

MASTER

Structuur-theorie in de theoretische schakeltechniek

Scheepmaker, H.A.

Award date:
1971

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Vakgroep EB

STRUCTUUR-THEORIE

IN DE THEORETISCHE SCHAKELTECHNIEK.

H. A. SCHEEPMAKER.

Inleiding.

Onderliggend werk beoogt een benadering te geven van de theorie van de structuur van sequentiële machines in de theoretische schakeltechniek.

Met behulp van de partitie-theorie wordt gestreefd naar minvulle decompositie, en verminderde afhankelijkheid tussen de variabelen, teneinde tot een zo eenvoudig mogelijke realisering van bedoelde machines te geraken.

Inhoud.

Inleiding.

1. Algebraïsche ondergrond.

- 1.1. Verzamelingen - notaties.
- 1.2. Partities; notaties.
- 1.3. Lattice's.

2. Machines.

- 2.1. Definitie's van machines.
- 2.2. Equivalentie.
- 2.3. Simulatie.

3. Splitsing van machines en het probleem van het toewijzen van variabelen.

- 3.1. Realisering met behulp van binaire variabelen.
- 3.2. Verschillende mogelijkheden voor codering.
- 3.3. Structuur, verminderde afhankelijkheid en splitsing; economie.
- 3.4. Toewijzen m. b. v. partities.

4. Partitie - theorie.

- 4.1. Definitie's.
- 4.2. Eigenschappen.
- 4.3. Lattice van partities.

5. Partitie-paren en machines.

5.1. Verminderde afhankelijkheid.

5.2. Definitie.

5.3. De theorie van de paar algebra.

5.4. Partitie-paar algebra's.

5.5. Partitie-paren en de toestands-toewijzing met verminderde afhankelijkheid.

5.6. De berekening van M_n -paren.

5.7. Don't Care's.

6. Partities met substitutie-eigenschap en machines.

6.1. Definitie.

6.2. De lattice van partities met substitutie-eigenschap.

6.3. Elementaire parallel-splitsing.

6.4. Elementaire serie-splitsing.

6.5. Berekening van partities met substitutie-eigenschap.

6.6. Toestands-reductie.

1. Algebraïsche ondergrond.

In dit inleidende hoofdstuk zullen enige wiskundige begrippen, welke de basis vormen, waarop de hierna volgende theorie is opgebouwd, worden behandeld.

Een aantal van deze begrippen zal te bestemder plaatse nader worden besien en verduidelijkt.

1.1. Verzamelingen - notaties.

De verzameling of set van alle elementen s , welke de eigenschap W bezitten, wordt genoteerd als:

$$S = \{s \mid s \text{ bezit eigenschap } W\}.$$

Voorbeeld: \mathbb{R}_+ .

Vb: Alle even getallen: $S = \{i \mid i = 2k, k = 0, 1, 2, \dots\}$.

De verzameling, welke geen elementen bevat, wordt de lege verzameling \emptyset genoemd.

Stel s is een element van S , dan wordt dit genoteerd als:

$$\underline{s \in S} \text{ of } \underline{s \text{ in } S}.$$

De verzameling S is een subset van verzameling T , notatie $S \subseteq T$, al

$$s \in S \Rightarrow s \in T.$$

S en T zijn gelijke verzamelingen, $S = T$, dan en dan alleen als

$$S \subseteq T \text{ en } T \subseteq S.$$

De doorsnijding van twee verzamelingen S en T is een verzameling, welke alle elementen bevat, die zowel in S als in T voorkomen:

$$\underline{S \cap T} = \{u \mid u \in S \text{ en } u \in T\}.$$

De vereniging van S en T :

$$\underline{S \cup T} = \{u \mid u \in S \text{ of } u \in T\}.$$

Twee verzamelingen zijn disjunct, als $S \cap T = \emptyset$

Met Cartesisch product van de geordende rij verzamelingen S_1, S_2, \dots, S_n is de verzameling van alle n -tupels (s_1, s_2, \dots, s_n) met $s_i \in S_i$; gschreven wordt:

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \mid s_i \in S_i\}.$$

V.b.: \mathbb{R}_n

Tussen de elementen van 2 sets kunnen bepaalde verbanden gedefinieerd worden, welke nu aan de orde zullen komen:

f is een functie of afbeelding van S "in" T , notatie $f: S \rightarrow T$, als f aan ieder element $s \in S$ een element $t \in T$ toevoegt; notatie: $f(s) = t$.

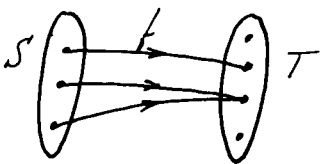


Fig 1.0.

$f: S \text{ "in" } T$

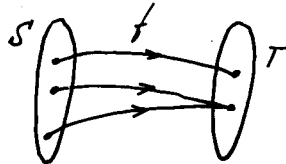


Fig 1.2

$f: S \text{ "op" } T$

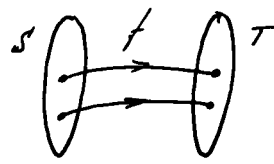


Fig 1.3

$f: S \text{ "in-} \ddot{\text{u}} \text{-} \ddot{\text{u}} \text{nduidig" } S \text{ "op" } T$.

Fig. 1.1 symboliseert een voorbeeld hiervan.

geldt tevens: ieder element $t \in T$ is een beeld van een element uit S , $T = \{t \mid t = f(s), s \in S\}$, dan wordt dit een op- (in plaats van een, in-) afbeelding genoemd. Zie ook fig 1.2.

Een functie of afbeelding is één-éénduidig (notatie 1-1) als geldt:

$$s_1 \neq s_2 \Rightarrow f(s_1) \neq f(s_2) ,$$

m.a.w. ieder element $t \in T$ is een beeld van ten hoogste een $s \in S$.

Vergelijk ook fig 1.3.

Vb.: de functie in \mathbb{R}_2 : $y = f(x) = 2x$.

Een binair relatie R tussen een verzameling S en een verzameling T is een subset van $S \times T$; voor iedere $(s, t) \in R$ wordt geschreven: $s R t$.

Vb.: $R = \{(x, y) \mid y = 2x\}$, een rechte in \mathbb{R}_2 .

Een binair relatie op $S \times S$ is een partiele ordening van S , dan en dan alleen, als R is:

1. reflexief: $\forall s \in S [s R s]$
2. anti-symmetrisch: $\forall s, t \in S [s R t \text{ en } t R s \Rightarrow t = s]$
3. transitief: $\forall s, t, u \in S [s R t \text{ en } t R u \Rightarrow s R u]$

Vb.: in \mathbb{R} : $x_1 \leq x_2$.

Een set met een partiele ordening zal worden aangeduid met een „partieel geordende set“:

Als R een partiele ordening is, zal het meer suggestieve symbool „ \leq “ in plaats van R gebruikt worden; de notatie voor een partieel geordende set is dan: (S, \leq) .

Vb.: Een afbeelding.

Vb.: De verzameling T van alle subsets van S is een partiël geordende verzameling (T, \subseteq) onder de ordening \subseteq .

1.2. Partities; notatie.

Definitie: Een partitie π op S is een verzameling niet-lege disjuncte subsets van S , waarbij de vereniging van deze subsets S is; de elementen in een subset worden „equivalent“ genoemd.

Notatie: $\pi = \{B_1, \dots, B_n\}$.

De subset van equivalente $s \in S$ worden blokken genoemd, elementen van de verzameling π , waarbij de volgende notaties worden ingevoerd:

$B_\pi(s)$: het blok van π , dat s bevat;

$s \equiv t (\pi)$: s en t in hetzelfde blok van π .

Wanneer een partitie uitgeschreven wordt, worden de blokken onderscheiden door middel van een „-“, zoals het volgende voorbeeld toont:

Vb.: Stel $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en een of andere partitie π op S heeft als elementen de blokken $B_1 = \{1\}$ en $B_2 = \{2, 3, 4\}$. Dan wordt dit als volgt genoteerd:

$$\pi = \{B_1, B_2\} = \{\bar{1}; \overline{2, 3, 4}\}.$$

1.3. Lattice's.

Zij (S, \leq) een partiël geordende set, en T een subset van S . Dan is $s \in S$ de kleinste bovengrens, k. b. g., van T dan en dan alleen als:

s is het kleinste element in S , zodat $\forall t \in T [s \leq t]$.

Duaal is $s \in S$ de grootste onder-grens, g.o.g., van T dan en dan alleen als:

$$\forall t \in T [s \text{ is het grootste element in } S, \text{ zodat } s \leq t].$$

Definitie: Een lattice L is een partiël geordende set, $L = (S, \leq)$, welke een k.b.g. en g.o.g. voor ieder paar elementen bevat.

Vb.: De partiël geordende set van alle subsets T_i van S met:

$$g.o.g. (T_1, T_2) = T_1 \cap T_2.$$

$$k.b.g. (T_1, T_2) = T_1 \cup T_2.$$

Definitie: $L' = (S', \leq)$ is een sublattice van een lattice $L = (S, \leq)$,

indien: 1 $S' \subseteq S$,

2 Voor ieder paar elementen uit S' de bijbehorende g.o.g. en k.b.g. ook tot S' behoren.

Vb.: Zij S uit het vorige voorbeeld: $\{1, 2, 3\}$.

De lattice, gevormd door de subsets uit het vorige voorbeeld:

$T_1 = \{2\}$, $T_2 = \{3\}$, $T_3 = \{2, 3\}$, $T_4 = \{1, 2, 3\}$ en \emptyset , is een sublattice van de lattice uit dat voorbeeld.

2. Machines.

In dit hoofdstuk zal een aantal definities worden gegeven, welke een mathematisch model van een sequentiële machine voorstellen. Met behulp van dit model zullen dan de verschillende eigenschappen en problemen van de sequentiële machine behandelen kunnen worden.

2.1. Definitie van machines.

Bij iedere sequentiële machine kunnen de volgende drie, niet-lege, verzamelingen onderscheiden worden:

1. Een verzameling inputs, welke na elkaar kunnen worden toegevoerd, symbool I. (Ook wel genaamd: input-alfabet).
2. Een verzameling toestanden, waarin de machine zich kan bevinden, in één geheel, symbool: S.

Deze interne toestanden corresponderen in de fysische apparaten met verschillende combinaties van bits in een geheugen, pulsen in verdraaiingslijnen, standen van flip-flops etc. en worden gewoonlijk bezicht aan het einde van een algemene klok periode.

3. Een verzameling output, symbool O.

Met deze verzamelingen kan een seq. mach. als volgt formeel gedefinieerd worden:

Definitie 2.1: Een sequentiële machine M is een vijf-tupel:

$$M = (S, I, O, d, \lambda),$$

met $d: S \times I \rightarrow S$, de overgangsfunctie, of de functie, welke de volgende toestand bepaalt;

$\lambda: S \rightarrow O$ voor een Moore machine, of

$\lambda: S \times I \rightarrow O$ voor een Mealy machine; de output-functie.

De functies δ en λ nader beschouwend:

δ : De volgende toestand, waarin een seq. mach. bij een toegevoegde input komt te verkeren, wordt eenduidig bepaald door de momentane toestand en de input samen:

$$\delta(s, x) = t \quad ; \quad s, t \in S, x \in I.$$

Dit kan worden uitgebreid tot een subset B van S :

$$\delta(B, x) = \{t \mid t = \delta(s, x), s \in B\},$$

waartoe nog gedefinieerd wordt, dat subset B met een bepaalde input, x , overgaat in subset B' van S , dan en dan alleen als

$$\delta(B, x) \subseteq B'; \quad B, B' \subseteq S.$$

λ :

Hier moet een onderscheid gemaakt worden:

bij een Moore machine wordt de output gedacht aanwezig te zijn, als de machine zich in een bepaalde toestand bevindt:

$$\lambda(s) = z \quad ; \quad s \in S, z \in O.$$

Bij een Mealy machine wordt de output gedacht aanwezig te zijn tijdens de overgang tussen 2 toestanden:

$$\lambda(s, x) = z \quad ; \quad s \in S, x \in I, z \in O.$$

Hierbij wordt nog opgemerkt, dat bij de bestudering van een seq. mach. in een bepaald stadium vaak de output wordt weggelaten, omdat dan slechts interesse bestaat voor het toestandsgebeuren.

Geproken wordt dan van een seq. toestandsmachine:

$$M = (S, I, \delta).$$

Ter verduidelijking van bovengenoemde begrippen wordt fig. 2.1 beschouwd.

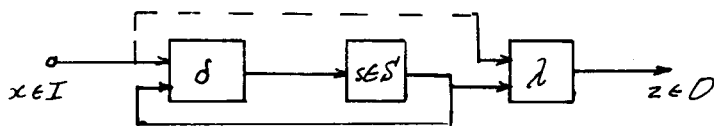


Fig. 2.1. Schematisch circuit voor $M = (S, I, O, d, \lambda)$.

We stellen ons, zoals gezegd, een apparaat voor met draden, waardoor informatie in de richting van de pijlen stroomt; combinatorische netwerken om de functies d en λ te berekenen; en een geheugenelement, dat de momentane toestand van de machine onthoudt. Gezocht is het meest algemene geval: de Mealy machine; voor een Moore machine moet de gestippelde lijn vervallen; en voor een toestandsmachine tekent het blok, dat λ berekent, samen met de laatste pijlen.

Vb.: Beschouw mach. A, waarvan de volgende tabel is gegeven in fig 2.2. Bij de onderhavige theorie is de volgorde tabel steeds het uitgangspunt.

		Inputs				outputs
		a	b	a	b	
momentane	μ	s	μ	4	4	
toestanden	s	t	t	4	2	
	t	r	s	2	4	

volgende
toestanden

Fig. 2.2. Mach. A.

Machine A zonder het gedeelte rechts van de stippellijn is een Moore machine, met dat gedeelte een Mealy machine.

Voor mach. A is: $S = \{r, s, t\}$, $I = \{a, b\}$, $O = \{y, z\}$,

en b.v. $d(r, a) = s$, $d(r, b) = r$,

$\lambda(t) = z$ in het Moore geval.

$\lambda(t, a) = z$, $\lambda(t, b) = y$ voor de Mealy machine.

2.2 E quivalentie.

E quivalentie tussen 2 machines, hetzij van het Moore, hetzij van het Mealy type, moet gebaseerd zijn op een exacte definitie van het intuïtieve begrip, dat zij "hetzelfde" kunnen doen. Gedacht wordt aan "hetzelfde" als dezelfde rij elkaar opvolgende inputs dezelfde output geven.

Dit zal nu nader gepreciseerd worden, waarbij de volgende notaties ingevoerd worden, toegehoort aan de hand van mach. A, fig 2.2:

$\bar{x} : x_1, x_2, \dots, x_n = \bar{x}_n$, $x_i \in I$; n elkaar opvolgende mogelijke inputs, eerst x_1 , dan x_2 etc, genaamd input-string, n variabel, of

$\bar{x} : \bar{x}'x$, de notatie voor \bar{x}_{n-1}, x_n ; x is dan de laatste input uit de string.

Vb. (mach. A): $\bar{x} = aab = \bar{x}'x$, $\bar{x}' = aa$, $x = b$.

Λ : \bar{x} met lengte 0, de lege string; in sommige gevallen is het nuttig hiervan gebruik te kunnen maken,

Φ : de set van alle mogelijke input strings, zonder Λ evenwel,

Φ_0 : de set van alle mogelijke input string, met Λ ,

$\bar{\delta}$: de functie $\delta: S \times I \rightarrow S$ wordt nu inductief uitgebreid tot $\bar{\delta}: S \times \Phi_0 \rightarrow S$, waarbij

$$\bar{\delta}(s, \Lambda) = s, \quad \forall s \in S; \quad \text{en met } \bar{x} = \bar{x}'x:$$

$$\bar{\delta}(s, \bar{x}) = \delta(\bar{\delta}(s, \bar{x}'), x),$$

waarbij $\bar{\delta}(s, \bar{x})$ dan de uiteindelijke "volgende" toestand van de machine is bij het toevoeren van input string \bar{x} , uitgaande van toestand s , en $\bar{\delta}(s, \bar{x}')$ de voorlaatste toestand.

Om $\bar{\delta}(s, \bar{x})$ te bepalen wordt nu begonnen met het toevoeren van input x_1 en het bepalen van $\delta(s, x_1) = t$, vervolgens op inductieve wijze: x_2 toevoeren en $\delta(t, x_2) = u$ bepalen, etc.

$\forall b$. Zij $\bar{x} = \bar{x}'x = aab$.

Machine A: $\bar{\delta}(r, \bar{x}) = s$; de toestanden, die doorlopen worden:

$$r - (a) - s - (a) - t - (b) - s.$$

$\bar{\lambda}$: analoog met $\bar{\delta}$: Moore type: $\bar{\lambda}(s, \bar{x}) = \lambda(\bar{\delta}(s, \bar{x}))$, $\bar{x} \in \Phi_0$, de output behorende bij de uiteindelijke toestand; Mealy type: $\bar{\lambda}(s, \bar{x}) = \lambda(\bar{\delta}(s, \bar{x}'), x)$, $\bar{x}' \in \Phi_0$, $\bar{x} \in \Phi$, $\bar{x} = \bar{x}'x$, de output behorende bij de laatste toestandsvergang.

$\forall b$. Machine A: $\bar{x} = aab$, $\bar{\lambda}(s, \bar{x}) = y$ (Moore geval).

We kunnen nu overgaan tot het definiëren van equivalentie van 2 machines; daartoe zal echter eerst equivalentie tussen 2 toestanden gedefinieerd worden:

Definitie 2.2: Als $M_1 = (S_1, I, O, \delta_1, \lambda_1)$ en $M_2 = (S_2, I, O, \delta_2, \lambda_2)$ twee Moore (Mealy) machines zijn met dezelfde input- en output verzamelingen en de toestanden $s_1 \in S_1$ en $s_2 \in S_2$, dan:

$$\underline{s_1 \text{ en } s_2 \text{ equivalent}} \iff \bar{\lambda}_1(s_1, \bar{x}) = \bar{\lambda}_2(s_2, \bar{x})$$

voor alle \bar{x} in $\bar{\Phi}_0$, Moore geval, of in $\bar{\Phi}$, Mealy geval.

Notatie: s_1 en s_2 zijn equivalent: $s_1 \sim s_2$.

Herk op, dat deze definitie ook het speciale geval behandelt, dat $M_1 = M_2$, m.a.w. s_1 en s_2 zijn equivalente toestanden van dezelfde machine.

Vb.: Nexhous mach. B, fig. 2.3.

	0	1	
r	s	t	0
s	r	t	0
t	t	r	1

De toestanden r en s zijn hierbij equivalent.

Immers, uitgaande van toestanden r en s is voor iedere inputstring de resulterende output dezelfde.

Fig. 2.3. Mach B

Een belangrijk hulpmiddel bij het vaststellen van equivalentie tussen de toestanden van twee machines geeft de volgende stelling:

Stelling 2.1.: Equivalente toestanden s_1 en s_2 van machines M_1 resp M_2 gaan voor iedere input over in equivalente toestanden.

Bewijs: Zij \bar{x} een willekeurig element uit \bar{X}_0 . Dan geldt:

$$\bar{\lambda}_1 [\delta_1(s_1, x), \bar{x}] = \bar{\lambda}_1 (s_1, x\bar{x}) \text{ en}$$

$$\bar{\lambda}_2 [\delta_2(s_2, x), \bar{x}] = \bar{\lambda}_2 (s_2, x\bar{x}).$$

Daar $s_1 \sim s_2$: $\bar{\lambda}_1 (s_1, x\bar{x}) = \bar{\lambda}_2 (s_2, x\bar{x})$, en dus is

$$\bar{\lambda}_1 [\delta_1(s_1, x), \bar{x}] = \bar{\lambda}_2 [\delta_2(s_2, x), \bar{x}] \quad , \text{ en daarom}$$

$$\delta_1(s_1, x) \text{ equivalent met } \delta_2(s_2, x). \quad \text{q.e.d.}$$

Na kan de equivalentie tussen 2 machines gegeven worden:

Definitie 2.3.: Twee machines van hetzelfde type M_1 en M_2 zijn equivalent, dan en dan alleen al:

iedere $s_1 \in S_1$ heeft een equivalente toestand s_2 in S_2 ,
en iedere $s_2 \in S_2$ heeft een equivalente toestand $s_1 \in S_1$.

V.b.: Fig. 2.4.: Twee equivalente machines B' en B'' .

	0	1	
r	s	t	0
s	r	t	0
t	t	r	1

	0	1	
u	u	v	0
v	w	u	1
w	w	u	1
x	x	w	0

B'

B''

Fig. 2.4. Equivalente machines.

Hierbij zijn de toestanden r, s, u en x equivalent en de toestand t, v en w eveneens. Er is dus voldaan de voorwaarden van de laatste definitie.

Om tot de volgende stelling te kunnen komen wordt gedefinieerd:

Definitie 2.4. Een machine M wordt "gereduceerd" genoemd, dan en dan alleen, als:

$$s_1 \sim s_2 \Rightarrow s_1 = s_2$$

m.a.w. de machine bevat geen verschillende equivalente toestanden.

Stelling 2.2.: Gegeven zij een machine M_1 . Dan bestaat er een gereduceerde machine M , die equivalent is aan M_1 . M_1 is dan te reduceren tot M door equivalente toestanden in M_1 samen te voegen tot een toestand van M .

Bewijs: Verdeel S_1 van M_1 in groepen B_i van equivalente toestanden en laat $\{B_i\}$ de toestandverzameling S van M zijn.

Zij $d(B_i, x)$ de groep B_j , zodat $d_1(s, x) = t$ een toestand uit de groep B_j is voor enige $s \in B_i$. Volgens stelling 2.1 is dan bij iedere keuze van $s \in B_i$ $d_1(s, x)$ element van dezelfde B_j .

Nun vervolgens $\delta(B_i) = \delta_1(s)$ (Moore) of $\delta(B_i, x) = \delta_1(s, x)$ (Mealy) voor enige $s \in B_i$. Vanwege de definitie 2.1 van equivalente toestanden geeft iedere keuze van s dezelfde waarde van de output, d.w.z. mach M_1 is vereenvoudigbaar tot een gereduceerde mach. M .

Hiermee is dan dus de gereduceerde machine M , equivalent met M_1 geconstrueerd. q.e.d.

Vb. Fig 2.5. De gereduceerde machine B voor de machine van fig 2.4. B' en B'' .

	0	1	
$B_1 = \{D, S\} = \{u, x\}$	B_1	B_2	0
$B_2 = \{E\} = \{v, w\}$	B_2	B_1	1

Fig. 2.5. Gereduceerde machine B van B' en B'' .

2.3. Simulatie.

Nu zal het abstracte begrip simulatie behandeld worden, en wel om twee redenen:

1. Teneinde van een abstracte machine M een fysieke realisering te kunnen verkrijgen. Om een machine te realiseren kan het o.a. nodig zijn het aantal toestanden van M te reduceren of uit te breiden, in de regel tot 2^n , waarbij dan machine M' ontstaat; hierop zal in het volgende hoofdstuk nog worden teruggekomen.

Een te realiseren machine M kan dan worden gesimuleerd door een machine M' , waarbij de mach. M' (en dus M) fysiek gerealiseerd kan worden.

2. Voor de nadere bestudering van een bepaalde seq. mach. M kan het zinvol zijn deze te vervangen door een machine M' , of door een aantal machine teamen, welke M simuleert.

Deze facetten zullen in de volgende hoofdstukken aan de orde komen.

Definitie 2.5. Mach $M' = (S', I', O', \delta', \lambda')$ simuleert mach.

