

MASTER

Uitgesmeerde scheuren bij brossen materialen

Kemper, T.H.F.

Award date:
1992

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Uitgesmeerde scheuren bij brossen materialen

Auteur: Tom Kemper

Rapportnr.: WFW 92.024

Eindhoven, maart 1992

Afstudeerverslag

Einddocent: Prof. dr. ir. J.D. Jansen
Begeleiders: Dr. Ir. W.A.M. Brekelmans
Dr. M.C.R.B. Peters
Ir. H. de Vree

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Werktuigbouwkunde
Studierichting Werktuigkundige Medische Technologie

Samenvatting

Dit verslag behandelt scheurgedrag bij brosse materialen. Het is de bedoeling om een indruk te krijgen van scheurpatronen en maximale belastbaarheid van porseleinen vullingen (inlays), in tanden. De methode, die daarbij wordt toegepast, is de eindige elementenmethode. Het gebruikte eindige elementenprogramma is DIANA. Aan de achterliggende theorie, volgens welke DIANA werkt, is in eerste instantie aandacht gegeven.

We beschouwen het scheurconcept. Het gekozen scheurconcept gaat uit van uitgesmeerde gefixeerde scheuren. Om scheuren te beschrijven wordt gebruik gemaakt van bepaalde materiaaleigenschappen. Deze grootheden zijn de treksterkte, de 'energy release rate' en de localisatiebeedte. De vorm van het spanning-rekdiagram is ook van belang.

Om de niet-lineaire vergelijkingen, die uit dit concept komen, op te lossen wordt, indien nodig, de 'arc-length'-methode van Riks toegepast. Deze methode past zelf de grootte van de belastingincrementen aan. Het voordeel van deze methode is, dat zowel begrenzungen in belasting als in verplaatsing gepasseerd kunnen worden.

In het proefschrift van Rots wordt een experiment met bijbehorende EEM-analyse vermeldt met betrekking tot een betonnen balk met een sleuf, die op buiging wordt belast totdat hij breekt. Deze analyse wordt herhaald. Met de hierbij opgedane ervaring wordt hetzelfde concept toegepast op porseleinen inlays.

De resultaten van de analyse bij de inlays geven vertrouwen in de methodiek. De plaats van een totale breuk komt overeen met de waarnemingen uit de praktijk. De groei van de scheur blijkt al een aanvang te nemen bij 50% van de belasting nodig voor volledige breuk. De ontwikkeling van de scheurpatronen kan met behulp van de analyse stapsgewijs gevolgd worden.

Symbolenlijst

$\underline{\epsilon}, e$	rekkolom
$\underline{\sigma}$	spanningskolom
\underline{a}	verplaatsingskolom
\underline{q}	externe belastingskolom
\underline{p}	interne belastingskolom
\mathbf{C}	compliantiematrix
\mathbf{D}, \mathbf{K}	stijfheidsmatrix
\mathbf{N}	transformatiematrix
ϵ	rek
σ, t	spanning
γ	afschuiving
E	elasticiteitsmodulus
ν	dwarscontractiecoëfficiënt
G	glijdingsmodulus
f_t	treksterkte
G_f	'energy release rate'
w_c	localisatiebreedte
μ	reductiefactor voor normaalspanning
β	'shear retention factor'
h	elementbreedte
K_{Ic}	spanningsintensiteitsfactor
$\Delta \lambda$	vermenigvuldigingsfactor

Indices:

11,22,33	evenwijdig aan de basisvectoren
12,23,31	afschuifcomponenten
nn,n	normaal op de scheurrichting
ss,tt	evenwijdig aan de scheurrichting
nt,ts,sn	afschuifcomponenten
co	ongescheurd materiaal
cr	gescheurd materiaal
crco	gemengd materiaalmodel
I,II,III	respectievelijk Mode I, II en III
u	volledige scheur
i	iteratienummer

Inhoudsopgave

Samenvatting	61
Symbolenlijst	3
Inhoudsopgave	4
1. Inleiding	5
1.1 Probleemstelling	5
1.2 Aanpak	5
1.3 Aansturing in DIANA	6
2. Uitgesmeerde scheuren	7
2.1 Lineaire theorie	7
2.2 Scheurconcept	9
2.3 Globaal gedrag van een scheur	10
2.4 Beschrijving in de elementenmethode	15
2.5 Het constitutieve model matrix voor scheuren	18
2.6 Verband tussen de twee modellen	21
2.7 Elementgrootte	24
2.8 Vertaling naar andere grootheden	26
3. 'arc length' methode van Riks	27
4. Indirecte 'Mode I'-belasting bij beton	30
4.1 Doelstelling	30
4.2 Mesh en materiaaleigenschappen	30
4.3 Resultaten	32
5. Toepassing op porseleinen inlays	34
5.1 Inleiding	34
5.2 Materiaaleigenschappen	36
5.3 Elementenmesh	38
5.4 Belasting	40
5.5 Resultaten	41
5.6 Confrontatie met kauwkrachten	51
6. Conclusies en aanbevelingen	52
Literatuurlijst	54
Nawoord	55
Bijlage	56

1. Inleiding

1.1 Probleemstelling

Het proefschrift van J.G. Rots^{Rots88} behandelt de numerieke modellering van breuk in beton. Hierbij wordt aandacht besteed aan scheurconcepten, constitutieve relaties en discretisatietechnieken.

Hier zal nader ingaan worden op het concept van uitgesmeerde gefixeerde scheuren en het verschijnsel van 'softening'. Dit model zal worden bekeken voor zuivere trek (Mode I belasting).

Om tot een benadering te komen van de kracht-verplaatsingsrelatie kan de 'arc length' methode van Riks^{Riks79} worden toegepast. