETERMINANT(M11, M12, M21, M22: COMPLEX; VAR DET: COMPLEX);
VAR HULP1, HULP2: COMPLEX;
BEGIN
  (* DET := M11 * M22 - M12 * M21 *)
  CMUL(M11, M22, HULP1); CMUL(M12, M21, HULP2); CSUB(HULP1, HULP2, DET);
END;

```