$M = (S, I, O, \delta, \lambda)$ dan en dan alleen als er functies α, ι en ξ bestaan;

α is een "in"-iënduidige afbeelding van S op een subset S'' van S' :

$$\alpha: S \rightarrow S'' \subseteq S',$$

$$\iota: I \rightarrow I' \quad , \quad \text{een "in"-afbeelding,}$$

$$\xi: O' \rightarrow O \quad , \quad \text{" " " " ;}$$

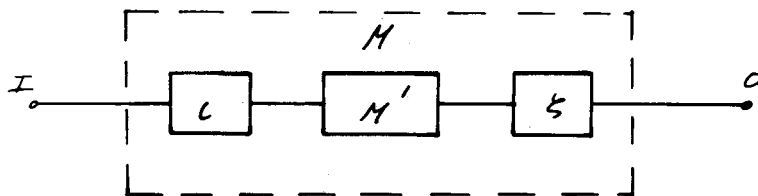
waartoe het volgende moet gelden:

$$\delta'(\alpha(s), \iota(x)) = \alpha(\delta(s, x)), \quad \forall s \in S \text{ en } \forall x \in I,$$

$$\xi(\lambda'(\alpha(s))) = \lambda(s), \quad s \in S, \text{ Moore geval, of}$$

$$\xi(\lambda'(\alpha(s), \iota(x))) = \lambda(s, x), \quad s \in S \text{ en } x \in I, \text{ Mealy geval.}$$

Een schematische voorstelling van het begrip simulatie geeft fig. 2.6. met kombinatorische netwerken, welke de functies ϵ en ξ vervaargen.



$$\alpha: S \rightarrow S'' \subseteq S'$$

Fig 2.6. M' simuleert M .

Opmerking: Mach. M' , welke M simuleert, behoeft niet equivalent te zijn met M !

Vb.: Beschouw mach. C , fig 2.7. en mach. C' , welke C simuleert, fig 2.8.

	a	b	
1	3	2	4
2	1	2	2
3	3	1	2

Fig. 2.7 Mach C.

	0	1		
00	10	01	0	$\alpha(1)=00$ $\epsilon(a)=0$
01	00	01	1	$\alpha(2)=01$ $\epsilon(b)=1$
10	10	00	1	$\alpha(3)=10$ $\xi(a)=4$
11	00	00	1	$\xi(b)=2$

Fig 2.8. Mach C' .

Merk op, dat bij dit voorbeeld mach. C' slechts de symbolen 0 en 1 van de binaire code bevat, en dus in principe fysisch met binaire elementen gerealiseerd zou kunnen worden.

Merk tenslotte op, dat $S'' = \{00, 01, 10\}$, en dat toestand (10) is toegevoegd om 2^o toestanden te verkrijgen. S' is dan: $\{00, 01, 10, 11\}$. $\delta(10, x)$ en $\delta(11)$ zijn nu niet door machine C vastgelegd en worden zodanig gekozen, dat de machine op de meest economische wijze fysisch te realiseren is.

Op soortgelijke opmerkingen zal in het volgende hoofdstuk worden terug-
gekomen.

3. Splitsing van machines en het probleem van het toewijzen van variabelen.

3.1. Realisering met behulp van binaire variabelen.

De toestanden, inputs en output van een sequentiële machine M worden in de praktijk (voorlopig) fysisch gerealiseerd met behulp van binaire elementen, b.v. flip-flops, in samenwerking met kombinatorische netwerken.

De toestanden en de inputs worden dan zodanig gecodeerd, dat alle toestanden en inputs gerepresenteerd worden door verschillende code-woorden, gevormd uit n -tuples, waarvan iedere component 0 of 1 is. Aan iedere toestand, input en output wordt dan een bepaald code-woord "toegewezen".

Formeel ziet de machine $M = (S, I, O, \delta, \lambda)$, gecodeerd met binaire variabelen x, y en z , er als volgt uit:

$$\underline{S'} = \{ \bar{y} \} \text{ met } s \in S \text{ gecodeerd: } (y_1, \dots, y_1, \dots, y_n) =: \bar{y};$$

$$\text{b.v. } n=2: S = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)\};$$

$$\underline{I'} = \{ \bar{x} \} \text{ met } a \in I \text{ gecodeerd: } (x_1, \dots, x_n) =: \bar{x};$$

$$\underline{O'} = \{ \bar{z} \} \text{ met } o \in O \text{ gecodeerd: } (z_1, \dots, z_1, \dots, z_n) =: \bar{z};$$

$$\underline{\delta(s, x)} \in S \text{ gecodeerd: } (y_1(\bar{y}, \bar{x}), \dots, y_1(\bar{y}, \bar{x}), \dots, y_n(\bar{y}, \bar{x})) =: \underline{\bar{y}(\bar{y}, \bar{x})};$$

$$\underline{\lambda(s, x)} \in O \text{ gecodeerd: } (z_1(\bar{y}), \dots, z_1(\bar{y})) =: \underline{\bar{z}(\bar{y})}, \text{ of}$$

$$\underline{\lambda(s, x)} \text{ gecodeerd: } \underline{\bar{z}(\bar{y}, \bar{x})}.$$

Om een betere aansluiting met minder formele schakeltechnische begrippen te verkrijgen wordt gesteld: geschreven wordt Y_i , als bedoeld wordt $Y_i(\bar{y}, \bar{x})$. Het y_i wordt de „momentane“ (of „oude“) toestand van een binaire variabele aangeduid op het tijdstip t , en met \bar{y}_i de „volgende“ (of „nieuwe“) toestand op het tijdstip $(t+1)$.

Vb.:		a	b	
1	3	2		0
2	1	2		1
3	3	1		1
4	1	1		1

⇒

Fig 3.1

Mach. A

Fig 3.2.

Binaire realisering A'

Wanneer nu uit de volgordetabel zoals die van Fig. 3.2, — uitgangspunt is steeds de volgordetabel —, de variabelen worden bepaald, b.v. met de methode van Karnaugh, dan wordt gesteld, dat deze vergelijkingen de machine $M(A)$ realiseren, indien zij een machine $M'(A')$, welke $M(A)$ simuleert, definiëren. (Simulatie: vorige hoofdstuk.).

De vergelijkingen bij machine A (A') luiden dan:

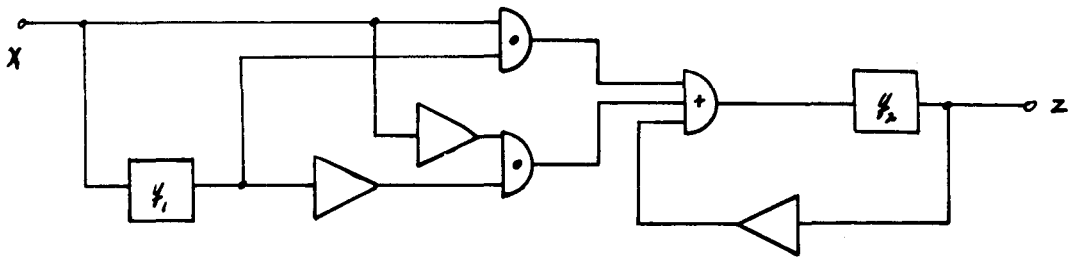
$$Y_1 = \bar{y}_2 \bar{x}$$

$$Y_2 = \bar{y}_1 x$$

$$z = y_1 + y_2$$

A lous realiseren deze vergelijkingen de machine A.

De term realiseren wordt hier gebruikt, omdat deze logische vergelijkingen een schema opleveren, waarvan een fysisch apparaat gebouwd kan worden, fig 3.3. b.v.



y_i : geheugen - of vertragingselement.

Fig. 2.3. Fysische realisering van mach. A.

Voor de codering van N toestanden zijn tenminste k binaire variabelen nodig, met $2^k \geq N$.

Om een machine economischer uit te voeren kan men proberen het aantal toestanden N terug te brengen, zodat men nou kunnen volstaan met b.v. $(k-1)$ variabelen.

Anderzijds is het mogelijk een machine met N toestanden, $2^{k-1} < N < 2^k$, uit te breiden tot het aantal toestanden 2^k wordt, waarbij dan geen extra binaire variabelen nodig zijn. Bij de toestanden s , $N < s \leq 2^k$, worden dan in de volgordebijl de volgende toestanden niet door de machine gegeven bepaald. Deze volgende toestanden kunnen dan in principe willekeurig worden ingevuld. Dit laatste geldt overigens ook voor niet volledig gespecificeerde machines, d.w.z. machines, waarbij niet alle volgende toestanden zijn gegeven. De in te vullen volgende toestanden worden „don't care's" (D.C.'s) genoemd.

Door nu deze D.C.'s op een slimme wijze in te vullen, is vaak een eenvoudiger machine te verkrijgen. Hierop wordt in hoofdstuk 5 teruggekomen.

Een ander soort toestandsuitbreiding, vaak samenhangend met de voorgaande, kan verkregen worden door een weloverwogen splitsing van bepaalde toestanden, waardoor het mogelijk wordt een machine

te vereenvoudigen. Op deze toestandsoplossing wordt niet nader ingegaan.

Een andere mogelijkheid, in dit beskek de meest relevante, om tot eenvoudiger machines te geraken komt in paragraaf 3 aan de orde.

3.2. Verschillende mogelijkheden voor codering.

Beschouwd wordt mach. B, fig. 3.4.

Deze machine heeft vier toestanden, er zijn dus 2 binaire variabelen nodig om deze te realiseren.

Twee mogelijkheden van codering worden in de figuren 3.5 en 3.6 weergegeven.

St.	0	1
1	4	1
2	4	2
3	1	3
4	1	4

Fig. 3.4.

Mach. B

Y_1, Y_2

1 → 00

2 → 01

3 → 10

4 → 11

Fig 3.5

Coderingen voor mach. B.

Y_1, Y_2

00

01

11

10

Fig 3.6

Wanneer de toewijzing overeenkomstig fig 3.5 resp. 3.6 wordt uitgevoerd, zijn de logische vergelijkingen er als volgt uit:

Fig. 3.7.

$$Y_1 = \bar{y}_1 \bar{x} + y_1 x \quad \text{resp.} \quad Y_1 = \bar{y}_1 \bar{x} + y_1 x$$

$$Y_2 = \bar{y}_1 \bar{x} + y_2 x \quad Y_2 = y_2 x.$$

Hetgeen hierbij opvalt is, dat de vergelijking, welke Y_2 bepaakt, in het tweede geval veel eenvoudiger is.

Vb.: Fig. 3.0. toont mach. C; twee mogelijke toewijzingen van variabelen aan de toestanden van mach. C zijn gegeven in fig. 3.9. Voor deze toewijzingen luiden de vergelijkingen zoal in fig. 3.10.

	0	1		$Y_1 Y_2 Y_3$	$Y_1 Y_2 Y_3$
1	4	3	1 →	0 0 0	1 1 0
2	6	3	2 →	0 0 1	1 0 1
3	5	2	3 →	0 1 0	1 0 0
4	2	5	4 →	0 1 1	0 0 0
5	1	4	5 →	1 0 0	0 0 1
6	3	4	6 →	1 0 1	0 1 0

Fig. 3.0.
Mach. C

Fig. 3.9.
Twee mogelijke toewijzingen bij mach. C.

$$Y_1 = \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 \bar{X} + Y_2 \bar{Y}_3 \bar{X} + Y_2 Y_3 X$$

$$Y_2 = \bar{Y}_2 X + \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 + Y_1 Y_3$$

$$Y_3 = Y_1 X + Y_2 \bar{Y}_3 X + Y_2 Y_3 \bar{X} + \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{X}$$

Fig. 3.10

resp.

$$Y_1 = Y_1 X + \bar{Y}_1 \bar{X}$$

$$Y_2 = Y_3 \bar{X}$$

$$Y_3 = \bar{Y}_2 \bar{Y}_3$$

Vergelijkingen
bij mach. C.

E venals bij het vorige voorbeeld valt ook hier op, dat, alhoewel voor beide toewijzingen hetzelfde aantal variabelen is gebruikt, een van de sets vergelijkingen veel eenvoudiger is dan de andere.

Dit omgevulde zal de hoeveelheid logica, met de daarmee samenhangende problemen, veel geringer zijn.

3.3. Structuur, verminderde afhankelijkheid en splitsing van machines; economie.

Zoals bij de twee vorige machines is geïllustreerd kan een bepaalde toewijzing leiden tot eenvoudiger vergelijkingen.

Wanneer dit nader beschouwd wordt, blijkt, dat dit een gevolg is van het feit, dat de onderlinge afhankelijkheid van de variabelen gereduceerd is. Zoals b.v. bij mach. B te zien is, is bij de tweede toewijzing (fig 3.7) Y_1 alleen afhankelijk van y_1 , van „richtaakt“ dus, en de input; Y_2 alleen van y_2 en de input. De variabelen zijn in tegenstelling tot bij de eerste toewijzing niet onderling afhankelijk.

In het algemeen geldt:

Opgeven een vast aantal variabelen en een vast aantal functies, welke gerealiseerd moeten worden, dan, als een set functies bestaat uit elementen, welke afzonderlijk afhankelijk zijn van minder variabelen van het totale aantal dan de elementen van een andere set, zal de realisering van de eerste set functies in het algemeen minder materiaal vergen. Er wordt dan gesproken van rege. verminderde afhankelijkheid.

Opgeven zij, dat een machine met n binaire toestandvariabelen, $y_1, \dots, y_n = N$, en m binaire ingangvariabelen, $x_1, \dots, x_m = M$, te realiseren is.

Er wordt dan getracht ervoor te zorgen, dat de toestandvariabele Y_i , $1 \leq i \leq n$, aan de volgende functie voldoet:

$$Y_i = f_i (y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_l}, x_{n_1}, \dots, x_{n_s}) \quad ; \quad k_j \in K \in N, n_s \in R \in H,$$

waarbij l en 1 of s de klein mogelijke zijn, m.a.w. de min mogelijke variabelen in de vergelijkingen.

Een schematische realisering kan in twee gevallen bij mach. B als volgt worden voorgesteld, waarbij Y_i de kombinatoriek om de volgende toestand van de variabelen te berekenen, voorstelt, en y_i het gebeurtenis- of vertragingselement:

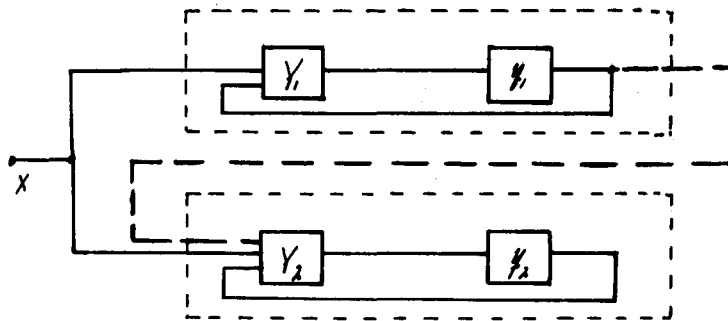


Fig. 3.11 met, gestreepte, verbindinglijn, resp.

Fig. 3.12 zonder

De output is hier terwille van de eenvoud buiten beschouwing gelaten, de toestand van de machine is immers niet afhankelijk van de output.

Fig. 3.12 laat zien, dat deze realisering in feite bestaat uit twee volledig onafhankelijk werkende machines, welke geen informatie aan elkaar ontleenen.

Dit geeft ook duidelijk een bepaalde "structuur" weer; de machine B is "ge-split" in meerdere kleine machines, die samen het gedrag van mach. B simuleren. Deze "deelmachines" zijn dan samen te stellen tot de oorspronkelijke machine.

In het algemeen zal de input I_i van een deel- of component machine H_i een functie zijn van de externe input I en de outputs van de overige deelmachines.

Een soortgelijke structuur is ook te zien, wanneer in fig. 3.13 de schematische realisering van mach. C met de tweede toewijzing wordt beschouwd.

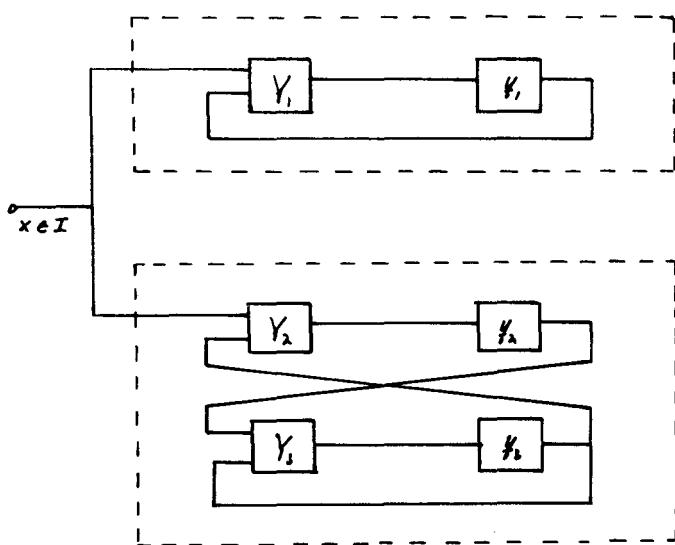


Fig. 3.13. Mach. C.

Doel hier blijken meerdere afzonderlijk werkende machines geïsoleerd te kunnen worden.

Schematisch is hier te zien, wat ook uit de vergelijkingen bleek:

Y_1, Y_2 en Y_3 zijn geen functie van x, Y_1, Y_2, Y_3 tezamen,
notatie: $Y_1, Y_2, Y_3 \neq f(x, Y_1, Y_2, Y_3)$,

doch:

Y_1 is een functie van x en Y_1 , en niet van Y_2 en Y_3 ,

notatie: $Y_1 = f_1(x, Y_1) \neq g_1(Y_2, Y_3)$;

en $Y_2 = f_2(x, Y_2) \neq g_2(Y_1, Y_3)$,

$Y_3 = f_3(Y_2, Y_3) \neq g_3(x, Y_1)$.

Naar de ervaring heeft uitgewezen, leidt verminderde afhankelijkheid in het algemeen tot economischer uitvoeringen.

Omdat de theorie van de structuur van een sequentiële machine niet bezig houdt met realiseringen van machines door kleinere component-machines en het algemene begrip van de logische afhandelbaarheid of informati-stroom, kan de structuur-theorie gezien worden als een benadering van het probleem van het toewijzen van variabelen.

3.4. Toewijzing met behulp van partities.

Vb.: B behouden wordt nogmaals mach. B (fig. 3.4.): fig. 3.14;

$$S = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Deze machine is, zoals reeds getoond werd, te splitsen in 2 parallel-geschakelde machines B_1 en B_2 , fig. 3.15; B_1 en B_2 samen simuleren B.

		0	1
$(A, a) \leftrightarrow$	1	4	1
$(A, b) \leftrightarrow$	2	4	2
$(B, b) \leftrightarrow$	3	1	3
$(B, a) \leftrightarrow$	4	1	4

Fig. 3.14

Mach. B

		0	1		0	1
$\bar{1}, 2 \leftrightarrow$	A	B	A	$\bar{1}, 4 \leftrightarrow$	a	a
$\bar{3}, 4 \leftrightarrow$	B	A	B	$\bar{2}, 3 \leftrightarrow$	b	b

Fig. 3.15

Mach B_1 , mach B_2

De toestand A van de mach. B, is nu een verzameling, een blok, van de toestanden 1 en 2 van mach. B.

Dit betekent, dat, als mach. B zich in de toestand 1 of 2 bevindt, mach. B_1 zich in de toestand A zal bevinden, en andersom.

Machine B_1 maakt dus geen onderscheid tussen de toestanden 1 en 2 van mach. B . Tevens maakt hij geen onderscheid tussen de toestanden 3 en 4, en mach. B_2 niet tussen de toestanden 1 en 4, 2 en 3.

Echter, wanneer beide machines B_1 en B_2 samen besien worden, en bevindt mach B_1 zich b.v. in toestand A en B_2 in toestand a , dan staat eenduidig vast, in welke toestand mach. B zich bevindt, nl. hier in toestand $(A, a) = 1$. (fig. 3.14).

Ook de overige toestanden van mach. B worden eenduidig bepaald door de toestanden van B_1 en B_2 , fig. 3.14 laat dit zien.

Worden de blokken $\overline{1,2}$ en $\overline{3,4}$ nu als elementen van een partitie besien: $\pi_1 = \{ \overline{1,2}; \overline{3,4} \}$, en analoog: $\pi_2 = \{ \overline{1,4}; \overline{2,3} \}$, dan blijft, dat de blokken van deze partities toestanden van de component machines voorstellen.

Wordt aan ieder van deze blokken een toestand van een binaire variabele toegewezen — dit kan hier omdat het twee-bloks partitie betreft —, b.v. (notatie):

$$y_1 \rightarrow 0 \quad 1 \quad \quad y_2 \rightarrow 0 \quad 1 \\ \pi_1 = \{ \overline{1,2}; \overline{3,4} \} \quad \text{en} \quad \pi_2 = \{ \overline{1,4}; \overline{2,3} \} ,$$

dan wordt de codering van fig. 3.6. verkregen, en dit bleek een gunstige codering te zijn; het is dus zaak deze „gunstige” partities te vinden.

Het probleem van de juiste toewijzing van variabelen kan dan ook als volgt gezien worden:

Hoe kan de verzameling toestanden van een sequentiële machine
 in subsets, de blokken van partities op de toestandsverzameling, worden
 verdeeld, zodat verminderde afhankelijkheid kan worden bereikt door,
 afhankelijk, de variabelen aan de subsets van toestanden, de
 blokken van de partities op S , toe te wijzen, in plaats van aan de indi-
 viduele toestanden; zodanig, dat iedere toestand eenduidig vastligt.

Welnu, de theorie der partities vormt hiertoe een waardevol en hand-
 naam mathematisch gereedschap; reden, waarom de partities dan ook
 nader beschouwd zullen worden.

4. Partitie - theorie.

In het voorgaande hoofdstuk is ingeleid, dat partities een belangrijk hulpmiddel vormen bij het vaststellen van de structuur van een sequentiële machine, en dat met behulp van partitie variabelen kunnen worden toegewerkt om een machine in hardware te realiseren.

In het bijzonder zijn bepaalde partities met bijzondere eigenschappen van belang, behandeld in de volgende hoofdstukken.

Eerst wordt echter in het volgende algemeen de partitie behandeld.

Dit betreft dan weliswaar partities, gedefinieerd op de set van toestanden etc. van een machine, een bijzonder geval van het algemenere begrip diege begrip partitie (Hoofdstuk 1). De hierna weergegeven definitie, eigenschappen etc. zijn dan ook een verbijzondering van de algemene wiskundige theorie.

Voorlopig zullen wij ons beperken tot partities van de set van toestanden van een machine; later zullen ook andere ter sprake komen.

4.1. Definities.

Definitie 4.1.: Een partitie π op de set van toestanden S van een sequentiële machine M is een verzameling disjuncte subsets $\{B_\alpha\}$ van S , genaamd blokken, de elementen van π , zodat de vereniging van deze blokken S is.

Elke toestand van M (element van S) is dus bevat in één blok van π , terwijl alle toestanden van M in π voorkomen.

De toestanden s en t , waarvoor geldt: $s \equiv t(\pi)$ worden nu als equivalent beschouwd.

Notatie: Wanneer dit geen aanleiding tot verwarring geeft, zal vaak een "partitie" worden aangeduid met het symbool " π ".

De blokken van π zijn te zien als de toestanden van een bepaalde deelmachine M' van M . Wordt een bepaald blok van π aangewezen, dan geeft dit dus informatie omtrent de toestand, waarin de deelmachine M' verkeert.

Bevindt M' zich in een bepaalde toestand overeenkomstig een blok van π , dan geeft dit ook gedeeltelijke informatie omtrent de toestand, waarin M zich bevindt; machine M bevindt zich dan namelijk in één van de tot het betreffende blok van π behorende equivalente toestanden van M , waarvan reeds een illustratie in het vorige hoofdstuk.

Vb.: Stel, een machine heeft de toestanden $1, 2, \dots, 6$; S van $M = \{1, 2, \dots, 6\}$.
Dan is een mogelijke willekeurige partitie $\pi_1 = \{ \overline{1, 2, 3}; \overline{4, 5, 6} \}$, en een andere b.v. $\pi_2 = \{ \overline{1, 2}; \overline{3, 4, 5}; \overline{6} \} = \{ B_1, B_2, B_3 \}$.

Definitie 4.2.: $\pi_1 \leq \pi_2$ dan en dan alleen als ieder blok van π_1 omvat wordt door een blok van π_2 :

$$\pi_1 \leq \pi_2 \iff \forall B_{\pi_1} \exists B_{\pi_2} [B_{\pi_1} \subseteq B_{\pi_2}]$$

Tevens wordt ingevoerd: $\pi_1 \leq \pi_2 \iff \pi_2 \geq \pi_1$.

De grootste partitie van de toestanden van M wordt dan gevormd door I, de identiteit of eenheid, alle toestanden in één blok; hetgeen geen informatie over de toestand van een machine geeft, alle toestanden zijn immers equivalent.

De kleinste partitie is dan de nut-partitie; o, ieder blok bevat slechts één toestand; hetgeen dan alle informatie over de toestand van de machine geeft, immers: wordt een blok van deze partitie aangewezen, dan is de toestand, waarin M verkeert, eenduidig bepaald.

Vb.: Zij S van $M: \{1, \dots, 6\}$, $\pi_1 = \{\overline{1,2,3}; \overline{4,5,6}\}$, $\pi_2 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4,5,6}\}$
 en $\pi_3 = \{\overline{1,2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5,6}\}$.

Hier geldt: $\pi_3 \leq \pi_1$, $\pi_3 \leq \pi_2$; voor wat betreft de overige mogelijkheden geldt:

$\pi_i \not\leq \pi_j$ ($i \neq j$), niet vergelijkbaar; $I = \{\overline{1,2,3,4,5,6}\}$ en $0 = \{\overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6}\}$.

Definitie 4.3.: $\pi_1 \cdot \pi_2$, de dooromgating of het product van twee partities, is de partitie π , zodat:

$$s \equiv t (\pi_1 \cdot \pi_2) \iff s \equiv t (\pi_1) \text{ en } s \equiv t (\pi_2), \text{ m.a.w. :}$$

$$\forall s \in S: B_{\pi_1 \cdot \pi_2}(s) = B_{\pi_1}(s) \cap B_{\pi_2}(s).$$

De toestanden a en b van S worden verenigd in hetzelfde blok van $\pi_1 \cdot \pi_2$ dan en dan alleen als deze niet samen in dezelfde blokken van π_1 en π_2 bevinden.

Een andere vorm van deze definitie is:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \text{ is de grootste partitie } \pi, \text{ zodat } \pi \leq \pi_1 \text{ en } \pi \leq \pi_2.$$

Opgemerkt wordt, dat als $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$ is, de partities π_1 en π_2 de machine volledig definiëren (0-partitie), wordt immers zowel van π_1 als van π_2 een blok aangewezen, dan ligt de toestand, waarin M verkeert, eenduidig vast.

Vb.: $S = \{1, \dots, 6\}$; $\pi_1 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5,6}\}$, $\pi_2 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4,5}; \overline{6}\}$; dan is:

$$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5}; \overline{6}\}.$$

Wanneer van n partities het product genomen wordt, wordt dit als volgt genoteerd:

$$\prod \pi_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Definitie 4.4.: $\pi_1 + \pi_2$, de som van twee partities, is de kleinste partitie π , zodat geldt: $\pi_1 \leq \pi$ en $\pi_2 \leq \pi$.

De berekening van π kan geschieden met de reçu. kettingvereniging:
 bij de berekening van $B_{\pi_1 + \pi_2}(s)$ wordt op inductieve wijze te werk gegaan:

$$B_1(s) = B_{\pi_1}(s) \cup B_{\pi_2}(s),$$

en voor $i > 1$:

$$B_{i+1}(s) = B_i(s) \cup \{B \mid B \text{ is een blok van } \pi_1, \text{ of } \pi_2 \text{ en } B \cap B_i(s) \neq \emptyset, B_i(s)\}.$$

Voor de grootste i , waarbij deze bewerking mogelijk is, is dan:

$$B_{\pi_1 + \pi_2}(s) = B_i(s).$$

Wanneer van n partities de som genomen wordt, wordt dit als volgt genoteerd:

$$\sum \pi_i \quad (i=1, \dots, n).$$

Vb.: $S = \{1, \dots, 6\}$; $\pi_1 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5,6}\}$, $\pi_2 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4,5}; \overline{6}\}$.

Dan is $\pi = \pi_1 + \pi_2 = \sum \pi_i \quad (i=1,2) = \{\overline{1,2}; \overline{3,4,5,6}\}$.

De berekening van b.v. $B_{\pi_1 + \pi_2} = \overline{3,4,5,6}$:

$$B_1(s) = \overline{3,4} \cup \overline{3,4,5} = \overline{3,4,5}; \quad B_2(s) = \overline{3,4,5} \cup \overline{5,6} = \overline{3,4,5,6}.$$

Vb.: $S = \{1, \dots, 6\}$; $\pi_1 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5,6}\}$, $\pi_2 = \{\overline{1}; \overline{2,3}; \overline{4,5,6}\}$.

Dan is $\pi = \pi_1 + \pi_2 = I$.

4.2. Eigenschappen:

1. $\pi_1 \cdot \pi_1 = \pi_1$ $\pi_1 + \pi_1 = \pi_1$
 2. $\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2 \cdot \pi_1$ $\pi_1 + \pi_2 = \pi_2 + \pi_1$ (commutatief)
 3. $\pi_1 \cdot (\pi_2 \cdot \pi_3) = (\pi_1 \cdot \pi_2) \cdot \pi_3$ $\pi_1 + (\pi_2 + \pi_3) = (\pi_1 + \pi_2) + \pi_3$ (associatief)
 4. $\pi_1 \cdot (\pi_1 + \pi_2) = \pi_1$ $\pi_1 + (\pi_1 \cdot \pi_2) = \pi_1$ (absorptie)
- $\pi_1 \geq \pi_2$ dan en dan alleen als $\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2$ en $\pi_1 + \pi_2 = \pi_1$.
5. $\pi_1 \cdot (\pi_2 + \pi_3) \geq \pi_1 \cdot \pi_2 + \pi_1 \cdot \pi_3$ $\pi_1 + (\pi_2 \cdot \pi_3) \leq (\pi_1 + \pi_2) \cdot (\pi_1 + \pi_3)$

N.B.: In deze laatste eigenschap staat \geq resp. \leq i.p.v. $=$;
de distributieve wet geldt hier niet algemeen, hetgeen blijkt uit het volgende voorbeeld:

Vb.: $\pi_1 = \{1, 2; 3\}$, $\pi_2 = \{1, 3; 2\}$ en $\pi_3 = \{1; 2, 3\}$;

$$\pi_2 + \pi_3 = I, \pi_1 \cdot I = \pi_1; \pi_1 \cdot \pi_2 = 0, \pi_1 \cdot \pi_3 = 0, 0 + 0 = 0;$$

er resulteert dan: $\pi_1 \geq 0$, en dit klopt.

De rechtse ongelijkheid verloopt analoog. Iga dit na!

4.3. Lattice of rooster van partities.

Voor het vormen van een lattice is de voorwaarde, dat de elementen een partiële ordening bezitten, waarbij voor ieder paar elementen uit die verzameling een g.o.g. en een k.b.g. zijn te vinden.

Wetnen: 1. Bij de partities is een partiële ordening gedefinieerd:

$\pi_1 \leq \pi_2$. Dat dit een ordening is, spreekt voor zich, we kunnen immers een aantal van deze π 's (notatie voor partities) op een rij zetten, zodanig, dat tussen elke twee naastliggende π 's tegenstaande

relatie geldt. Deze ordening is echter slechts gedeeltelijk, omdat het in het algemeen niet mogelijk is, alle π 's op deze wijze in één rij te rangschikken; vele partities zijn nl. onderling niet vergelijkbaar, $\pi_i \neq \pi_j$, $\pi_i \neq \pi_j$.

2. Voor ieder paar elementen bestaat volgens de definities 4.3 en 4.4 een g.o.g. resp. k.b.g., nl. $\pi_i \circ \pi_j$ en $\pi_i + \pi_j$.

Er kan dan ook gesteld worden: De verzameling van alle partities op de toestandsverzameling van een sequentiële machine M met een eindig aantal toestanden vormt een eindige lattice.

De binaire operaties tussen de elementen zijn: \circ en $+$.

Het grootste („bovenste“) element uit de lattice wordt gevormd door I , het kleinste („onderste“) door 0 . Door deze twee elementen wordt de lattice begrensd.

Vb.: Stel $S = \{1, 2, 3\}$. Dan is de verzameling van alle partities: $\{I, \pi_2, \pi_3, \pi_4, 0\}$, met $\pi_1 = I$, $\pi_2 = \{1; \bar{2}, \bar{3}\}$, $\pi_3 = \{\bar{1}, \bar{2}; \bar{3}\}$, $\pi_4 = \{\bar{1}, \bar{3}; \bar{2}\}$ en $\pi_5 = 0$.

Een voorstellingswijze van de bijbehorende lattice geeft fig. 4.1.

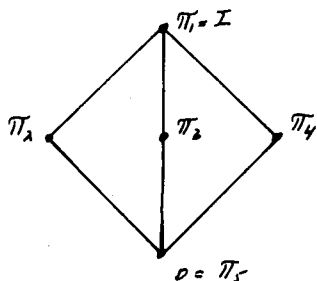


Fig. 4.1.

Lattice van partities op $S = \{1, 2, 3\}$.

Tot een dergelijke voorstelling komen we als volgt:

De punten stellen de partities voor, en de lijnen welke de punten verbinden de ordening.

Het grootste element I vormt de top van de figuur en het kleinste element de basis of voet.

Bij bovenstaande figuur is o.a. af te lezen:

$$\pi_2 \geq 0, \pi_3 \geq 0, \pi_4 \geq 0; \pi_2 \leq I, \pi_3 \leq I, \pi_4 \leq I; \pi_2 \cdot \pi_3 = \pi_3 = 0, \pi_3 \cdot \pi_4 = 0, \\ \pi_2 \cdot \pi_4 = 0; \pi_2 + \pi_3 = \pi_3 + \pi_4 = I, I \geq 0.$$

Bovenstaande betref de lattice van alle partities π van M ; er zijn andere lattice's op te stellen voor o.a. partities met bepaalde eigenschappen, waarover meer in de volgende hoofdstukken.

5. Partitie-paren en machines.

In dit hoofdstuk komen paren van partities met een bijzondere eigenschap aan de orde.

A lovens deze partities aan een nader onderzoek te onderwerpen enige opmerkingen vooraan:

B. beschouw mach. A, fig 5.1. In de volgorde tabel staan, zoals bekend,

	a	b	
1	2	1	0
2	3	4	0
3	4	3	1
4	1	2	0

Fig 5.1

Mach. A.

"links" de momentane toestanden. In het "middelen" staan de toestanden, waarin met een input wordt overgegaan; de volgende toestanden.

Een partitie π op de momentane toestanden is b.v.: $\pi_1 = \overline{1,2} ; \overline{3,4} \vdash \overline{4,6}, \overline{3,2} \vdash$. Uit de tabel is te zien: de blokken van deze partitie gaan met input a over in de volgende toestanden 2,3 resp. 1,4. Met input b gaan zij over in 1,4 resp. 2,5. Deze

volgende toestanden zijn nu weer in een andere toestands-partitie, een partitie op de volgende toestanden, op te nemen: $\pi_2 = \overline{1,4} ; \overline{2,3} \vdash$.

Deze input beclott de blokken van π_1 , af in blokken van π_2 .

De partities π_1 en π_2 zijn nu samen als een nieuwe eenheid te zien: het partitie-paar, $(\pi_1, \pi_2), (\overline{1,2} ; \overline{3,4}) \vdash (\overline{1,4} ; \overline{2,3}) \vdash$.

Een formele definitie volgt later.

Een bijzonder geval van partitie-paren breekt op, wanneer $\pi_2 = \pi_1$, m.a.w. de blokken van de volgende toestanden zijn dezelfde als die van de momentane. Een partitie $\pi = \pi_2 = \pi_1$, wordt dan een partitie met substitutie-eigenschap genoemd. Ook hiervan volgt een formele definitie later. De input becloten hierbij deze blokken van π af in blokken van π zelf.

Opmerking: π_1 en π_2 worden ook wel de primaire resp. secundaire partitie genoemd.

Vb.: Mach. A, fig 5.1. Een partitie met substitutie-eigenschap:

$$\pi = (1,3; 2,4).$$

5.1. Verminderde afhankelijkheid.

In hoofdstuk 3 werd reeds het belang van partities ingeleid als gereedschap bij het ontleden van de structuur van een sequentiële machine. Aan de hand van partities kan verminderde afhankelijkheid tussen de variabelen worden opgespoord.

Ten aanwijn van de partities met bijzondere eigenschappen zullen we zien, dat in dit verband geldt:

Verminderde afhankelijkheid wordt bereikt, wanneer enige subset K van de variabelen alleen afhangt van een andere subset L .

Wanneer $L \neq K$, leveren de partitie-paren hiervoor de nodige en voldoende voorwaarden.

Indien $L = K$: 'n partitie met substitutie-eigenschap π leidt tot verminderde afhankelijkheid, zodanig, dat de volgende toestanden van k variabelen, toegewezen overeenkomstig de blokken van π , alleen afhangen van de momentane waarden van dezelfde k variabelen. Van de waarde van de overige variabelen heeft dan niets bekend te zijn!

Hierop zal nog nader worden teruggekomen, waarbij voorbeelden het voorgaande zullen verduidelijken.

5.2. Definitie.

In het volgende worden meer exacte definities van partitie paren behandeld, gevolgd door enige voorbeelden ter toelichting van het begrip en het nut ervan.

Definitie 5.1. Een partitie-paar, notatie p.p. of (π, π') , van de set van toestanden van een sequentiële machine M is een geordend paar partities van toestanden, zodanig, dat, als de momentane toestanden tot eenzelfde blok van π behoren, voor iedere input de bijbehorende volgende toestanden tot eenzelfde blok van π' behoren.

Ofwel: (π, π') is een p.p. dan en dan alleen als de blokken van π met iedere input worden afgebeeld in de blokken van π' .

Formeel: Een p.p., (π, π') van S van $M = (S, I, O, \delta, \lambda)$ is een geordend paar partities, zodat:

$$\forall x \in I [s \equiv t (\pi) \Rightarrow \delta(s, x) \equiv \delta(t, x) (\pi')],$$

$$\text{of } \forall x \in I, \forall B_{\pi} \in \pi, \exists B_{\pi'} \in \pi' [\delta(B_{\pi}, x) \subseteq B_{\pi'}].$$

V.b.: Mach B, fig 5.2 (fig 3.0).

	0	1
1	4	3
2	6	3
3	5	2
4	2	5
5	1	4
6	3	4

Fig 5.2.

Mach. B.

Uit de volgorde tabel kunnen de volgende partitie-paren afgelezen worden:

$$\begin{aligned} (\pi_1, \pi_2) &= (\overline{4, 2, 5}; \overline{1, 3, 4, 6}); \overline{1, 6}; \overline{2, 3, 4, 5}) \\ &= (\{A, B\}, \{C, D\}). \end{aligned}$$

π_1 en π_2 zijn beide 2-blok-partities. Zoals in hoofdstuk 3 reeds werd ingeleid, -mach C- kunnen de binaire elementen y_3 overeenkomstig π_1 en y_2 overeenkomstig π_2 gekozen worden, en wel: 1 aan blok A resp. C en 0 aan B resp. D.

Vanwege het partitie-paar (π_1, π_2) en de genoemde toewijzing aan y_2 dan alleen afhankelijk moeten zijn van y_3 en de input: $Y_2 = f(y_3, X)$.

De codering komt overeen met fig 5.9., tweede toewijzing. We zeggen, dat hierbij fig. 5.15 paste, en de vergelijking voor Y_2 is weergegeven in fig 5.10.: $Y_2 = X y_3$, dus inderdaad: $Y_2 = f(y_3, X) = g(y_2)$.

Vb.: Stel, mach C heeft de volgorde tabel van fig 5.3.

		0	1	
(A, C)	1	1	4	1
(A, D)	2	3	4	1
(B, C)	3	2	3	0
(B, D)	4	4	3	0

Fig. 5.3.
Mach. C.

Eenkele partitie-paren zijn dan:

$$(\pi_1, \pi_2) = (\{1,2\}; \{3,4\} | \{1,3\}; \{2,4\}) = (\{A, B\} | \{C, D\})$$

$$\text{en } (\pi_2, \pi_1) = (\{1,3\}; \{2,4\} | \{1,2\}; \{3,4\});$$

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = 0.$$

Aan iedere toestand van mach. C wordt een codewoord toegevoegd, overeenkomstig de partities π_1 en π_2 .

$$y_1 \rightarrow 0 \quad 1 \quad y_2 \rightarrow 0 \quad 1$$

$$\pi_1 = \{1,2\}; \{3,4\}, \quad \pi_2 = \{1,3\}; \{2,4\}$$

Fig 5.4.

Daar $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$, is iedere toestand van mach. C eenduidig vastgelegd: fig 5.5.

Wanneer nu de vergelijkingen bepaald worden, luiden deze:
Fig 5.6.

	y_1	y_2
1	→ 0	0
2	→ 0	1
3	→ 1	0
4	→ 1	1

$$Y_1 = \bar{x} y_2 + x_1 = f_1(x_1, y_2) \neq g_1(y_1)$$

$$Y_2 = \bar{x} y_1 + x \bar{y}_1 = f_2(x, y_1) \neq g_2(y_2)$$

$$z = \bar{y}_1 = f_3(y_1) \neq g_3(y_2)$$

Fig. 5.6.

Secundaire variabelen v. mach. C.

Fig. 5.5.

Codering mach. C.

Omdat (π_2, π_1) en (π_1, π_2) beide partitie-paren van C zijn, is Y_1 overeenkomstig π_1 , een functie van y_2 en niet van y_1 , en Y_2 , overeenkomstig π_2 , een functie van y_1 en niet van y_2 .

Deze logische afhankelijkheid, leidend tot een economischer uitvoering, is nu schematisch weergegeven in fig. 5.7.

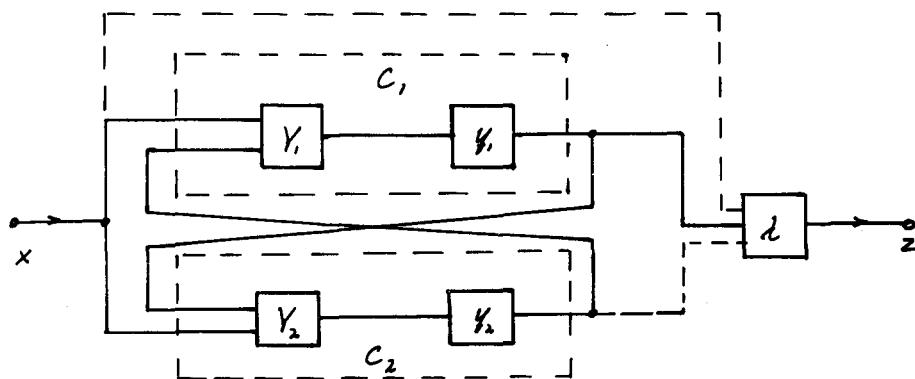


Fig. 5.7. Mach. C.

De figuur toont de beide componentmachines C_1 en C_2 , gevolgd door een combinatorisch netwerk, dat de output veroorzaakt. Deze deelmachines zijn onderling verbonden met een sym. kruisverbinding.

Een dergelijk soort verbinding kan dus met behulp van partitieparen vastgesteld worden.

De twee deelmachines kunnen nu ook afzonderlijk beschouwd worden:

mach. C_1 : Toestanden $s \in S_1$, $S_1 = \{A, B\}$ en de input $S_2 \times I$, $S_2 = \{C, D\}$;

mach. C_2 : toestanden $s \in S_2$ en de input $S_1 \times I$.

Dit wordt getoond in de figuren 5.8 en 5.9.

	C_0	C_1	D_1	D_0	
A	A	B	B	B	1
B	A	B	B	B	0

Fig. 5.8 Mach. C_1

	A_0	A_1	B_1	B_0	
C	C	D	C	D	0
D	C	D	C	D	1

Fig. 5.9 Mach. C_2

	$Y_2 \times$				
Y_1	00	01	11	10	Z
0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0

Fig. 5.10.

Toewijzing mach. C_1 .

Wordt nu ook de code voor y_1 en y_2 vastgelegd zoals in fig. 5.4, dan volgt voor wat betreft b.v. Y_1 fig. 5.10.

Hieruit kunnen nu weer de vergelijkingen worden bepaald:

$$Y_1 = \bar{x} y_2 + x = f_1(x, y_2) \text{ en } Z = \bar{y}_1.$$

$$Y_2 = \bar{x} y_1 + x \bar{y}_1 = f_2(x, y_1) \text{ volgt op analoge wijze.}$$

Deze vergelijkingen, bepaald uit de component-machines, stemmen nu inderdaad precies overeen met de vergelijkingen (rechtstreeks) uit mach. C bepaald: fig. 5.6.

Dit waren voorbeelden van vrij eenvoudige machines, waarbij nog wel door het goed bekijken van de volgorde tabel eenvoudige vergelijkingen en fysieke realiseringen gevonden kunnen worden.

Bij meer-ingewikkelde machines evenwel gaat dit vrijwel niet meer; hierbij kunnen dan de partities een grote rol gaan spelen.

Het partitie-paar is gedefinieerd op de set van toestanden S van M (nowel π als π'). Dit concept is nu uit te breiden (waartoe a) al is behandeld):

- Definitie 5.2. Voor een machine $M = (S, I, O, P, \lambda)$ wordt gesteld:
- (π, τ) is een S - S -paar, π en τ zijn partities op $S \Leftrightarrow \forall x \in I [s \equiv t(\pi) \Rightarrow \delta(s, x) \equiv \delta(t, x)(\tau)]$;
 - (μ, τ) is een I - S -paar, μ en τ partities op I resp. $S \Leftrightarrow \forall s \in S [a \equiv b(\mu) \Rightarrow \delta(s, a) \equiv \delta(s, b)(\tau)]$;
 - (π, ω) is een S - O -paar, π en ω partities op S resp. $O \Leftrightarrow \forall x \in I [s \equiv t(\pi) \Rightarrow \lambda(s, x) \equiv \lambda(t, x)(\omega)]$;
 - (μ, ω) is een I - O -paar, μ en ω partities op I resp. $O \Leftrightarrow \forall s \in S [a \equiv b(\mu) \Rightarrow \lambda(s, a) \equiv \lambda(s, b)(\omega)]$.

N.B.: Wanneer er sprake is van een partitie-paar zonder meer, dan wordt hiermee het partitie-paar op de set van toestanden S van de machine M , het S - S -paar dus, bedoeld.

Vb.: Berekent voor geval b machine D , fig 5.11.

	a	b	c
1	2	2	3
2	3	2	3
3	4	1	1
4	1	2	4

Eenige I - S -paren zijn de volgende:

$(\{ \bar{a}, c; \bar{b} \}, \{ \bar{4}; \bar{2}, \bar{3} \})$, $(\{ \bar{a}; \bar{b}, c \}, \{ \bar{1}; \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \})$,
 $(\{ \bar{a}; \bar{b}, c \}, \{ \bar{1}; \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \})$, $(\{ \bar{a}, \bar{b}, c \}, \{ \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \})$ etc.

Toelichting bij het eerste paar:

Fig. 5.11. Mach. D.

$$s = 1 : \overline{a_1c} \in \mu \rightarrow \overline{2,8} \in \overline{2,8} \in \tau ; s = 2 : \overline{a_2c} \rightarrow \overline{8} \in \overline{2,8} \in \tau ;$$

$$s = 3 : \overline{a_1c} \rightarrow \overline{1,4} \in \overline{1,4} \in \tau ; s = 4 : \overline{a_2c} \rightarrow \overline{4,1} \in \overline{1,4} \in \tau ;$$

bij \bar{b} verloopt het analoog.

De algebraïsche relaties, geldend voor al deze paren, zullen nu blijven te voldoen aan de eigenschappen van een algemener mathematisch concept, de *qpm. paar algebra*.

Ten einde te geraken tot een betere aansluiting met de wiskundige achtergrond zal worden aangetoond, dat de *partitie-paren* van een machine een paar algebra vormen.

Dit concept nu zal nader worden bezien, en vandaaruit weer het *partitie-paar*. Het zal een abstracte benadering zijn; men zal echter slechts de woorden „*paar algebra*” behoeven te vervangen door de woorden „*de verzameling der partitie-paren*”, om de volgende definities, stellingen etc. voor alle soorten paren, gedefinieerd op een sequentiële machine M , toepasbaar te doen zijn. Een toepassing van dit abstracte paar algebra vormt dan ook de gewenste decompositie van een sequentiële machine.

5.3. De theorie van de paar algebra.

5.3.1. Paar algebra.

Definitie 5.3.: Stel L_1 en L_2 zijn individuele lattices, $L_1 \times L_2 = \{(x, y) \mid x \in L_1, y \in L_2\}$. Dan is een subset Δ van $L_1 \times L_2$ een "paar algebra" dan en dan alleen als de volgende twee postulaten waar zijn:

P₁. (x_1, y_1) en (x_2, y_2) in Δ impliceert $(x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$ en $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \Delta$.

P₂. Voor iedere x, y zijn (x, I) en $(0, y)$ elementen van Δ .

Een paar algebra is dus een binaire relatie op $L_1 \times L_2$, welke gesloten is onder componenten-gewijze operaties P_1 en ook de elementen, gegeven in P_2 , bevat.

Stelling 5.1.: Wanneer geldt:

Δ is een paar algebra op $L_1 \times L_2$, $x, x' \in L_1$, $y, y' \in L_2$, $(x, y) \in \Delta$,
en is $x' \leq x$ en $y' \geq y$,
dan impliceert dit: (x', y) , (x, y') en $(x', y') \in \Delta$.

Bewijs: P_2 van de vorige definitie geeft: $(x', I) \in \Delta$. Dan geeft P_1 : (x', I) en $(x, y) \in \Delta$ impliceert: $(x' \cdot x, I \cdot y) = (x', y) \in \Delta$. De andere gevallen verlopen analoog. (Denk bij $x' \cdot x = x'$ voor $x' \leq x$ b.v. aan partities, evenzo $y' + y = y'$ etc.) q.e.d.

Deze stelling zegt, dat, indien we een element uit een paar algebra Δ hebben, we een nieuw element uit dat paar algebra verkrijgen door de eerste component (x) te verkleinen (x') en/of de tweede component te vergroten (y'). Wanneer even aan informatie wordt gedacht, is dit ook logisch, immers, meer "oude" informatie, dan we hadden, is altijd

voldoende, en met dezelfde „oude“ informatie, dan we hadden, is het altijd mogelijk minder „nieuwe“ informatie te verkrijgen.

De eerste component van het paar (x) kan dus wel altijd verkleind worden; hoe ver is het nu mogelijk dit element te vergroten? Een soortgelijke vraag kan gesteld worden ten aanzien van de tweede component (y) . Een antwoord hierop geeft de volgende definitie, welke de grootste mogelijke eerste component (x) van het paar in Δ geeft en de kleinste mogelijke tweede component (y) .

Definitie 5.4: Voor $(x, y) \in \Delta$, Δ een paar algebra op $L_1 \times L_2$, wordt gesteld: $m(x)$: de kleinste y , zodat bij een gegeven x geldt: $(x, y) \in \Delta$, ofwel:

$$m(x) = \bigwedge \{y_i \mid (x, y_i) \in \Delta\};$$

$M(y)$: de grootste x , zodat bij een gegeven y geldt: $(x, y) \in \Delta$, ofwel:

$$M(y) = \bigvee \{x_i \mid (x_i, y) \in \Delta\}.$$

Een ordening tussen de verschillende paren (x, y) in Δ wordt als volgt gedefinieerd:

Definitie 5.5: Voor (x, y) en (x', y') in $L_1 \times L_2$ wordt gesteld:

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ dan en dan alleen als } x \leq x' \text{ in } L_1, \text{ en } y \leq y' \text{ in } L_2.$$

Met behulp hiervan komen we tot de volgende stelling:

Stelling 5.2: Jeder paar algebra Δ v. $L_1 \times L_2$ vormt met de ordening van de vorige definitie een lattice, L_Δ .

Bewijs: De partiële ordening is dus die van def. 5.5. en de componentsgewijze g.o.g. en k.g.g. operatie geeft definitie 5.3;

hierbij is het nul-element $(0,0)$ en het eenheids-element (I,I) .

(Denk weer aan partities)

q.e.d.

Het is nu mogelijk, als Δ een paar algebra op $L_1 \times L_2$, $x \in L_1$, $y \in L_2$ is, een aantal eigenschappen te formuleren:

1. $[H(y), y]$ en $[x, m(x)]$ in Δ ,
2. $x_1 \geq x_2 \Rightarrow m(x_1) \geq m(x_2)$,
3. $m(x_1 + x_2) = m(x_1) + m(x_2)$,
4. $m(x_1 \cdot x_2) \leq m(x_1) \cdot m(x_2)$,
5. $y \geq m(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \Delta$,
6. $y_1 \geq y_2 \Rightarrow H(y_1) \geq H(y_2)$,
7. $H(y_1 + y_2) \geq H(y_1) + H(y_2)$,
8. $H(y_1 \cdot y_2) = H(y_1) \cdot H(y_2)$,
9. $x \leq H(y) \Leftrightarrow (x, y) \in \Delta$,
10. $H(m(x)) \geq x$,
11. $m(H(y)) \leq y$,
12. $H \circ m [H(y)] \uparrow = H(y)$,
13. $m \circ H [m(x)] \downarrow = m(x)$.

5.3.2. Hm -paren.

Van een paar algebra Δ is een speciale subset \mathcal{Q}_Δ te beschouwen, nl. de set van de paren, gevormd door de minimum- en maximum-operator van definitie 5.4 tot een nieuw paar te verenigen: het Hm -paar. Het zal blijken, dat deze subset in de structuur-theorie bijzonder belangrijk is, omdat de lattice hiervan een sequentiële machine H volledig beschrijft.

$$y_1 + y_2 \geq y_1 \Rightarrow [M(y_1 + y_2), y_1 + y_2] \geq (x_1, y_1) \text{ en}$$

$$y_1 + y_2 \geq y_2 \Rightarrow [M(y_1 + y_2), y_1 + y_2] \geq (x_2, y_2), \text{ waarbij } [M(y_1 + y_2), y_1 + y_2]$$

dus een bovengrens vormt.

Voor een andere bovengrens $(x, y) \in \mathcal{A}_\Delta$ moet gelden: $y \geq y_1$ en $y \geq y_2$
 impliceert $y \geq y_1 + y_2$ en volgens eigenschappen van \mathcal{A}_Δ haakt dit in:

$$(x, y) \geq [M(y_1 + y_2), y_1 + y_2]. \text{ Dus } (x, y) \text{ is een grotere bovengrens dan}$$

$[M(y_1 + y_2), y_1 + y_2]$, m. a. w. deze laatste is de k. b. g. Analooft komt
 men tot de q. o. q. q. e. d.

Het belang van deze lattice, Min lattice genaamd, komt onmiddellijk naar voren met:

Stelling 5.4: Stel: Δ is een paar algebra op $L_1 \times L_2$, $x \in L_1$ en $y \in L_2$.

(x, y) is dan de paar algebra Δ , dan en dan alleen als

er een Min paar (x', y') in \mathcal{A}_Δ te vinden is, zodat $x' \geq x$ en $y' \leq y$:

$$\underline{(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow (x', y') \in \mathcal{A}_\Delta \text{ en } x' \geq x \text{ en } y' \leq y.}$$

Bewijs: Stel $(x, y) \in \Delta$, $x' = M(y)$ en $y' = m(M(y))$. M. b. v. de eigenschappen
 9, 11 en 12 volgt dan: $x' \geq x$, $y' \leq y$ en (x', y') in \mathcal{A}_Δ . (x', y') voldoet dus aan
 de voorwaarden.

Nu om nu aan, dat er een $(x', y') \in \mathcal{A}_\Delta$ gegeven is, en een x en y ,
 met $x' \geq x$ en $y' \leq y$. Vanwege stelling 5.1. geldt dan ook: $(x, y) \in \Delta$. q. e. d.

Dit stelling zegt dus, dat ieder element van een paar algebra kan
 verkregen worden uit een Min paar uit \mathcal{A}_Δ , door de eerste component
 te verkleinen en/of de tweede component te vergroten.

De lattice L_{Min} , waarvan de grootte gewoonlijk een practic van die
 van Δ is, vormt dus een soort skelet voor Δ .

Vertaald in termen van partities bij een sequentiële machine betekent dit, dat alle partitie-paren te vinden zijn, door de M_m -paren van de partities op de genoemde wijze te bewerken.

Wanneer weer even in termen van informatie gedacht, dan beschrijft een M_m paar de mogelijkheid een maximum aan informatie te verkrijgen uit minimale aangeboden informatie. De andere paren $(x, y) \in \Delta$ vertegenwoordigen dan een minder efficiënt gebruik van informatie; hetzij wordt de geboden informatie niet volledig benut ($y > m(x)$), hetzij er wordt meer informatie aangeboden dan nodig is ($x < M(y)$).

Om van een M_m -lattice gebruik te kunnen maken moet deze uiteraard eerst opgesteld worden, m.a.w. de M_m paren moeten worden gegenereerd. Een waardevol hulpmiddel hiertbij leveren de eigenschappen 3 en 4 van de paar algebra.

Er zal nu echter niet ingegaan worden op de berekening van de M_m paren. Het is eenvoudiger hierop terug te komen bij het toepassingsgebied van deze theorie: de sequentiële machine. Zie par. 5.6.

5.3.3. De substitutie-eigenschap.

Beschouwd wordt nu het speciale geval: $L_1 = L_2$.

Een meer algemene definitie van de substitutie-eigenschap (S.E.) luidt dan:

Definitie 5.7. : Stel: Δ een paar algebra op $L \times L$, $x \in L$. Dan geldt:
 x bezit S.E. $\iff (x, x) \in \Delta$.

Voor de verzameling x' in L met S.E. wordt dan L_{SE} geschreven, m.a.w.:

Definitie 5.8: $L_{SE} = \{x \in L \mid (x, x) \in \Delta\}$.

Deze verzameling staat in de volgende relatie tot L :

Stelling 5.5: Stel Δ is een paar algebra op $L \times L$ en $x \in L$. Dan geldt:

L_{SE} is een sublattice van L , en dus zelf ook een lattice,

bevatte de elementen 0 en I .

Bewijs: L_{SE} is een sublattice door P_1 van def 5.3. en bevat 0 en I , omdat vanwege $P_2 \Delta (0,0)$ en (I,I) bevat q.e.d.

Eigenschappen van L_{SE} :

1. $L_{SE} = \{x \in L \mid x \geq m(x)\}$,
2. $L_{SE} = \{x \in L \mid x \in \pi(x)\}$,
3. $L_{SE} = \{z \in L \mid x \geq z \geq y \text{ voor enige } (x, y) \in \theta_\Delta\}$.

Het belang van deze eigenschappen is dan het volgende:

Ze geven drie verschillende manieren om, gegeven L_Δ of $L_{\pi m}$, L_{SE} te vinden.

Vertaald in partitie-taal bij de set van toestandem van een reguliere machine betekent dit: alle partities met substitutie-eigenschap zijn te vinden m. b. v. deze eigenschappen, wanneer alle partitie-paren of M_m -paren van partities bekend zijn.

5.4. Partitie paar algebra's.

Hetgeen reeds in het vooruitzicht was gesteld, nl. een verzameling van partitie paren op M is een paar algebra, zal nu bewezen worden.

Stelling 5.6.: Voor een machine $M = (S, I, O, d, \lambda)$ zijn:

a de set van alle S-S-paren, Ω_{S-S} , (def. 5.2)

b " " " " I-S-paren, Ω_{I-S} ,

c " " " " S-O- " , Ω_{S-O} ,

d " " " " I-O- " , Ω_{I-O} .

paar algebra's op $L_1 \times L_2$, waarbij b.v. voor geval b) L_1 en L_2 de lattices bij de sets I en S voorstellen.

Bewijs: Het bewijs zal voor geval a) geleverd worden. Voor de andere paren verloopt het analoog door verwisseling van de set en de functies.

Een p.p. moet dus voldoen aan de postulaten van een paar algebra, def. 5.3.

V.w.b. P_1 : Als (π, π') en (τ, τ') partitie-paren van M zijn, dan moeten

1) $(\pi \cdot \tau, \pi' \cdot \tau')$ en 2) $(\pi + \tau, \pi' + \tau')$ ook partitie-paren op M zijn. Met behulp van de definitie van het partitie-product (def. 4.3) is 1) als volgt in te zien:

Uitgaande van de eerste partitie van het nieuwe p.p. $(\pi \cdot \tau)$: als $s \equiv t(\pi \cdot \tau)$, dan $s \equiv t(\pi)$ en $s \equiv t(\tau)$.

Dan geldt voor enige input x : $d(s, x) \equiv d(t, x)(\pi')$, omdat (π, π') een p.p. is, en ook $d(s, x) \equiv d(t, x)(\tau')$. Dan geldt echter ook (partitie-product): voor iedere input x : $d(s, x) \equiv d(t, x)(\pi' \cdot \tau')$ en dus is (partitie-product): $(\pi \cdot \tau, \pi' \cdot \tau')$

een p.p.

M.b.v. de definitie van de partitie-som is 2) analoog aan te tonen.

V.w.b. P_2 : Het zal duidelijk zijn, dat (π, I) , (O, π) , (τ, I) en (O, τ) tot Ω_{S-S} behoren, m.a.w. tot de verzameling der partitie-paren behoren

q.e.d.

Vb.: Bij mach. A, fig 5.1, zijn 2 partitie paren h.v. $(\pi, \pi') = (\{1, \bar{2}; \bar{3}, \bar{4}; \bar{5}, \bar{6}\}, \{1, \bar{3}; \bar{2}, \bar{5}; \bar{4}, \bar{6}\})$ en $(\tau, \tau') = (\{1, \bar{2}, \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}, \{1, \bar{2}, \bar{3}; \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\})$. In de volgende tabel is dan na te gaan, dat $(\pi, \tau, \pi' + \tau') = (\{1, \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}, \{1, \bar{3}; \bar{2}; \bar{4}, \bar{6}; \bar{5}\})$ en $(\pi + \tau, \pi' + \tau') = (\{1, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}; \bar{5}, \bar{6}\}, \{1, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\})$ ook partitie-paren zijn. Tevens is dan te zien, dat $(\pi, I), (0, \pi), (E, I)$ en $(0, \tau)$ ook p.p.'n zijn.

Alle definities, eigenschappen en stellingen, afgeleid voor een paar algebra Δ gelden dus voor de sub van de paren van partitie van de verschillende verzamelingen van M .

We kunnen nu weer terug keren tot het onderzoek van de sequentiële machine met behulp van partitie-paren.

Vb.: De eigenschappen 2 en 3 bij voorbeeld van de paar algebra

kunnen nagegaan worden voor partitie-paren, aan de hand van mach. A, fig 5.1; vergelijk vorige voorbeeld:

$\pi_1 (= \pi) = \{1, \bar{2}; \bar{3}, \bar{4}; \bar{5}, \bar{6}\}$, $\pi_2 (= \pi \cdot \tau) = \{1, \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}$. Dan is uit de volgorde tabel af te lezen: $m(\pi_1) = \{1, \bar{3}; \bar{2}, \bar{5}; \bar{4}, \bar{6}\}$ en $m(\pi_2) = \{1, \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}, \bar{6}; \bar{5}\}$; eigenschap 2.

In figuur 5.1 is na te gaan, dat de eigenschap 2 hier inderdaad geldt:

$$\pi_1 \geq \pi_2 \rightarrow m(\pi_1) \supseteq m(\pi_2).$$

$\pi_3 (= \tau) = \{1, \bar{2}, \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}$, $m(\pi_3) = \{1; \bar{2}, \bar{3}; \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$, $m(\pi_1 + \pi_3) = m(\{1, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}; \bar{5}, \bar{6}\}) = I$. Ook nu is eigenschap 3 te verifiëren: $m(\pi_1 + \pi_3) = m(\pi_1) + m(\pi_3)$, nl. $I = \{1, \bar{3}; \bar{2}, \bar{5}; \bar{4}, \bar{6}\} + \{1; \bar{2}, \bar{3}; \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

5.5. Partitie-paren en de toestandstoewijzing met verminderde afhankelijkheid

Een verband zal me gelegd worden tussen een bepaalde toewijzing van variabelen aan de verzameling toestanden en input van een sequentiële machient en de partities uit partitie-paren, z.d., dat verminderde afhankelijkheid tussen de variabelen zo groot mogelijk is.

Er ont rechte nog een notatie: De M en m operaties bij de verschillende paren van stelling 5.6 worden door indices van elkaar onderscheiden, b.v. $M_{I-S}(\tau)$ of $m_{S-O}(\omega)$. Hierbij moet opgemerkt worden, dat $M_{S-S}(\tau)$ of $m_{S-S}(\tau)$, zoals te voren, vaak zonder de index wordt genoteerd; wanneer M of m zonder meer voorkomt, wordt bedoeld, dat deze geheel betrokken is op de verzameling der toestanden S .

De bedoelde relatie luidt dan:

Stelling 5.7. Veronderstel, dat voor een seq. mach. M ,

	toestandvariabelen $\{y_i\}$ zijn toegewezen overeenkomstig toestand-partitie $\{\tau_i\}$,		input " $\{x_j\}$ " " " " input " $\{x_j\}$	
input	" $\{x_j\}$	" " " " " " " " " " " " "	input	" $\{x_j\}$
output	" $\{z_k\}$	" " " " " " " " " " " " "	output	" $\{z_k\}$

en dat verzamelingen indices P_i en Q_i gegeven zijn, zodat $\{y_i\} \subseteq \{y_i\}$, en $\{z_{q_i}\} \subseteq \{z_j\}$, met in het algemeen voor iedere V_i een andere P_i en Q_i ; dan geldt:

1. De secundaire toestandvariabelen Y_i is een functie van de variabelen $\{y_i\}$ en $\{x_{q_i}\}$, dan en dan alleen als geldt:

$$\prod_{u \in P_i} \tau_u \subseteq M_{S-S}(\tau_i) \text{ en } \prod_{t \in Q_i} \mu_t \subseteq M_{I-S}(\tau_i);$$

2. Outputvariabelen Z_k is een functie van de variabelen $\{y_k\}$ ($\{y_i\} \subseteq \{y_i\}$) en $\{x_{q_k}\}$ ($\{x_{q_k}\} \subseteq \{x_j\}$) dan en dan alleen als geldt:

$$\prod_{u \in P_k} \tau_u \subseteq M_{S-O}(\omega_k) \text{ en } \prod_{v \in Q_k} \mu_v \subseteq M_{I-O}(\omega_k).$$

Opmerking: Als geldt $\prod \varepsilon_i = 0$ en $\prod \mu_j = 0$, wordt iedere toestand of input van M eenduidig vastgelegd door $\{y_i\}$ en $\{x_j\}$.

Dene stelling wordt als zodanig niet bewezen; wel zal echter de volgende, afgeleide, stelling bewezen worden, een bijzonder geval (en wel het meest relevante) van de voorgaande stelling:

Stelling 5.8: Veronderstel, dat voor een machine M geldt:

Toestandvariabelen $\{y_i\}$ worden toegevoerd overeenkomstig twee-blok-toestandspartitie - secundaire - π_i' , notatie $\pi_i'(y_i)$.

Als er dan partitie $\pi_i'(y_i)$ overeenkomstig het volgende te vinden zijn - de toewijzing der ingangsvariabelen heeft arbitrair plaatsgevoerd - en gesteld wordt: $\{y_{p_i}\} \subseteq \{y_i\}$, dan:

$$\prod_{i \in P_i} \pi_i'(y_{p_i}) \subseteq M[\pi_i'(y_i)] \iff Y_i = f_i(\{y_{p_i}\}, I).$$

Bewijs: Als geldt $\prod_{i \in P_i} \pi_i'(y_{p_i}) \subseteq M[\pi_i'(y_i)]$ dan is met behulp van een eigenschap van de paar algebra $(\prod_{i \in P_i} \pi_i'(y_{p_i}), \pi_i'(y_i))$ een partitie-paar. Dit betekent, dat de blokken van $\pi_i'(y_i)$ worden bepaald door de blokken van de laatste primaire partitie en (een deel van) de input. Hieruit volgt dan rechtstreeks met de beschreven toewijzing, dat Y_i een functie is van de variabelen $\{y_{p_i}\}$, en geen andere, en (een deel van) de input. Dit gedeelte van het bewijs betref de nodige voorwaarde voor deze verminderde afhankelijkheid.

Voor het bewijs van het omgekeerde, de voldoende voorwaarde, kan het voorgaande in omgekeerde richting verteld worden. q.e.d.

Vb.: Mach. D, fig. 11. met toestands toewijzing overeenkomstig

	I_1	I_2	I_3	I_4	Z
1	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	1
3	2	1	4	3	0
4	4	3	2	1	0

	Y_1	Y_2
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

Fig 5.12

Toewijzing

bij mach. D.

Fig 5.11. Mach. D

$\pi_1 = \{1,2; 3,4\}$ en $\pi_2 = \{1,3; 2,4\}$: fig 5.12.

Er wordt gevonden:

$$\pi(Y_2) = M[\pi(Y_1)] = \{1,3; 2,4\}, P_1 = \{2\} \Rightarrow Y_1 = f_1(Y_2, I),$$

$$\pi(Y_1) = M[\pi(Y_2)] = \{1,2; 3,4\}, P_1 = \{1\} \Rightarrow Y_2 = f_2(Y_1, I).$$

Vb.: Ten aanzien van mach. E, fig 5.13 zijn

	(X_1, X_2)			Z
	a (00)	b (01)	c (11)	
1	6	1	3	0
2	5	2	4	0
3	4	1	5	0
4	3	2	6	0
5	2	3	5	1
6	1	4	6	0

$$(\pi_0, \pi_0') = (\{1,2; 3,4; 5,6\}, \{1,2; 3,4; 5,6\}),$$

$$(\pi_1, \pi_1') = (\{1,3,5; 2,4,6\}, \{1,3,5; 2,4,6\}),$$

$$(\pi_2, \pi_2') = (\{1,2,3,4; 5,6\}, \{1,2; 3,4,5,6\}),$$

$$(\pi_3, \pi_3') = (\{1,2; 3,4,5,6\}, \{1,2,3,4; 5,6\}),$$

$$(\mu_1, \pi_1') = (\{a; b, c\}, \{1,3,5; 2,4,6\})$$

partitie-paren.

Er geldt:

$$\pi_1' \leq \pi_1 = M(\pi_1'); \pi_3' \leq \pi_2 = M(\pi_2');$$

$$\pi_2' \leq \pi_3 = M(\pi_3'); \mu_1 = M_{2,5}(\pi_1')$$

$$\pi_1' \cdot \pi_2' \cdot \pi_3' = 0.$$

Fig 5.13. Mach. E.

Daar π_1' , π_2' en π_3' alle twee-bloks-partities zijn, en het aantal toestanden kleiner dan acht is, kan er dus

een toestands-toewijzing met 3 variabelen overeenkomstig de blokken van π_1' , π_2' en π_3' plaatsvinden, - verondersteld wordt, dat de input-variabelen

reeds zijn toegevoerd -, zodat:

$$Y_1 = f_1(y_1, x_2), Y_2 = f_2(y_2, I) \text{ en } Y_3 = f_3(y_2, I).$$

Zo'n toewijzing is dan geschikt in fig 5.14.

	y_1	y_2	y_3
1 →	0	0	0
2 →	1	0	0
3 →	0	1	0
4 →	1	1	0
5 →	0	1	1
6 →	1	1	1

De vergelijkingen, welke de overgangsfuncties representeren, ofwel de volgende toestanden aan de momentane relatoren, luiden hierbij:

$$Y_1 = \bar{x}_2 \bar{y}_1 + x_2 y_1 = f_1(y_1, x_2) \neq g_1(y_2, y_3, x_1),$$

$$Y_2 = \bar{x}_2 \bar{y}_3 + x_2 y_3 + x_1 = f_2(y_2, I) \neq g_2(y_1, y_2),$$

$$Y_3 = \bar{x}_2 \bar{y}_2 + x_1 y_2 = f_3(y_2, I) \neq g_3(y_1, y_3),$$

$$(z = \bar{y}_1 y_3).$$

Fig 5.14

Toewijzing v. mach. E.

Opmerking: Er wordt een compleet gespecificeerde machine verkregen,

door alle don't cares, ontstaan bij het toewijzen van de binaire code-woorden, zo in te vullen, dat aan de beschreven verminderde afhankelijkheid voldaan wordt. Deze machine stelt er dan b.v. uitso- als geschikt in fig 5.15: Mach E'. Aan de hand hiervan kunnen dan de vergelijkingen bepaald worden.

In paragraaf 7 wordt aan de don't cares nader aandacht besteed.

	00	01	11	10	
1	6	1	1	6	0
2	5	2	4	5	0
3	4	1	5	6	0
4	3	2	6	5	0
5	2	3	5	6	1
6	1	4	6	5	0
7	0	3	3	6	1
0	7	4	4	5	0

Fig 6.15. Compleet gespecificeerde mach. E'.

Vb.: Beschouwd wordt mach. F v. fig 5.17.

	x_1, x_2				
	00	01	10	11	
1	3	1	4	2	0
2	1	5	4	2	0
3	3	4	3	5	0
4	5	1	4	2	0
5	5	4	3	5	1

Fig 5.17. Mach C.

Aan de hand van deze machine zal een toewijzing van variabelen via de M_m -lattice gedemonstreerd worden.

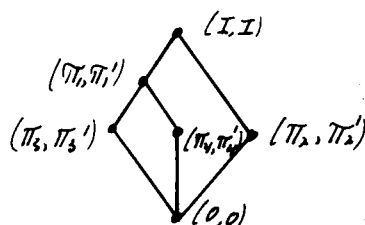


Fig 5.18. $M_{m_{5-5}}$ -lattice v. mach. C.

Vij de M_m lattice met betrekking tot S van deze machine gegeven: fig 5.18. (De berekening hiervan volgt nog). Voor de eenvoud is hier aangenomen, dat de waarden van de ingangvariabelen tevoren zijn toegewezen.

De M_m paren zijn dan de volgende:

$$(\pi_1, \pi_1') = (\{1, 2, 4; \bar{3}, \bar{5}\}, \{1, \bar{3}, \bar{5}; \bar{2}, \bar{4}\}),$$

$$(\pi_2, \pi_2') = (\{1, \bar{3}; \bar{2}; \bar{4}, \bar{5}\}, \{1, \bar{3}, \bar{4}; \bar{2}, \bar{5}\}),$$

$$(\pi_3, \pi_3') = (\{1, \bar{4}; \bar{2}; \bar{3}, \bar{5}\}, \{1, \bar{5}; \bar{2}; \bar{3}, \bar{4}\}),$$

$$(\pi_4, \pi_4') = (\{1, \bar{5}; \bar{2}, \bar{4}; \bar{3}; \bar{5}\}, \{1, \bar{5}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}),$$

$$(0, 0) \text{ en } (I, I).$$

De machine heeft 5 toestanden; het is dan ook de bedoeling een toewijzing van 3 variabelen uit te voeren, zodanig, dat deze onderling minimaal afhankelijk zijn.

In termen van partities geïnterpreteerd, zal getracht worden 3 twee-bloks-partities $\tau_i := \tau(y_i)$ te vinden, zodat geldt:

$$\tau(y_1) \cdot \tau(y_2) \cdot \tau(y_3) = 0,$$

de machine is dan volledig beschreven.

Deze partities zullen moeten voldoen aan de voorwaarden, gesteld in stelling 5.0; iedere $M(\tau_i)$ moet groter zijn dan het product van een zo klein mogelijke subset van τ_i .

In het algemeen gezegd is de kans hierop groter, naarmate de M -partities groter zijn, d. w. z. het betreffende M_m paar moet zich "hoog" op de M_m -lattice bevinden (Def. 3.5).

We zullen nu achtereenvolgens voor de drie variabelen y_i verminderde afhankelijkheid via weloverwogen keuzen van τ_i tot stand brengen:

Voor wat betreft:

y_1 :

Begonnen wordt met het zoeken naar de mogelijkheid, dat een bepaalde variabele y_i slechts afhangt van één andere variabele y_j . Dit bestaat volgens stelling 5.0, als $\tau_j \leq M(\tau_i)$.

Omdat τ_i een twee-bloks-partitie is, kan $M(\tau_i)$ hoogstens 2 blokken bezitten. In het geval van mach. F zijn dan de enige in aanmerking komende M -partities: π_1 en I . (I niet interessant)

Besloten wordt dan tot de keus van τ_2 :

$$\tau_2 = \pi_1 = \overline{1,2,4} \overline{3,5}$$

In later mal dan τ_1 (een 2-bloks-partitie) zo' gekozen worden, dat τ_1 een vergroting van π_1 is: $\tau_1 \geq \pi_1$; in dat geval is nl. (τ_2, τ_1) een partitie-paar (stelling 5.1) en dus is variabele y_1 alleen afhankelijk van de variabele y_2 en de input. Dit is equivalent met:

$$\tau_2 \leq M(\tau_1).$$

De variabele y_1 ligt dan dus vast:

$$\underline{y_1 = f_1(y_2, x) \neq g_1(y_1, y_2)}.$$

γ_2 :

Om stelling 5.0. toe te kunnen passen moet $H(\tau_2)$ gevonden kunnen worden. Welnu, de grootste m -partitie van mach. k kleiner dan τ_2 is π_3' (bewezen kan worden, dat dit eenduidig is), daarom is

$$H(\tau_2) = \pi_3 = \{ \overline{1,4}; \overline{3,5}; \overline{2} \}.$$

Er is nu geen twee-bloks-partitie τ_i te vinden, welke kleiner is dan $H(\tau_2)$, daar de laatste 3 blokken heeft. Derhalve zullen we, om te komen tot $\prod \pi_i \leq H(\tau_2)$, onze toevlucht moeten nemen tot een product van twee partities.

1e keuze van τ_3 :

Het blijkt, dat, indien $\tau_3 = \pi_2'$ (twee blokken) gekozen wordt,

$$\tau_3 = \{ \overline{1,3,4}; \overline{2,5} \}:$$

$$\tau_3 \cdot \tau_2 \leq H(\tau_2)$$

$$\{ \overline{1,4}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{5} \} \leq$$

$\{ \overline{1,4}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{5} \}$. Deze keuze leidt dus tot de verminderde afhankelijkheid:

$$\underline{\underline{\gamma_2 = \rho_2(\gamma_2, \gamma_3, x) \neq \rho_2(\gamma_1)}}.$$

 γ_3 :

Zoals bij γ_1 betoogd, moet $\tau_1 \geq \pi_1' = \{ \overline{1,3,5}; \overline{2}; \overline{4} \}$ gekozen worden, en wel zo, dat $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 = 0$ is. ($\tau_1 \cdot \{ \overline{1,4}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{5} \} = 0$).

Dit kan, door de toestanden 1 en 4 van $\tau_2 \cdot \tau_3$ te scheiden. Een mogelijke keuze van τ_1 (twee blokken), welke aan die eisen voldoet, is dan:

$$\tau_1 = \{ \overline{1,3,5}; \overline{2,4} \}.$$

Dit resulteert met $H(\tau_3) = \pi_2$ ($\tau_3 = \pi_2'$) in:

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \leq H(\tau_3)$$

$$\{ \overline{1,3}; \overline{2}; \overline{4}; \overline{5} \}$$

$\leq \{ \overline{1,3}; \overline{2}; \overline{4}; \overline{5} \}$. Hieruit volgt dan:

$$\underline{\underline{\gamma_3 = \rho_3(\gamma_1, \gamma_2, x) \neq \rho_3(\gamma_2)}}.$$

2^e keuze van τ_3 :

Een alternatieve keuze voor τ_3 (2 blokken) zou b.v. kunnen zijn:

omdat dit resulteert in: $\tau_3 = \overbrace{1,5} \ ; \ \overbrace{2,3,4}$,
 $\tau_2 \cdot \tau_3 \leq M(\tau_3)$ ($\overbrace{1,5} \ ; \ \overbrace{2,4} \ ; \ \overbrace{3,5}$),
 $\leq \overbrace{1,5} \ ; \ \overbrace{2,4} \ ; \ \overbrace{3,5}$.

$M(\tau_3)$ is dan weer de M -partitie, welke behoort bij de grootste m -partitie, welke kleiner is dan τ_3 : $\pi_4' \leq \tau_3 \Rightarrow$

$$M(\tau_3) = \pi_4 = \overbrace{1,5} \ ; \ \overbrace{2,4} \ ; \ \overbrace{3,5}$$

Wordt π_i nu weer vergroot, ditmaal tot

$$\tau_1 = \overbrace{1,3,4,5} \ ; \ \overbrace{2}$$

dan geeft dit:

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 = 0, \text{ en}$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \leq M(\tau_2)$$

$$(\overbrace{1,4} \ ; \ \overbrace{2} \ ; \ \overbrace{3,5})$$

$$\overbrace{1,4} \ ; \ \overbrace{2} \ ; \ \overbrace{3,5}$$

Deze keuze leidt dus tot de volgende (verminderde) afhankelijkheid:

$$\left| \begin{array}{l} Y_1 = f_1(y_2, x) \neq g_1(y_1, y_3), \\ Y_2 = f_2(y_1, y_2, x) \neq g_2(y_3), \\ Y_3 = f_3(y_2, y_3, x) \neq g_3(y_1). \end{array} \right.$$

Renumerend voor de tweede keuze van τ_3 met de toewijzing van de waarden der variabelen y_i aan de partities τ_i :

$$\begin{array}{l} y_i \rightarrow 0 \quad 1 \\ (M(\tau_1), \tau_1) = (\overbrace{1,2,4} \ ; \ \overbrace{3,5}) \ ; \ \overbrace{1,3,4,5} \ ; \ \overbrace{2}) \\ (M(\tau_2), \tau_2) = (\overbrace{1,4} \ ; \ \overbrace{2} \ ; \ \overbrace{3,5}) \ ; \ \overbrace{1,2,4} \ ; \ \overbrace{3,5}) \\ (M(\tau_3), \tau_3) = (\overbrace{1,5} \ ; \ \overbrace{2,4} \ ; \ \overbrace{3,5}) \ ; \ \overbrace{1,5} \ ; \ \overbrace{2,3,4}) \end{array}$$

De codering van de toestanden van mach. F volgt hieruit: fig 5.19. Fig 5.20 geeft dan de schematische realisering van mach. F weer. (mach. F: fig 5.17).

	y_1	y_2	y_3
1 →	0	0	0
2 →	1	0	1
3 →	0	1	1
4 →	0	0	1
5 →	0	1	0

Met de onderhavige toewijzing zijn de vergelijkingen voor deze machine:

$$\begin{cases} Y_1 = x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_2, \\ Y_2 = x_1 y_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 + \bar{x}_1 x_2 y_1, \\ Y_3 = x_1 \bar{y}_2 + x_2 y_2 + \bar{x}_1 y_2 y_3 + \bar{x}_2 \bar{y}_2 \bar{y}_3; \\ Z = y_2 \bar{y}_3. \end{cases}$$

Bij beschouwing hiervan blijkt inderdaad de hiervoor bepaalde verminderde afhankelijkheid teruggevonden te kunnen worden: fig 5.20.

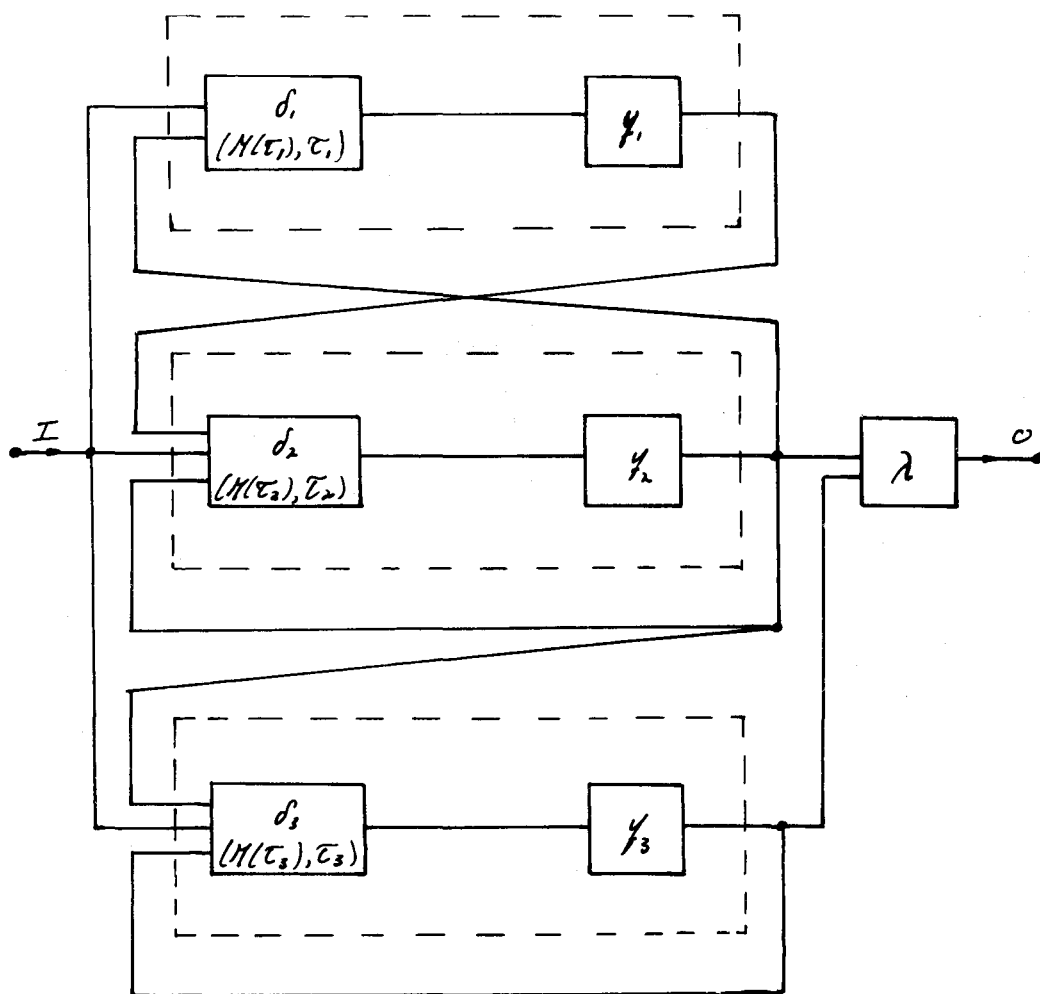


Fig 5.20. Schematische realisering van mach F (fig 5.17) met de codering der toestanden overeenkomstig fig 5.19.

5.6. De berekening van M_m -paren.

In het voorgaande zal duidelijk geworden zijn, dat de M_m paren bij de analyse van een sequentiële machine M van groot belang zijn.

Afgeluid was, dat \mathcal{Q}_Δ , de set der M_m paren, de machine volledig bepaalt, en een skelet is voor Δ , de verzameling der partitieparen. Dit werd aan de hand van voorbeelden toegelicht.

Tevens was gebleken, dat uit de M_m lattice de set der partities met substitutie-eigenschap was af te lezen.

Het volgende zal dan ook gewijd zijn aan de berekening van de verzameling der M_m -paren en de lattice hiervan, uitgaande van de volgorde tabel van de machine. We zullen ons hier beperken tot de M_m paren, volledig gedefinieerd op de verzameling der toestanden S van M . De lattice hiervan zal worden voorgesteld door het symbool L_M .

Bij de berekening wordt uitgegaan van:

Definitie 5.9. $\pi_{s,t}$: De partitie, welke de toestanden s en t in een blok verenigt, waarbij de overige toestanden zich apart in blokken van één element bevinden.

$$\text{Vb.: } \pi_{1,4} = \{ \overline{1,4}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{5} \}.$$

Stelling 5.9. : Als (π, π') een M_m paar is, geldt:

$$\pi' = m(\pi) = \sum \{ m(\pi_{s,t}) \mid \pi_{s,t} \leq \pi \}, \text{ en}$$

$$\pi = M(\pi') = \sum \{ \pi_{s,t} \mid m(\pi_{s,t}) \leq \pi' \}.$$

Bewijs: $\pi = \sum \{ \pi_{s,t} \mid \pi_{s,t} \leq \pi \}$. Dit impliceert volgens eigenschap 3 van Δ : $m(\pi) = \pi' = \sum \{ m(\pi_{s,t}) \mid \pi_{s,t} \leq \pi \}$.

Voorb: daar $(\pi_{s,t}, m(\pi_{s,t}))$ een partitie-paar is, is het tweede deel van deze stelling slechts een andere vorm van de definitie van de M -partitie (def. 5.4). q.e.d.

Deze stelling zegt o.a., dat iedere m -partitie een som van partities $m(\pi_{s,t})$ is, en volgens eigenschap 3 van de paar algebra is iedere som van m -partities weer een m -partitie.

Als dus de $m(\pi_{s,t})$ uit de volgorde tabel bepaald zijn, heeft men een set van generatoren voor alle m -partities ter beschikking.

Iedere m -partitie $m(\tau)$ bepaalt dan een bepaald element van L_M , namelijk $(M(m(\tau)), m(\tau))$, en zo kan dus de gehele L_M worden bepaald.

Om met bovenstaande principes te geraken tot het genereren van L_M , zullen er twee fasen worden onderscheiden; -een en ander zal aan de hand van een voorbeeld verdeeldelijk worden-:

1.a: Bereken aan de hand van de volgorde tabel: $m(\pi_{s,t}) = \pi_j'$ voor iedere s,t . Dit is het enige deel van de berekening, waarbij de volgorde tabel van M nodig is; de rest verloopt zonder verdere referentie naar de machine.

De gevonden $m(\pi_{s,t})$, welke dezelfde blijken te zijn, zijn dan redundant en worden niet verder in beschouwing genomen.

b: Bereken aan de hand van a de $M(\pi_i') = \sum \{ \pi_{s,t} \mid m(\pi_{s,t}) \leq \pi_i' \}$. (m.a.w. sommeren over $\pi_{s,t}$, zodat $(\pi_{s,t}, \pi_i')$ een p.p. is).

2.a: Bereken alle mogelijke sommen van $m(\pi_{s,t})$.

Een tweede generatie van m -partities ontstaat door de $m(\pi_{s,t})$, verkregen uit 1.a, paarsgewijs te sommeren, waarbij ook weer de redundante buiten beschouwing gelaten worden.

Een derde generatie wordt dan gevormd uit de tweede, enzovoort, tot er geen nieuwe meer gevonden kunnen worden, d.w.z. de nieuwe m -partities allemaal redundant zijn. Hiaraan wordt dan de c -partitie (ofwel $m(\pi_{s,s})$) aan toegevoegd.

b. A nalooq aan 1. b. worden voor de laatste generatie m -partities de nieuwe $M(\pi')$ berekend.

Bij de berekening in deze (of in een andere) vorm is het ook mogelijk een algoritme op te stellen, zodat het genereren van de M_m -paren aan een computer kan worden overgelaten.

(In principe is het ook mogelijk een rekenmachine een eenvoudige oplossing door middel van verminderde afhankelijkheid te laten vinden, o.a. via stelling 5.7., met de gunstigst mogelijke keuze van de beschrijvende partities.).

De M_m -lattice L_M kan dan opgesteld worden, door alle uiteindelijke gevonden m - en M -partities te verenigen tot M_m -paren.

Aan de hand van L_M kunnen ook de partities met substitutie-eigenschap worden bepaald:

Als (π_i, π_i') in L_M , en $\pi_i \geq \pi \geq \pi_i'$, dan bezit π substitutie-eigenschap. (eigenschap = bij de substitutie-eigenschap bij de paar algebra).

Indien gewenst kunnen ook op analoge wijze de M_m -lattices voor wat betreft de andere paren van stelling 5.6. bepaald worden: de $M_{m_{1-5}}$, $M_{m_{5-0}}$ en $M_{m_{5-5}}$ -lattices. (De $M_{m_{5-5}}$ lattice is reeds behandeld.).

Vb.: Beschouwd nu worden de hiervoor behandelde machine F , fig 5.21., waarvoor de M -paren nog berekend worden.

Begonnen wordt met het berekenen van de $m(\pi_{s,t})$:

	x_1, x_2			
	00	01	11	10
1	3	1	4	2
2	1	5	4	2
3	3	4	3	5
4	5	1	4	2
5	5	4	3	5

Fig 5.21.

Mach. F v. fig 5.17.

$m(\pi_{1,2})$: In $\pi_{1,2}$ bevinden de toestanden 1 en 2 zich in één blok. Uit de volgorde-tabel blijkt dan, dat in $m(\pi_{1,2})$ de toestanden 1 en 3 (input 00) en 1 en 5 (input 01) equivalent moeten zijn, d.w.z. in één blok. Vanwege de transitiviteit moeten de toestanden 1, 3 en 5 zich dan in één blok bevinden. Dus $m(\pi_{1,2}) = \{1,3,5; \bar{2}; \bar{4}\}$.
Op analoge wijze worden de overige $m(\pi_{s,t})$ berekend.

De complete lijst wordt dan:

$$\begin{aligned}
 m(\pi_{1,2}) &= \{1,3,5; \bar{2}; \bar{4}\} = \pi_1', \\
 m(\pi_{1,3}) = m(\pi_{4,5}) &= \{1,3,4; \bar{2}, \bar{5}\} = \pi_2', \\
 m(\pi_{1,4}) = m(\pi_{3,5}) &= \{1; \bar{2}; \bar{3}, \bar{5}; \bar{4}\} = \pi_3', \\
 m(\pi_{1,5}) = m(\pi_{2,3}) = m(\pi_{2,5}) = m(\pi_{3,4}) &= I, \\
 m(\pi_{2,4}) &= \{1,5; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\} = \pi_4'.
 \end{aligned}$$

Bij dit voorbeeld levert de berekening van een volgende generatie m -partities geen nieuwe partities meer op; alleen de o -partitie behoeft te worden toegevoegd. D.w.z.: de eerste, en tevens de laatste generatie geeft alle m -partities van mach. F .

Vervolgens worden de bijbehorende M -partities berekend:

π_1' : gesommeerd over alle $\pi_{s,t}$, zodat $m(\pi_{s,t}) \subseteq \pi_1'$ levert:

$$M(\pi_1') = \sum \pi_{s,t} = \pi_{1,2} + \pi_{1,4} + \pi_{3,5} + \pi_{2,4} = \{1,2,4; \bar{3}, \bar{5}\}.$$

Op analoge wijze worden de overige $M(\pi_i')$ berekend.

De complete lijst wordt dan:

$$M(I) = I,$$

$$M(\pi_1') = \pi_1 = \{1, \bar{2}, 4; \bar{3}, \bar{5}\},$$

$$M(\pi_2') = \pi_2 = \{1, \bar{3}; \bar{2}; \bar{4}, \bar{5}\},$$

$$M(\pi_3') = \pi_3 = \{1, \bar{4}; \bar{3}, \bar{5}; \bar{2}\},$$

$$M(\pi_4') = \pi_4 = \{1, \bar{5}; \bar{2}, \bar{4}; \bar{3}; \bar{5}\},$$

$$M(0) = 0.$$

De gevonden m - en M -partities kunnen dan verenigd worden tot M_m -parten:

$$(0, 0),$$

$$(I, I),$$

$$(\pi_1, \pi_1') = (\{1, \bar{2}, 4; \bar{3}, \bar{5}\}, \{1, \bar{3}, \bar{5}; \bar{2}; \bar{4}\}),$$

$$(\pi_2, \pi_2') = (\{1, \bar{3}; \bar{2}; \bar{4}, \bar{5}\}, \{1, \bar{3}, \bar{4}; \bar{2}, \bar{5}\}),$$

$$(\pi_3, \pi_3') = (\{1, \bar{4}; \bar{2}; \bar{3}, \bar{5}\}, \{1, \bar{4}; \bar{2}; \bar{3}, \bar{5}; \bar{5}\}),$$

$$(\pi_4, \pi_4') = (\{1, \bar{5}; \bar{2}, \bar{4}; \bar{3}; \bar{5}\}, \{1, \bar{5}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}).$$

Dere nu paren vormen dan een compacte representatie van de informatie-stroom in deze machine.

De lattice L_{M_m} , behorende bij deze machine, is dan die van fig. 5.22 (fig 5.10).

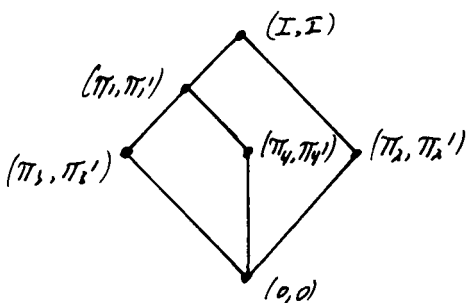


Fig 5.22.

L_{M_m} voor mach. F.

De S.E.-partities kunnen nu ook afgelezen worden:

$$\pi_3 \geq \pi \geq \pi_3'; \quad I \geq \pi \geq I \quad \text{en} \quad 0 \geq \pi \geq 0.$$

D.w.z.: er zijn twee niet-triviale partities met substitutie-eigenschap:

$$\{1, \bar{4}; \bar{2}; \bar{3}, \bar{5}\} \quad \text{en} \quad \{1, \bar{5}; \bar{2}; \bar{3}, \bar{4}\}.$$

5.7. Don't cares.

In hoofdstuk 3 kwamen de don't cares, notatie D.C.'s, reeds aan de orde. Dit waren „volgende“ toestanden, of outputs, welke in de volgorde tabel niet door de machinegegevens bepaald worden; aangegeven door het teken „-“.

Er zijn nu verschillende methoden om ook de structuur van machines met D.C.'s met behulp van de ontwikkelde partitie-paar theorie te bestuderen.

5.7.1. Uitgebreide partitie-paren.

Bij deze methode wordt iedere D.C.-conditie afzonderlijk en verschillend behandeld:

De D.C.'s in een toestandstabel worden vervangen door labels, en wel een label uit een verzameling label C voor iedere toestand D.C., en een label uit een set labels D voor iedere output D.C.

Bij een dergelijke machine kan het partitie-paar concept op logische wijze worden uitgebreid:

Definitie 5.10: gegeven zij een machine $M: (S, I, O, d, \lambda)$ met be-
noemde D.C.'s en partities π op S en τ op $S \cup C$, dan
is (π, τ) een „uitgebreid partitie paar“, u.p.p., dan en dan alleen als:

$$\forall x \in I [s \equiv t(\pi) \Rightarrow d(s, x) \equiv d(t, x)(\tau)].$$

Ook de andere paren, I-S-paren etc. kunnen op dezelfde wijze worden uitgebreid.

Vb.: Reschouw mach. 4, fig 5.23.

	a	b	c	
1	4	1	3	d ₁
2	c ₁	2	4	0
3	1	3	4	1
4	2	3	c ₂	0

E enkele u.p.p.'n zijn:

$$(\pi_1, \tau_1) = (\overline{4T}; \overline{2,4}; \overline{3,4}; \overline{c_1, 2, 3}; \overline{c_2, 4}; \overline{T, 4}),$$

$$(\pi_2, \tau_2) = (\overline{4T}; \overline{2,3}; \overline{4,4}; \overline{c_1, 1}; \overline{2,3}; \overline{c_2}; \overline{4,4}).$$

Fig 5.23

Mach. 4.

De verzameling der uitgebreide partitie-paren zal nu nader besien worden:

Stelling 5.10: Gegeven een machine M met benoemde D.C.'s, dan is de verzameling der uitgebreide partitie-paren, notatie: Δ' , een paar algebra Δ .

Bewijs: De definitie van een u.p.p. is dezelfde als die voor een (normaal) p.p. (bij vergelijking van de definities wordt SUC vervangen door S, hetgeen niet essentieel is).

Derhalve zijn alle stellingen, eigenschappen etc. voorkomende in paragraaf 5.3 (uitgezonderd 5.3.3. uiteraard) voor de verzameling der u.p.p.'n van toepassing.

Ook paragraaf 5.4 is weer van toepassing, met dien verstande, dat er nu gesproken wordt worden van S-SUC, I-SUC, S-OVD en I-OVD-paren.

1) deze stelling is dus vrijwel identiek met stelling 5.7; bij machines met D.C.-condities is het dus ook mogelijk verminderde afhankelijkheid van enkele toestand- en inputvariabelen tegelijk te verkrijgen, en wel met behulp van de uitgebreide partitie-paren.

Yerk op, dat door de toewijzing van variabelen aan de partities $\{\tau_i\}$ en $\{w_k\}$ de gecodeerde secundaire toestanden c_j , resp. de output d_j , vastgelegd worden, waardoor de gehele machine dus bepaald wordt.

Vb.: Beschouw mach. H, fig 5.24., fig 5.25.

	a	b	c	d
	00	01	11	10
1	1	2	-	4
2	-	4	1	2
3	2	1	4	3
4	4	-	-	1

Fig 5.24.

Mach. H.

	a	b	c	d
x	00	01	11	10
1	1	2	c_1	4
2	c_2	4	1	2
3	2	1	4	3
4	4	c_3	c_4	1

Fig 5.25.

Mach. H. met benoemde D.C.'s.

U. p.p.'n zijn o.a.:

$$\{1,3; 2,4\} \{1,2,c_4; 3,4,c_1,c_2,c_3\} = (\bar{\tau}_2, \tau_1),$$

$$\{1,2; 3,4\} \{1,3,c_1,c_2,c_3; 2,4,c_4\} = (\bar{\tau}_1, \tau_2),$$

$$\{a,b; c,d\} \{1,2,c_4; 3,4,c_1,c_2,c_3\} = (\mu_1, \tau_1).$$

Hiertij geldt: $\bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_2 = 0$.

Volstaan kan worden met twee toestandvariabelen, waarvan de waarden als volgt worden toegevoerd:

$$\bar{\tau}_1 = \{1,2; 3,4\} \quad \text{en} \quad \bar{\tau}_2 = \{1,3; 2,4\}.$$

Ten aanzien van de hier apart voorkomende toewijzing van de secundaire variabelen volgt dan:

$$\tau_1 = \overbrace{1, 2, C_4}^{Y_1 \rightarrow 0} ; \overbrace{3, 4, C_1, C_2, C_3}^1 ; \tau_2 = \overbrace{1, 3, C_1, C_2, C_3}^{Y_2 \rightarrow 0} ; \overbrace{2, 4, C_4}^1$$

Fig. 5.26 toont dan de volledig gecodeerde machine:

		a	b	c	d
		00	01	11	10
1	00	00	01	10	11
2	01	10	11	00	01
3	10	01	00	11	10
4	11	11	10	01	00

Fig. 5.26.

gecodeerde

machine H.

Nagegaan kan worden: $\tau_2 = M(\tau_1)$,

$$\tau_1 = M(\tau_2),$$

$\mu_1 = M(\tau_1)$, hetgeen ten grondslag ligt

aan de gegeven toewijzing.

Volgens de voorgaande stelling geldt dan:

$$Y_1 = f_1(Y_2, X_2) \neq g_1(Y_1, X_1),$$

$$Y_2 = f_2(Y_1, I) \neq g_2(Y_2).$$

5.7.2. Zwakke partitie-paren.

Bij deze methode wordt ten aanzien van de partitie-paren met het bestaan van de D.C.'s geen rekening gehouden.

Doe methode is eenvoudiger dan voorgaande, maar geeft evenwel minder goede resultaten, zoals zal blijken.

Definitie 5.13. Stel machine $M = (S, I, O, d, \lambda)$ is een machine met D.C.-condities en π en τ zijn partities op S , dan is

(π, τ) een „zwak partitie-paar“ - n.p.p. - , dan en dan alleen als

$$\forall x \in I [s \equiv t(\pi) \Rightarrow d(s, x) \equiv d(t, x)(\tau)],$$

indien $d(s, x)$ en $d(t, x)$ beide gespecificeerd zijn.

Analoge definities zijn op te stellen voor de overige paren, te weten

I-S, S-O en I-O-paren, b.v.

(μ, τ) is een zwak I-S-paar dan en dan alleen als:

$\forall s \in S [a \equiv b(\mu) \Rightarrow d(s, a) \equiv d(s, b)(\tau)]$, indien $d(s, a)$ en $d(s, b)$ gespecificeerd zijn, $a, b \in I$

Vb.: Mach. K, fig 5.27.

	a	b	c	
1	4	1	3	-
2	-	2	4	0
3	1	3	4	1
4	2	3	-	0

Enkele n.p.p.'n zijn:

$$(\pi_1, \pi'_1) = (\{T; \bar{2}, \bar{4}; \bar{3}\}, \{T; \bar{2}, \bar{3}; \bar{4}\}),$$

$$(\pi_2, \pi'_2) = (\{T; \bar{2}, \bar{3}; \bar{4}\}, \{T; \bar{2}, \bar{3}; \bar{4}\}).$$

Vergelijk mach. 4, fig 5.23.

Fig. 5.27.

Mach. K.

De verzameling der zwakke partitie paren, notatie Δ'' , zal nu nader beschouwd worden:

Wanneer mach. K. fig 5.27 en de daarbij gegeven a.p.p.'n nogmaals bezien worden, dan valt het volgende op:

$$(\pi_1 + \pi_2, \pi'_1 + \pi'_2) = (\{1; 2, 3, 4\} \{1; 2, 3; 4\}) \text{ g\u00e9\u00e9n a.p.p.}$$

Een deel van de eigenschappen etc. van de paar algebra Δ geldt dan ook niet voor Δ'' , in tegenstelling tot Δ' , (vandaar ook de naam "zwak" p.p.) en wel de delen, welke stollen op de summatic-eigenschap van paren in Δ .

Yet het oog hiervoor. zullen we dan ook paragraaf 5.3.1. op de voet volgen en waar nodig verkort herschrijven voor Δ'' , waarbij, indien niet vermeld, Δ'' in plaats van Δ gedacht kan worden.

Hierbij zal dan duidelijk worden:

De verzameling der zwakke partitie-paren is een zwak paar algebra, notatie Δ'' .

Definitie 5.15. (vergelijk definitie 5.3): Δ'' is een zwak paar algebra, dan en dan alleen als:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Delta'' \Rightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2) \text{ en } (x_1, y_1 + y_2), (x_2, y_1 + y_2) \in \Delta'' \\ \text{en } \forall x, y \in \Delta'' [(x, I), (0, y) \in \Delta'']$$

Stelling 5.11 (vergelijk stelling 5.1): $\text{Lfg } (x, y) \in \Delta'' \text{ en } x' \in x$.

Dan geldt: $(x', y) \in \Delta''$.

Definitie 5.16.: $m(x) = \prod \{y_i \mid (x, y_i) \in \Delta''\}$.

In deze definitie ontbreekt de M -operator. Dit bestaat hier niet, daar de algemene summatic-eigenschap ontbreekt.

Definitie 5.17. Dit is volkomen analoog aan definitie 5.5; dit geeft een ordening voor de paren in Δ'' .

Stelling 5.12. : Jeder nuak paar algebra Δ'' vormt een lattice met de ordening van de vorige definitie, met voor ieder paar elementen:

$$g. o. g. \{ (x, y_1), (x_2, y_2) \} = (x, x_2, y_1, y_2),$$

$$h. b. g. \{ (x, y_1), (x_2, y_2) \} = (x, x_2, y_1 + y_2 + m(x, x_2)).$$

De in paragraaf 5.3.1. geformuleerde eigenschappen gelden ook voor Δ'' , met uitzondering van die eigenschappen, waarin de M -operator voorkomt, en eigenschap 3, welke nu luidt:

$$m(x, x_2) \geq m(x) + m(x_2).$$

De uitdrukking is inmiddels, dat over M -paren en de substitutie-eigenschap niet gesproken kan worden.

Paragraaf 5.4 geldt hier analoog; overgegaan wordt dan ook naar het gedeelte, dat verminderde afhandelbaarheid aan de orde stelt, analoog aan par. 5.5.

Voor een machine met D.C.'s kan verminderde afhandelbaarheid ook via stelling 5.7 opgespaard worden, althans, dit lijkt zo, waarbij de voorwaarden „ $\prod \pi_n \in M_{S-S}(\tau_i)$ “, m. a. w. „ $[\prod \pi_n, M_{S-S}(\tau_i)]$ is een p.p.“, etc. vervangen moeten worden door een equivalente conditie: „ $(\prod \pi_n, \tau_i)$ is een n. p. p.“, etc.

Is dit geldt echter slechts onder de voorwaarde, dat de D.C.'s daarna volgen de gevonden partities eenduidig zijn in te vullen. Aan deze voorwaarde kan echter lang niet altijd voldaan worden, getuige b. v. mach. L, fig 5.2d.

	0	1
1	2	-
2	-	1

Fig 5.28.
Mach. L

	0	1
1	2	1
2	2	1

Fig 5.29
Mach. L' = L met ingevulde D.C.'s.

Voor mach. L is: $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{1}; \bar{2}, \bar{1})$ een zwak S-S-paar,
en $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}; \bar{2}, \bar{1})$ een zwak I-S-paar.

Zou stelling 5.7. hierbij geheel te generaliseren zijn, dan zou δ onafhankelijk gemaakt moeten kunnen worden van zowel de input als de toestand, hetgeen in tegenspraak is met het feit, dat δ niet constant kan zijn, daar de volgorde tabel reeds overgangen naar niet-equivalente toestanden te zien geeft.

De D.C.'s kunnen nu zo' ingevuld worden, dat de machine hetzij toestand-, hetzij input-onafhankelijk is, maar niet beide tegelijk; zie fig. 5.29, mach. L'.

Stelling 5.7. zal dan ook opnieuw geformuleerd worden, mede door condities in de vorm van " $\Pi \tau_2 \leq M_{S-S}(\tau_i)$ " etc. te vervangen door equivalente voorwaarden: " $(\Pi \tau_2, \tau_i)$ is een zwak p.p."; een stelling dus, die, wanneer men te maken heeft met D.C.'s, wel algemeen toepasbaar is:

Stelling 5.7.c.: Veronderstel, dat voor een machine M , met D.C.'s,

toestandvariabelen $\{y_i\}$ zijn toegewezen overeenkomstig toestand-partities $\{P_i\}$
 input " $\{\mu_j\}$ " " " input " $\{\mu_j\}$
 output " $\{w_k\}$ " " " output " $\{w_k\}$
 dan geldt:

1. Indien verzamelingen indices P_i en Q_i gegeven zijn, zodat $\{y_{P_i}\} \subseteq \{y_i\}$ en $\{x_{Q_i}\} \subseteq \{x_j\}$, met in het algemeen voor iedere i een andere P_i en Q_i :

a. $Y_i = f(\{y_{P_i}\}, \{x_{Q_i}\}) \iff (\prod_{\alpha \in P_i} \tau_\alpha, \tau_i)$ is een zwak S-S paar,

b. $Y_i = b(\{y_{P_i}\}, \{x_{Q_i}\}) \iff (\prod_{\alpha \in Q_i} \mu_\alpha, \tau_i)$ is een zwak I-S-paar;

2. Als $\{y_{P_k}\} \subseteq \{y_i\}$ en $\{x_{Q_k}\} \subseteq \{x_j\}$,

a. $Z_k = f(\{y_{P_k}\}, \{x_{Q_k}\}) \iff (\prod_{u \in P_k} \tau_u, w_k)$ is een zwak S-O-paar,

b. $Z_k = b(\{y_{P_k}\}, \{x_{Q_k}\}) \iff (\prod_{v \in Q_k} \mu_v, w_k)$ is een zwak I-O-paar.

Opmerking: Als geldt: $\prod \tau_i = 0$, en $\prod \mu_j = 0$, wordt iedere toestand en input van de machine eenduidig vastgelegd door $\{y_i\}$ en $\{x_j\}$.

Wordt deze stelling nu vergeleken met de oorspronkelijke stelling 5.7., dan blijkt een opvallend verschil te bestaan:

Met behulp van de theorie der invariabe-partitie-paren kan de afhankelijkheid der secundaire variabelen van de toestand- en input-variabelen in het algemeen slechts afzonderlijk verminderd worden, terwijl dit bij stelling 5.7. gelijktijdig plaats vond. De voorwaarden hiertoe vallen in stelling 5.7.c. dan ook in twee delen uiteen.

E en en ander is het gevolg van het feit, dat de verzameling der mach-
te partitie-paren α'' geen paar algebra α uit paragraaf 5.3. is.

Dit laatste aspect is een nadeel van de methode met verwaas-
losing van de D.C.'s; wanneer echter slechts één soort verminderde
afhandelbaarheid beoogd wordt, is deze methode het eenvoudigst.

Vb.: B. enhouw mach. M, fig 5.30.

	a	b	c	d
1	1	2	-	4
2	-	4	1	2
3	2	1	4	3
4	4	-	-	1

Fig 5.30. Mach. M.

Hierbij zijn enige a.p.p.'n:

$$\{ \overline{1,2}; \overline{3,4} \}, \{ \overline{1,3}; \overline{2,4} \} = (\tau_1, \tau_2),$$

$$\{ \overline{1,3}; \overline{2,4} \}, \{ \overline{1,2}; \overline{3,4} \} = (\tau_2, \tau_1).$$

Daar $\tau_1, \tau_2 = 0$ en twee variabelen
voor deze machine voldoende zijn,
worden y_1 en y_2 als volgt toegevoegd:

$$y_1 \rightarrow 0 \quad 1 \quad \quad y_2 \rightarrow 0 \quad 1$$

$$\tau_1 = \{ \overline{1,2}; \overline{3,4} \} \quad \text{en} \quad \tau_2 = \{ \overline{1,3}; \overline{2,4} \}$$

Volgens de voorgaande stelling geldt dan:

$$Y_1 = f_1(y_2, I) \neq g_1(y_1), \quad \text{en}$$

$$Y_2 = f_2(y_1, I) \neq g_2(y_2).$$

Opmerking: De juiste vergelijkingen, waaraan de secundaire
variabelen voldoen, zijn weer, zoals eerder behandeld, te verkrij-
gen via het invullen van de vastgestelde codering in de volg-
ordetabel.

Opmerking: Ten aanzien van de D.C.'s, die ontstaan door de toestandovernameling van een compleet gespecificeerde machine M tot realisering uit breiden tot 2^n toestanden, M' , wordt het volgende opgemerkt:

Doe D.C.'s worden, indien mogelijk, zo' ingevuld, dat de reeds met behulp van de normale partitie paren op M gevonden verminderde afhankelijkheid, in de vergelijkingen, welke de secundaire variabelen bepalen, bij M' ongewijzigd blijven bestaan:

Vb.: Zie de opmerking bij mach. E, paragraaf 5.5, en mach. E'. fig 5.15.

6. Partities met substitutie-eigenschap en machines.

In de inleiding en de eerste paragraaf van het vorige hoofdstuk kwamen partities met substitutie-eigenschap, notatie (indien dit geen verwarring geeft): S.E.- π 's, reeds ter sprake.

Daar raagen we, dat S.E.- π 's in verband gebracht kunnen worden met de informatiestroom door een sequentiële machine, en een juiste toepassing van de S.E.- π 's tot verminderde afhankelijkheid kan leiden, zodanig, dat de nieuwe waarde van elke variabele uit een bepaalde subset van variabelen alleen afhangt van de oude waarden van variabelen in dezelfde subset.

6.1. Definitie.

Definitie 6.1. : Een partitie π van de verzameling toestanden van een sequentiële machine bezit de substitutie-eigenschap, als voor ieder paar toestanden, welke tot één blok van π behoren, bij iedere input de bijbehorende volgende toestanden ook tot één blok van π behoren, ofwel,

partitie π heeft S.E., dan en dan alleen als de blokken van π met iedere input worden afgebeeld in blokken van π zelf.

Formeel:

Een partitie π van de toestanden v.e. seq. mach. $M = (S, I, O, \delta, \lambda)$ bezit S.E., als:

$$\underline{\forall x \in I [s \equiv t(\pi) \Rightarrow \delta(s, x) \equiv \delta(t, x)(\pi)]} \quad , \forall,$$

$$\underline{\forall x \in I, \forall b_{\pi} \in \pi \exists B'_{\pi} \in \pi [\delta(b_{\pi}, x) \in B'_{\pi}]}$$

(Vergelijk partitie-paar!)

Vb.: Mach. A, fig 6.1. (fig 3.4 e.v., fig 3.14 e.v.).

		0	1	
(A, a)	1	4	1	1
(A, b)	2	4	2	0
(b, b)	3	1	3	0
(b, a)	4	1	4	0

Fig 6.1.

Mach. A.

Uit de volgordetabel wordt afgelezen:

S.E.- π 's zijn:

$\pi_1 = \{1, 2; 3, 4\} = \{A, B\}$, want

blok A gaat met input 0 over in toestand 4, $4 \in B$, met input 1 over in zichzelf;

blok B gaat met input 0 over in toestand 1, $1 \in A$, en met in-

put 1 over in zichzelf;

$\pi_2 = \{1, 4; 2, 3\} = \{a, b\}$.

Hier geldt: $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$, zodat met behulp van deze partities de machine volledig bepaald is.

Beide partities zijn 2-bloks partities; de variabelen y_1 en y_2 , nodig om mach. A te realiseren, kunnen dan ook aan de blokken van deze π 's worden toegewezen: b.v.

$$y_1 \rightarrow 0 \quad 1 \quad \quad y_2 \rightarrow 0 \quad 1$$

$$\pi_1 = \{1, 2; 3, 4\} \quad , \quad \pi_2 = \{1, 4; 2, 3\}$$

Deze codering blijft dan overeen te komen met die van fig 3.6.

Met deze codering werden uit de volgordetabel de vergelijkingen van fig 3.7. verkregen.

Zoals reeds in het algemeen gesteld is, is y_1 toegewezen aan S.E.- π π_1 , niet van de andere toestandvariabelen afhankelijk, zoals ook fig. 3.12 laat zien. De blokken van π_1 konden al andere toestanden, A in B, van een afgesplitste machine A, gezien worden, met de daaraan toegevoegde waarden van y_1 .

De splitsing toont fig 6.2.

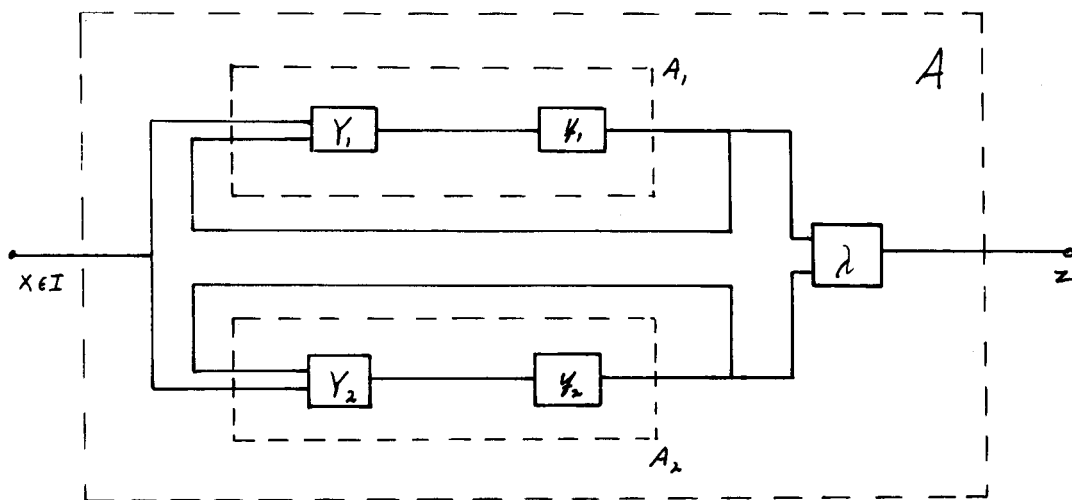


Fig. 6.2.
Splitsing van mach. A.

Opmerking: Ter vergelijking hiermee is fig. 5.7. noemenswaardig opgenomen: fig. 6.3. Deze figuren tonen een voorbeeld van een splitsing verkregen met behulp van partitie-paren.

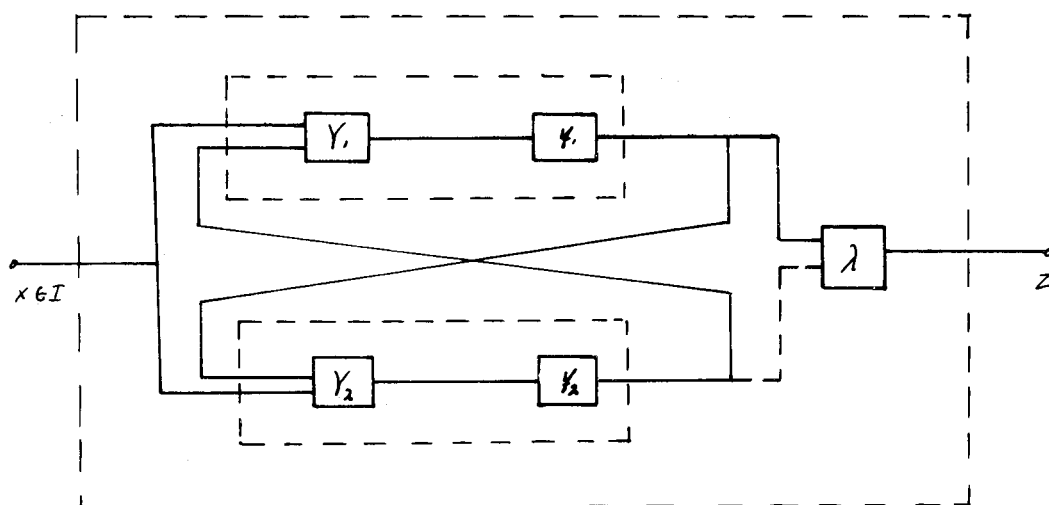


Fig. 6.3.
Splitsing m. b. v. partitie-paren.

De volgordebijl van mach. A_1 , geeft fig. 6.4, uitgaande van π , en de volgordebijl van mach. A .

A naloog geldt hetzelfde voor mach. A_2 .

	0	1
A	B	A
B	A	B

Y_1	0	1
0	1	0
1	0	1

	0	1
a	a	a
b	a	b

Fig. 6.4. a. Fig. 6 Fig. 6.5.

Mach. A_1

var. Y_1 , mach. A ,

Fig. 6.4. b

Mach. A ,

Wanneer, zoals gesteld, variabele y_1 toegewezen aan mach. A_1 , dan resulteert fig. 6.5. Wanneer dan de overgang- nieuwe toestandsfunctie berekend uit fig. 6.4., dan volgt:

$$Y_1 = \bar{y}_1 \bar{x} + y_1 x = f_1(x, y_1) \neq g_1(y_2)$$

bij mach. A_2 wordt dit:

$$Y_2 = y_2 x = f_2(x, y_2) \neq g_2(y_1).$$

Dit zijn precies de vergelijkingen van fig. 3.7., die resulteerden met de toestandsbijl van de samengestelde machine A , de oorspronkelijke machine, en de codering van fig. 3.6.

Ten aanzien van de output geldt, dat deze met een combinatorisch netwerk met als ingangen de toestanden van de geheugen-elementen y_i (en de eventuele ingangssignalen) fysisch gerealiseerd wordt; hierop wordt nader teruggekomen.

Vb.: Mach B. fig. 6.6. (fig. 3.0. e.v.). Partities met S.E. zijn hierbij:

$$\pi_1 = \{1,2,3; 4,5,6\} \text{ en } \pi_2 = \{1,6; 2,5; 3,4\}, \text{ met } \pi_1 \cdot \pi_2 = 0.$$

	0	1
1	4	3
2	6	5
3	5	2
4	2	5
5	1	4
6	3	4

0 overeenkomstig π_1 wordt de variabele y_1 toegewezen; π_2 is echter een drie-bloks-partitie, voegen we aan ieder blok een binair codewoord toe, dan zijn hiervoor 2 variabelen nodig: y_2 en y_3 .

Wordt dit voor π_1 nader uitgewerkt zoals in het vorige voorbeeld:

Fig. 6.6.

Mach. B.

$$y_1 \rightarrow 0 \quad 1$$

$$\pi_1 = \{1,2,3; 4,5,6\},$$

dan resulteert hieruit:

$$Y_1 = y_1 x + \bar{y}_1 \bar{x} = f_1(y_1, x) \neq g_1(y_2, y_3). \quad (\text{fig. 3.10})$$

met tweede toewijzing.)

Het voorgaande betref voorbeelden van „parallel“-decompositie, getuige de figuren 3.12 resp. 3.13; er zijn echter meerdere mogelijkheden voor splitsing met S.E.- π 's, waarvan de elementaire vorm nog aan de orde zal komen.

6.2. De lattice van partities met substitutie-eigenschap.

In hoofdstuk 3 is aangetoond, dat alle toestands-partities van een machine M een lattice L vormen met de ordening \leq en de operaties \cdot en $+$.

Nu zal gesteld worden, dat de operaties \cdot en $+$ ook tussen S.E.- π 's van kracht zijn.

Stelling 6.1. Als π_1 en π_2 S.E.- π 's zijn op S van M , dan zijn tevens
S.E.- π 's : $\pi_1 \cdot \pi_2$ en $\pi_1 + \pi_2$.

Bewijs: Indien $s \equiv t(\pi_1 \cdot \pi_2)$ is, volgt hieruit per definitie:

$$s \equiv t(\pi_1) \text{ en } s \equiv t(\pi_2) \dots \dots \dots (1)$$

Omdat π_1 en π_2 S.E.- π 's zijn, is voor iedere input $a \in I$:

$$d(s, a) \equiv d(t, a)(\pi_1) \text{ en } d(s, a) \equiv d(t, a)(\pi_2).$$

Hier volgt dan met de product-definitie (4.3) uit:

$$d(s, a) \equiv d(t, a)(\pi_1 \cdot \pi_2) \dots \dots \dots (2)$$

(1) en (2) geven: $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$ bezit S.E.

Met behulp van de partitie-rom (def. 4.4) is ook aan te tonen
 dat $\pi = \pi_1 + \pi_2$ de S.E. bezit q.e.d.

Met gebruikmaking van de voorgaande stelling kan dan de lat-
 tice van de S.E.- π 's gevormd worden:

Stelling 6.2.: De verzameling van alle S.E.- π 's uit L vormt een
sublattice L_{SE} (bevattende de elementen 0 en I ,
 met de ordening \leq en de operaties \cdot en $+$).

Bewijs: Zoals uit de vorige stelling bleek, zijn de operaties \cdot en $+$
 tussen S.E.- π 's uit L dezelfde als tussen de normale partities uit
 L en dus is L_{SE} een sublattice van L . (Dat L_{SE} 0 en I bevat is
 triviaal.) q.e.d.

Vergetelijk hierbij ook stelling 5.5. en de daaraan voorafgaande
 definities!

Voor het opstellen van deze lattice is het noodig, alle s.e.- π 's te kunnen genereren, eventueel met behulp van een rekenmachine; enige mogelijkheden daartoe komen later nog aan de orde.

Vb.: behouden wordt mach. C, fig 6.7.

	0	1	
1	2	3	0
2	1	3	0
3	4	5	0
4	3	2	1
5	1	6	1
6	1	5	1

Fig 6.7.

Mach. C.

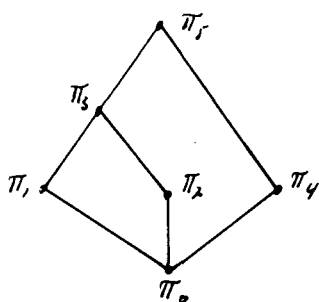


Fig. 6.8.

L_{SE} van Mach. C.

De s.e.- π 's van deze machine zijn:

$$\pi_0 = 0,$$

$$\pi_1 = \{ \bar{1}, \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6} \},$$

$$\pi_2 = \{ \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}, \bar{6} \},$$

$$\pi_3 = \{ \bar{1}, \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}, \bar{6} \},$$

$$\pi_4 = \{ \bar{1}, \bar{4}; \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6} \},$$

$$\pi_5 = I.$$

De lattice van deze partities toont fig 6.8.

Een voorbeeld hierbij van de „ \cdot “ operatie tussen s.e.- π 's:

$$\pi_1 \cdot \pi_4 = 0 \text{ en } 0 \text{ is een (triviale) s.e.-}\pi.$$

Een voorbeeld van de „+“ operatie:

$\pi_1 + \pi_2 = \pi_3$. In de tabel kan nagegaan worden, dat $\pi_3 = \{ \bar{1}, \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}, \bar{6} \}$ inderdaad een s.e.- π is.

De lattice L_{SE} geeft vanwege de nichtbare relaties tussen de s.e.- π 's ook een beeld van de structuur van

de sequentiële machine. Het zal blijken, dat uit de lattice L_{SE} direct de verschillende belangrijke serie-parallel decomposities zijn af te leiden.

6.3. Elementaire parallel splitsing.

In deze paragraaf zal de elementaire parallel-decompositie van een machine M in twee component machines M_1 en M_2 met behulp van S.E.- π 's aan de orde komen.

De hierbij behorende parallelshakeling is die, zoals getekend in fig. 6.9.

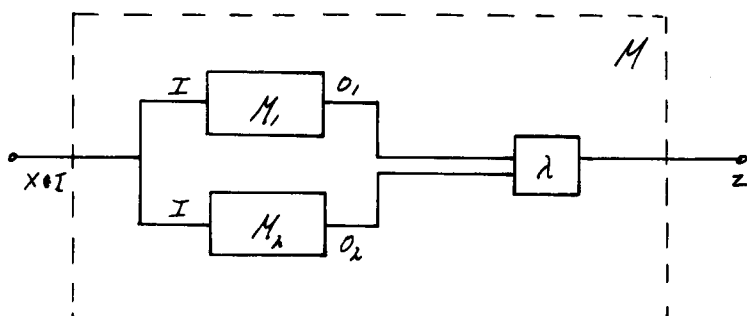


Fig. 6.9. Mach. $M = M_1$ parallel M_2 .

Een hierbij gebruikte notatie is: $M_1 \parallel M_2$.

Ten aanzien van de relatie tussen de inputs etc. van de component machine en de oorspronkelijke machine geldt:

zowel M_1 als M_2 hebben dezelfde input I van M , en geen extra andere; M_1 en M_2 opereren volledig onafhankelijk van elkaar, d. w. z. zij ontleenen aan elkaar geen informatie.

De output van de comp. machines wordt dan zo' gekozen, dat met behulp van een zo eenvoudig mogelijk combinatorisch netwerk, met als ingangen bedoelde output, de output van M gevormd kan worden, b.v. $\lambda(s) = \lambda_1(s_1) \cdot \lambda_2(s_2)$.

De mogelijkheid van zo'n parallel-splitsing kan nu met de S.E.- π 's gedeticeerd worden:

Stelling 6.3.: Een sequentiële machine M bezit een (elementaire) parallel-decompositie, $M_1 \parallel M_2$, dan en dan alleen als er twee niet-triviale S.E.- π 's π_1 en π_2 op S van M bestaan, zodat $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$. Het aantal toestanden van zowel M_1 als M_2 is dan kleiner dan dat van M .

Constructie van de component-machines:

De toestanden van de deelmachines M_1 en M_2 kunnen nu gevormd worden overeenkomstig de blokken van π_1 , resp. π_2 ;

de deelmachines worden dan als volgt uitgevoerd, als $M = M_1 \parallel M_2 = (S, I, 0, \delta, \lambda)$:

$$M_1 = (S_1, I_1, 0_1, \delta_1, \lambda_1) = (\{B_{\pi_1}\}, I, 0_1, \delta_1, \lambda_1) \text{ en}$$

$$M_2 = (S_2, I_2, 0_2, \delta_2, \lambda_2) = (\{B_{\pi_2}\}, I, 0_2, \delta_2, \lambda_2), \text{ met}$$

$$\delta_1(B_{\pi_1}(s), x) \cdot \delta_2(B_{\pi_2}(s), x) = \delta((B_{\pi_1}(s) \cap B_{\pi_2}(s)), x) = \delta(s, x);$$

$$f(\lambda_1(B_{\pi_1}(s), x), \lambda_2(B_{\pi_2}(s), x)) = \lambda((B_{\pi_1}(s) \cap B_{\pi_2}(s)), x) = \lambda(s, x),$$

zoals hiervoor gesteld is.

λ_1 en λ_2 nu zijn altijd te vinden; in het uiterste geval kan bij iedere toestand van een comp. mach. de toestand zelf als output genomen worden, d.w.z. $\lambda_1 = e$, $\lambda_2 = e$; substitueer dit in de laatste vergelijking.

Omdat $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$, is iedere toestand van M eenduidig bepaald door de toestanden van M_1 en M_2 .

Omdat π_1 en π_2 niet-triviale partities zijn, is het aantal toestanden van M_1 en M_2 elk kleiner dan dat van M .

Vb.: Beschouw mach. D, fig. 6.10 (= fig. 3.0. mach C).

	0	1	
1	4	3	0
2	6	3	0
3	5	2	0
4	2	5	1
5	1	4	0
6	3	4	0

Fig 6.10
Mach. D

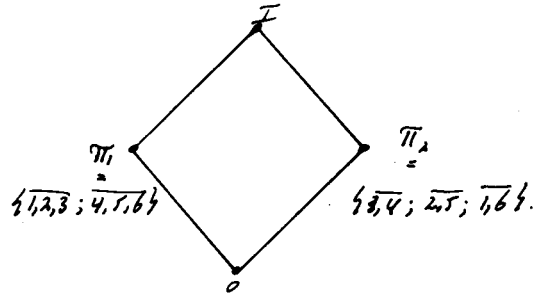


Fig 6.11
 L_{SE} van Mach. D.

De lattice van s.e.- π 's geeft fig. 6.11.

Hiervan kan worden afgelezen: $\pi_1 = \{1,2,3; 4,5,6\}$
en $\pi_2 = \{3,4; 2,5; 1,6\}$ zijn s.e.- π 's, waarbij

$\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$.

Vanwege voorgaande stelling definiëren π_1 en π_2 dan een parallel-decompositie van mach D. Wanneer de blokken van de partities als volgt benoemd worden:

$\pi_1 = \{1,2,3; 4,5,6\} = \{A, B\}$ en $\pi_2 = \{3,4; 2,5; 1,6\} = \{a, b, c\}$,
zijn de twee deelmachines D_1 en D_2 , overeenkomstig deze partities, als getekend in fig. 6.12, resp. 6.13.

	0	1	
$(1,2,3)$ A	B	A	0
$(4,5,6)$ B	A	B	1

$\pi_1 = \{1,2,3; 4,5,6\} = \{A, B\}$

Fig 6.12
Mach. D_1 .

	0	1	
$(3,4)$ a	b	b	1
$(2,5)$ b	c	a	0
$(1,6)$ c	a	a	0

$\pi_2 = \{3,4; 2,5; 1,6\} = \{a, b, c\}$

Fig. 6.13
Mach. D_2 .

Daar mach. D een Moore machine is, zijn de twee deelmachines ook Moore-machines. De output van D_1 en D_2 zijn nu gekozen en toegevoegd, dat geldt:

$$\lambda(s) = \lambda_1(s_1) \cdot \lambda_2(s_2) \quad , s_i \in S_i \text{ van } M_i.$$

De toestanden van mach. D zijn nu een combinatie van de toestanden van D_1 en D_2 , zie fig. 6.10.

Om mach. D_1 te realiseren is 1 binaire variabele nodig, immers, D_1 heeft 2 toestanden. De toewijzing vindt plaats overeenkomstig de blokken van π_1 :

$$y_1 \rightarrow 1 \quad 0$$

$$\pi_1 = \{ \overline{1,2,3}; \overline{4,5,6} \}.$$

Mach. D_2 heeft 3 toestanden, hiervoor zijn dus 2 binaire variabelen nodig: y_2 en y_3 . De toewijzing overeenkomstig de blokken van π_2 :

$$y_2 y_3 \rightarrow 00 \quad 01 \quad 10$$

$$\pi_2 = \{ \overline{3,4}; \overline{2,5}; \overline{1,6} \}.$$

W ordt deze toewijzing van de waarden der variabelen aan de toestanden van mach. D = mach. C, fig. 3.8, vergeleken met de tweede toewijzing voor deze machine, fig. 3.9, dan blijken deze hetzelfde te zijn. De tweede toewijzing van fig. 3.9 bleek een gunstige te zijn; de resulterende vergelijkingen zijn dan die van fig. 3.10, waar de verminderde afhankelijkheid duidelijk naar voren komt.

Het vinden van deze gunstige toewijzing is nu echter niet langer een gelukkig toeval, maar kan aan de hand van de S.E.- π 's plaatsvinden.

Fig. 3.15 toont de parallel-decompositie voor deze machine, hiaraan behoeft slechts het output-vormend netwerk, een in-poort te worden toegevoegd: fig. 6.14.

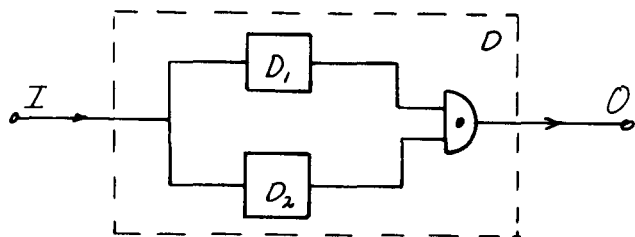


Fig 6.14. Parallel-decompositie van mach. D.

Vb.: Mach. E, fig 6.15; bijbehorende L_{SE} : fig 6.16.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(A,a)	1	2	1	5	0	3	1
(b,a)	2	1	2	6	7	4	1
(b,b)	3	4	3	6	6	1	0
(A,b)	4	3	4	5	5	2	0
(c,b)	5	5	6	3	4	7	1
(D,b)	6	6	5	4	3	0	0
(D,a)	7	7	0	4	2	5	1
(C,a)	0	0	7	3	1	6	1

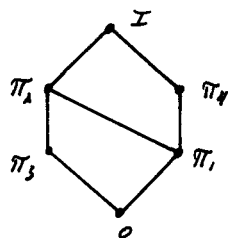


Fig 6.16
 L_{SE} v. mach. E.

Fig 6.15. Mach E.

S.E. - π 's zijn: $\pi_1 = \{1,2; 3,4; 5,6; 7,0\}$, $\pi_2 = \{1,2,3,4; 5,6,7,0\}$,
 $\pi_3 = \{1,4; 2,3; 5,0; 6,7\}$, $\pi_4 = \{1,2,7,0; 3,4,5,6\}$, 0 en I.

Uitgevoerd wordt nu een paar S.E. - π 's, waarvan het product 0 is:

B.v. $\pi_3 \cdot \pi_4 = 0$. De blokken van deze partities worden benoemd:

$$\pi_3 = \{1,4; 2,3; 5,0; 6,7\} = \{A, B, C, D\}, \pi_4 = \{1,2,7,0; 3,4,5,6\} = \{a, b\}.$$

De twee bijbehorende deelmachines zijn die van fig 6.17, resp. fig 6.18.

Deelre toestand van mach. E is dan een combinatie van de toestanden van E_1 en E_2 , zoals fig. 6.15 laat zien.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
A	B	A	C	C	B	0
B	A	B	D	D	A	0
C	C	D	B	A	D	1
D	D	C	A	B	C	0

Fig 6.17. Mach E_1 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
a	a	a	b	a	b	1
b	b	b	b	b	a	0

Fig 6.18. Mach E_2 .

De output van mach. E is dan een combinatie van de output van E_1 en E_2 ; $\lambda(s) = \lambda_1(s_1) + \lambda_2(s_2)$; deze wordt dus gevormd door een of-poort.

Mach. E_1 kan dan gerealiseerd worden, overeenkomstig de blokken van π_3 , met 2 binaire variabelen y_1 en y_2 ; en mach. E_2 met een variabele y_3 , π_4 heeft immers 2 blokken.

Ter aanvullen van de vergelijkingen, welke na uitwerking resulteren, geldt dan:

$$Y_1 = f_1(y_1, y_2),$$

$$Y_2 = f_2(y_1, y_2),$$

$$Y_3 = f_3(y_1, y_2).$$

Elke Y_i is niet afhankelijk van alle y_i ; dus weer: verminderde afhankelijkheid.

De parallel decompositie van mach. E is nagenoeg dezelfde als geschetst in fig. 6.14; het verschil is, dat de en-poort vervangen is door een of-poort.

6.4. Elementaire serie-splitsing.

In het volgende zal de (elementaire) serie-splitsing van een machine M in twee component machines M_1 en M_2 met behulp van een S.E.- π besproken worden.

De hierbij behorende serie-schakeling toont fig 6.19, notatie $M_1 \oplus M_2$.

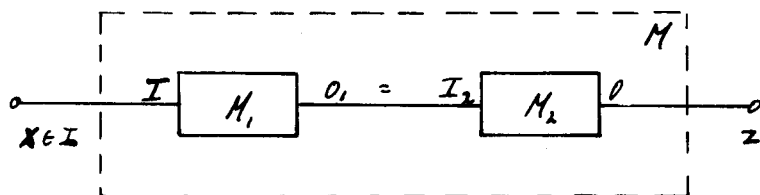


Fig. 6.19. Mach. $M = M_1 \oplus M_2$.

Ten aanzien van de relaties tussen de inputs etc. van de deel-machines en de oorspronkelijke machine geldt hierbij:

Aan M_1 wordt de input I van M toegevoerd,

aan M_2 wordt de output van M_1 als input toegevoerd,

en de output van M_2 levert rechtstreeks de output van M .

In tegenstelling tot $M_1 \parallel M_2$ opereren M_1 en M_2 hier niet onafhankelijk van elkaar; M_2 ontleent informatie aan M_1 .

Stelling 6.4.: Een sequentiële machine M bezit een (elementaire) serie-decompositie, $M_1 \oplus M_2$, dan en dan alleen, als er een niet-triviale S.E.- π op S van M bestaat.

Het aantal toestanden van zowel M_1 als M_2 is hierbij kleiner dan dat van M .

Constructie van de component-machines:

Bij S.E.-partitie π op S van M kan een niet-triviale partitie τ ,

eveneens op S van M , gevocht worden, zodanig, dat τ een grootte partitie is, zodat:

$$\pi \cdot \tau = 0$$

V.B.: τ behoeft géén S.E.-partitie te zijn.

De deelmachines M_1 en M_2 kunnen dan als volgt uitgedrukt worden, als $H = (S, I, O, \delta, \lambda) = M_1 \oplus M_2$:

$$M_1 = (S_1, I_1, O_1, \delta_1, \lambda_1) = (\{B_\pi\}, I, \{B_\pi\} \times I, \delta_1, \lambda_1), \text{ en}$$

$$M_2 = (S_2, I_2, O_2, \delta_2, \lambda_2) = (\{B_\tau\}, \{B_\pi\} \times I, O, \delta_2, \lambda_2), \text{ met}$$

$$\underline{(\delta_1(B_\pi(s), x), \delta_2(B_\tau(s), x)) = \delta((B_\pi(s) \cap B_\tau(s)), x) = \delta(s, x) \text{ en}}$$

$$\underline{\lambda_1(B_\pi(s), x) = B_\pi(s), x \quad ; \quad \lambda_2(B_\tau(s), (B_\pi(s), x)) = \lambda((B_\pi(s) \cap B_\tau(s)), x) = \lambda(s, x).}$$

Omdat $\pi \cdot \tau = 0$, is iedere toestand van M eenduidig bepaald door de toestanden van M_1 en M_2 .

Daar π en τ niet-triviale partities zijn, is het aantal toestanden van M_1 en M_2 elk kleiner dan dat van M .

Vb.: Benhouwd wordt machine F , fig 6.20. De lattice der S.E.- π 's geeft fig 6.21.

		0	1	0	1
(A, a)	1	5	3	1	0
(A, b)	2	3	4	0	0
(B, a)	3	1	5	0	1
(B, b)	4	2	3	0	0
(B, c)	5	1	4	0	0

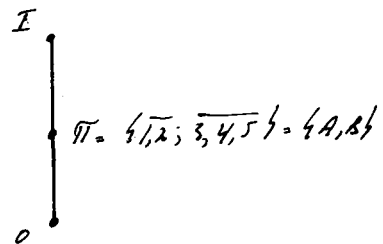


Fig 6.21. L_{SE} van mach. F .

Fig 6.20 Mach. F .

Er bestaat dus een niet triviale S.E.-partitie: π .

Bij deze partitie wordt een grootste partitie τ gevocht, zodat $\pi \cdot \tau = 0$. τ zal dan tenminste 3 blokken moeten bevatten, omdat het grootste blok van π 3 toestanden bevat. Een mogelijke keuze voor τ is dan:

$$\tau = \{ \overline{1,3}; \overline{2,4}; \overline{5} \} = \{ a, b, c \}.$$

Volgens voorgaande stelling is mach. F dan te ontbinden in een reenschakeling van 2 deelmachines F_1 en F_2 , waarbij F_1 en F_2 samen F simuleren: de serie-decompositie $F_1 \oplus F_2$.

De toestanden van de deelmachines F_1 en F_2 komen dan overeen met de blokken van de partities π , resp. τ .

Mach. F_1 wordt dan gegeven in fig. 6.2.2.

		0	1	0	1
$(\overline{1,2})$	A	B	B	A, 0	A, 1
$(\overline{3,4,5})$	B	A	B	B, 0	B, 1

Fig. 6.2.2. Mach F_1 ; $\pi = \{ \overline{1,2}; \overline{3,4,5} \} = \{ A, B \}$.

De volgende toestanden $d(s, x)$ van F_1 kunnen rechtstreeks uit de volgorde tabel van mach. F , fig. 6.20 worden afgelezen.

De output van F_1 wordt vastgelegd door de volgende relatie:

$$\lambda(B_{\pi}, x) = \lambda(s, x) = (B_{\pi}, x) = (s, x).$$

Ten aanzien van F_2 :

De volgorde tabel wordt gegeven in fig. 6.2.3.

		A0	A1	B0	B1	A0	A1	B0	B1
$(\overline{1,3})$	a	c	a	a	c	1	0	0	1
$(\overline{2,4})$	b	a	b	b	a	0	0	0	0
$(\overline{5})$	c	-	-	a	b	-	-	0	0

Fig. 6.2.3. Mach F_2 ; $\tau = \{ \overline{1,3}; \overline{2,4}; \overline{5} \} = \{ a, b, c \}$

De input van deze machine is de volgende: $I_2 = S, x I = \{B, \pi\} \times I$, de indices slaan op de verschillende machines (F_1 en F_2).

De volgende toestanden $d(s, x)$ kunnen rechtstreeks in fig. 6.20 van mach. F worden afgelezen, ditzelfde geldt voor de output, b.v.:

$$d[(A, a), 0] = 5 \in c, \text{ en } \lambda[(A, a), 1] = 0.$$

In de resulterende volgorde tabel (fig. 6.23) zijn een aantal don't care's ontstaan. Deze D.C.'s zullen nu zo gekozen worden, dat, indien mogelijk, mach. F_2 vereenvoudigd wordt.

Wanneer voor $d[C, (A, 0)] = b$, $d[C, (A, 1)] = a$, $\lambda[C, (A, 0)] = 0$ en $\lambda[C, (A, 1)] = 0$ ingevuld wordt, blijkt dat de 1^e en 4^e, 2^e en 3^e, 5^e en 6^e, 6^e en 7^e kolom paarsgewijs gelijk zijn. De inputs A0 en B1 resp A1 en B0 zijn dan gelijkwaardig, d.w.z. mach. F_2 wordt een machine met slechts 2, in plaats van 4, inputs. Deze twee input nullen nu α resp. β genoemd worden.

De machines F_1 en F_2 worden dan nogmaals gegeven in fig. 6.24.

	0	1	0	1
A	B	B	α	β
B	A	B	β	α

$\pi = \{1, 2; 3, 4\} = \{A, B\}$

	α	β	α	β
a	c	a	1	0
b	a	b	0	0
c	b	a	0	0

$\epsilon = \{1, 3; 2, 4; 5\}$
 $= \{a, b, c\}$

Mach. F_1
Mach. F_2

Fig. 6.24.

Deze toestand van mach. F is ook nu weer een combinatie van de toestanden van F_1 en F_2 , zie fig. 6.20.

Mach. F_1 kan worden gerealiseerd met 1 binaire variabele, overeenkomstig de blokken van π , γ_1 ; mach. F_2 , overeenkomstig ϵ , met γ_2 en γ_3 .

Ten aanzien van de verminderde afhankelijkheid van de variabelen onderling is dan eenvoudig in te zien :

$$Y_1 \neq f(Y_2, Y_3).$$

De serie-decompositie van mach. F door een serie schakeling van de deelmachines F_1 en F_2 is dan zoals aangegeven in fig. 6.25. (= fig. 6.19).

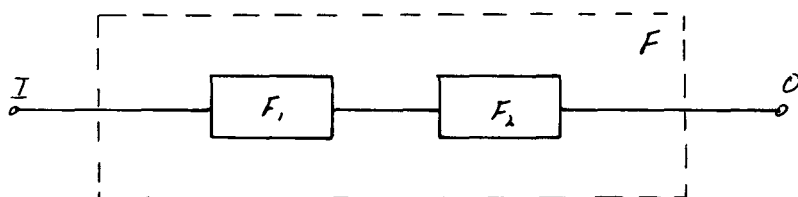


Fig 6.25. Mach $F = F_1 \odot F_2$.

b.5. Berekening van partities met substitutie-eigenschap.

Ten einde gebruik te kunnen maken van de mogelijkheden voor structuuronderzoek met behulp van S.E.-partities zullen deze voor iedere machine op een systematische en efficiënte wijze gevonden moeten worden.

Hierbij staan ons drie methoden ter beschikking, welke nu achtereenvolgens behandeld zullen worden.

1. Voor alle partities op S van H wordt rechtstreeks uit de volgorde-tabel bepaald, of deze voldoen aan de definitie van een S.E.-partitie. Dit behoeft geen nader betoog.

2. Het genereren van S.E.- π 's in „generaties“ met behulp van de substitutie-eigenschap, zoals dat plaats vond bij de m -partities van de H_m -paren.

3. De S.E.- π 's kunnen rechtstreeks uit de lattice der H_m -paren L_n verkregen worden, zoals aldaar betoogd (par. 5.3.3 en 5.6).

Dere methode zal in het bijzonder toegepast kunnen worden, wanneer tevens gezocht wordt, wat in het algemeen het geval zal zijn, naar decompositie en verminderde afhankelijkheid van variabelen, te bereiken met partitie-paren.

Acht 2: In paragraaf 5.6. werd ten aanzien van het genereren der m -partities uitgegaan van de kleinste partitie $\pi_{s,t}$ voor iedere s, t . B.v. $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $\pi_{1,2} = \{1\bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$. Aan de hand daarvan werden de m ($\pi_{s,t}$) bepaald.

Analoog gebeurt dit hier; d. w. z., eerst worden de kleinste S.E.- π 's, welke s en t in één blok verenigen, $\pi_{s,t}^m$ voor iedere s, t , bepaald.

De verzameling van deze partities zal dan de eerste generatie vormen.
Om hogere generaties te berekenen zal gebruik gemaakt worden van:

Stelling 6.5.: Iedere S.E.-partitie π is de som van een subset van de
S.E.-partities $\{ \pi_{s,t}^m \}$, en wel:

$$\underline{\pi = \sum \{ \pi_{s,t}^m \mid s \equiv t(\pi) \}}.$$

bewijs: $\pi_{s,t}^m$ zijn de kleinste S.E.- π 's met s en t in één blok. Worden
S.E.- π 's opgeteld, dan ontstaat weer een S.E.-partitie (Stelling 6.1).
Worden nu alleen die $\pi_{s,t}^m$ opgeteld, waarbij $s \equiv t(\pi)$, dan resulteert
S.E.-partitie π .

Het genereren van de S.E.-partities verloopt dan geheel analoog
aan de fasen 1a en 2a van de generatie van de m -partities uit par. 5.6:

1. Bereken aan de hand van de volgorde tabel: $\pi_{s,t}^m$ voor iedere s, t ;
redundante partities worden verder buiten beschouwing gelaten.
2. Bereken alle mogelijke sommen van partities uit 1, waarbij
weer de redundante partities buiten beschouwing worden gelaten:
tweede generatie; etc.

V.b. Beschouw mach. 4, fig 6.26. Deze machine is dezelfde als
mach. C, fig 6.7, waarvan nu de lattice der S.E.- π 's zal
worden opgesteld. De berekening van alle daar genoemde S.E.- π 's
zal nu nagegaan worden aan de hand van een volledig uitge-
werkte berekening van $\pi_{1,3}^m$:

6.6. Toestandsreductie.

In deze paragraaf zal een volgende toepassing van de substitutie-eigenschap worden behandeld. Met behulp van een bijzondere S.E.-partitie zal namelijk de gereduceerde machine M' , equivalent met een gegeven machine M , gevonden kunnen worden. (zie hoofdstuk 2, paragraaf 2).

Allereerst zal een nieuwe partitie π_R , waarbij R op reductie slaat, gedefinieerd worden. Deze relateert het reduceren van de toestandsvernamming via equivalentie van toestanden aan de substitutie-eigenschap.

Definitie 6.2. π_R is die partitie, waarbij voor ieder paar toestanden s en t in S van M met $s \equiv t (\pi_R)$ geldt: $s \sim t$, waarbij tevens voor ieder paar equivalente toestanden moet gelden: $s \equiv t (\pi_R)$.

Stelling 6.5. : Zij $M = (S, I, O, \delta, \lambda)$ en
 $M_{\pi_R} = (B_{\pi_R}, I, O, \delta(B_{\pi_R}, X), \lambda(B_{\pi_R}, X))$ met

$$\delta(B_{\pi_R}, X) = B_{\pi_R}(\delta(s, X)) \text{ en } \lambda(B_{\pi_R}, X) = \lambda(s, X), s \in B_{\pi_R}.$$

Dan geldt: π_R bezit de substitutie-eigenschap,
 en M_{π_R} is de gereduceerde machine, equivalent met M .

Bewijs: Uit stelling 2.1. volgt met behulp van de definitie van de S.E.-partitie onmiddellijk, dat π_R een S.E.- π is.

Ten aanzien van M_{π_R} geldt, dat de output goed gedefinieerd is, daar de toestanden in B_{π_R} equivalent zijn en dus alle dezelfde output geven (bij gelijke inputs in het Mealy geval).

	0	1	
1	2	3	0
2	1	3	0
3	4	5	0
4	3	2	1
5	1	6	1
6	1	5	1

Fig. 6.26.

Mach. 4.

$\pi_{1,3}^m$: Uit de volgordetabel is af te lezen:

$$d(\overline{1,3}, 0) = \overline{2,4} \text{ en } d(\overline{1,3}, 1) = \overline{3,5},$$

notatie: $\overline{1,3} \rightarrow \overline{2,4}, \overline{3,5}$. Daar toestand 3 nu in meerdere blokken voorkomt ($\overline{1,3}$ en $\overline{3,5}$) moeten deze blokken worden samengevoegd:

$$\overline{1,3} \rightarrow (\overline{2,4}, \overline{3,5}) \rightarrow \overline{2,4,1,3,5}. \text{ Dat wil zeggen:}$$

$\pi_{1,3}^m \geq \{ \overline{1,3,5}; \overline{2,4}; \overline{6} \}$. Er zal nu ook nagegaan moeten worden, in welke blokken $\overline{2,4}$ en $\overline{1,3,5}$ overgaan, etc.:

$$\overline{1,3} \rightarrow (\overline{2,4}, \overline{3,5}) \rightarrow \overline{2,4,1,3,5} \rightarrow (\overline{1,3}, \overline{2,4}, \overline{2,3,5,6}) \rightarrow$$

$$\rightarrow I = \pi_{1,3}^m;$$

De overige $\pi_{s,t}^m$:

$\overline{1,2} \rightarrow \overline{1,2}, \overline{3}$. Daar deze blokken elkaar niet overlappen, en ze in elkaar worden afgebeeld: $\pi_{1,2}^m = \{ \overline{1,2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6} \}$;

$$\overline{1,3} \rightarrow I = \pi_{1,3}^m;$$

$$\overline{1,4} \rightarrow \overline{2,3} \rightarrow (\overline{1,4}, \overline{3,5}) \rightarrow \overline{1,4,2,3,5} \rightarrow (\overline{2,3,5}, \overline{1,4}, \overline{2,3,5}, \overline{3,5,6}) \rightarrow \{ \overline{1,4}; \overline{2,3,5,6} \} = \pi_{1,4}^m;$$

etc.;

$$\overline{2,4} \rightarrow \overline{1,3} \dots \rightarrow I \text{ (gebruik makend van } \pi_{1,3}^m \text{)};$$

etc.

Er resulteren dan de niet-triviale S.E.- π 's:

$$\pi_{1,2}^m = \{ \overline{1,2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6} \},$$

$$\pi_{1,4}^m = \{ \overline{1,4}; \overline{2,3,5,6} \},$$

$$\pi_{3,6}^m = \{ \overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}, \overline{6} \}.$$

Het enige niet-triviale element uit de tweede generatie is dan:

$$\pi_{1,2}^m + \pi_{3,6}^m = \{ \overline{1,2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}, \overline{6} \}.$$

De volgende generatie leveren geen niet-triviale S.E.-partities meer op.

De bijbehorende lattice komt dan overeen met fig. 6.8.

Volgens het bewijs van Stelling 2.2. is M_{π_R} dan de gereduceerde machine, equivalent met M . q.e.d.

De partitie π_R speelt dus een belangrijke rol bij het reduceren van een machine; nu zal worden aangetoond, dat deze π_R op eenvoudige wijze aan de hand van de lattice der s.e.- π 's, L_{SE} , te bepalen is.

Bij equivalentie is de output een belangrijke factor; gedefinieerd wordt dan ook:

Definitie 6.3. Een partitie π op S van M is „output consistent”,

notatie: o.c., dan en dan alleen als:

$$\forall s, t \in S [s \equiv t(\pi) \Rightarrow \lambda(s) = \lambda(t) \text{ of } \forall x \in I : \delta(s, x) = \delta(t, x)],$$

m.a.w. de toestanden in eenzelfde blok geven dezelfde output.

Stelling 6.6. : Een s.e.-partitie π op S van M is o.c. dan en dan alleen als:

$$\forall s, t \in S [s \equiv t(\pi) \Rightarrow s \sim t].$$

Bewijs: Volgens definitie 2.2: $s \sim t \Rightarrow \lambda(s) = \lambda(t)$.

Hiervan volgt, als $\forall s, t \in S$ met $s \equiv t(\pi)$ geldt $s \sim t$: $\lambda(s) = \lambda(t)$,

m.a.w. $\pi = \text{o.c.}$

Andersom: Zij gegeven, dat voor ieder paar toestanden $s, t \in S$ met $s \equiv t(\pi)$ geldt, dat $\lambda(s) = \lambda(t)$.

Dan: π bezit s.e. $\Rightarrow \forall x \in I [s \equiv t(\pi) \Rightarrow \bar{\sigma}(s, \bar{x}) \equiv \bar{\sigma}(t, \bar{x})(\pi)]$.

Daar π o.c. is volgt dan weer: $\bar{\lambda}(s, \bar{x}) = \bar{\lambda}(t, \bar{x})$. Dit betekent:

s en t zijn equivalent.

q.e.d.

Stelling 6.7. π_R is de maximale o.c. partitie met S.E. op S van M .
 Omgekeerd is S.E.-partitie π o.c. dan en dan alleen als
 $\pi \leq \pi_R$.

Bewijs: $\pi \leq \pi_R \Rightarrow [s \equiv t(\pi) \Rightarrow s \equiv t(\pi_R) \Rightarrow \lambda(s) = \lambda(t)]$.

Dus is π o.c.

Voorts: Stel π heeft S.E. en is o.c., dan: $s \equiv t(\pi) \Rightarrow s \sim t \Rightarrow s \equiv t(\pi_R)$.

Dus $\pi \leq \pi_R$.

q.e.d.

Duidelijk is, dat het detecteren van output consistente partities uit de volgorde tabel een eenvoudige zaak is. Dat ook het vinden van de maximale output consistente S.E.-partitie π_R eenvoudig is, blijkt uit de volgende stelling:

Stelling 6.8. De o.c. S.E.- π 's vormen een sublattice van de lattice der S.E.- π 's, L_{SE} , met π_R als grootste element.

Bewijs: De som en het product van partities $\leq \pi_R$ zijn ook $\leq \pi_R$.

q.e.d.

Wanneer L_{SE} dus bepaald is, kan π_R op eenvoudige wijze bepaald worden.

Vb.: Beschouw mach. H, fig 6.27.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	2	1	5	0	3	1
2	1	2	6	7	4	1
3	4	3	6	6	1	0
4	3	4	5	5	2	0
5	5	6	3	4	7	0
6	6	5	4	3	0	0
7	7	0	4	2	3	1
0	0	7	3	1	6	1

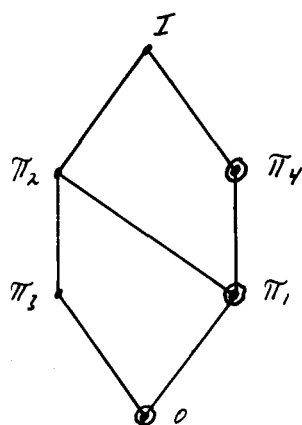


Fig 6.20.

LSE v. mach H.

Fig 6.27. Mach H.

S.E.-partities bij deze machine zijn:

$$\pi_1 = \{ \overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5,6}; \overline{7,0} \},$$

$$\pi_2 = \{ \overline{1,2,3,4}; \overline{5,6,7,0} \},$$

$$\pi_3 = \{ \overline{1,4}; \overline{2,3}; \overline{5,0}; \overline{6,7} \},$$

$$\pi_4 = \{ \overline{1,2,7,0}; \overline{3,4,5,6} \},$$

$$0,$$

$$I.$$

De lattice hiervan wordt gegeven in fig 6.20.

In deze figuur zijn tevens aangegeven de o.c.-s.e.- π 's, nl. 0, π_1 , en π_4 .

Merkt op, dat deze partities inderdaad een sublattice vormen.

π_4 is nu dus de grootste o.c.-s.e.-partitie, m.a.w.: $\pi_R = \pi_4$.

De gereduceerde machine $H_{\pi_R} = H_{\pi_4}$ wordt dan beschreven in fig. 6.29, waarmee dit laatste hoofdstuk dan besloten wordt.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
B_1	B_1	B_1	B_2	B_1	B_2	1
B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_1	0

$$\pi_1 = \pi_4 = \{B_1, B_2\} =$$

$$\{1, 2, 7, 8; 3, 4, 5, 6\}$$

Fig. 6.29.

De gereduceerde machine van mach. H, fig. 6.27.

Literatuur - overzicht.

1. S.T.H. Achermann, „Inleiding in de methoden der wiskunde“, Technische Hogeschool Eindhoven, 1970.
2. G. Birkhoff, „Lattice theory“, Am. Math. Soc. Colloquium Publication, Vol XXV, 1948.
3. G. Birkhoff en S. MacLane, „A survey of modern algebra“. The Macmillan Co., New York, 1948.
4. J. Hartmanis en L.E. Stearns, „Algebraic structure theory of sequential machines“, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1966.
5. J. Hartmanis, „On the state assignment problem for sequential machines I“. IRE transactions on electronic computers, Vol. EC-10, no. 2, juni 1962, 157-165.
6. J. Hartmanis en L.E. Stearns, „Pair algebra and their application to automata theory“. Information and Control, Vol. 7, no. 4, Dec 1964, 485-509.
7. J. Hartmanis, „Further results on the structure of sequential machines“. Journal of the association for computing machinery, Vol. 10, no. 1, jan 1963, 70-88.
8. J. Hartmanis, „Symbolic analysis of a decomposition of information processing machines.“ Inf. and Control, Vol. 3, no. 2, juni 1960, 154-170.
9. J. Hartmanis en R.E. Stearns, „Some dangers in state reduction of sequential machines.“ Inf. and Control, vol. 5, no. 3, sept. 1962, 252-260.
10. J. Hartmanis, „Lattice theory of generalized partitions“, Can. J. Math. 11, 97-106, 1959.
11. A. Heibman en H. K. J. Engbers, „Schakeltechniek - sequentiële netwerken“. Technische Hogeschool Eindhoven, 1960.
12. Z. Kohavi, „Secondary state assignment for sequential machines“. IEEE Transactions on electronic computers, Vol. EC-13, no. 3, juni 1964, 193-203.

12. G. H. Mealy, "A method for synthesizing sequential circuits".
Bell Systems Technical Journal, Vol 34, No. 5, Sept 1955, 1045-1079.
13. E. J. Smith en A. J. Eker, "Voorrachten over speciale onderwerpen
uit de theoretische schakeltechniek". Technische Hogeschool Eindhoven,
1964.
14. R. E. Stearns en J. Hartmanis, "On the state assignment problem for
sequential machines II". IRE transactions on electronic computers, Vol.
EC-10, No. 4, Dec. 1961, 593-603.
15. M. Yoeli, "The cascade decomposition of sequential machines".
IRE trans. on el. comp., Vol. EC 10, No. 4, Dec. 1961, 587-592.
16. M. Yoeli, "Cascade-parallel decompositions of sequential ma-
chines". IRE trans. on el. comp., Vol EC-12, No. 3, juni 1963, 322-324.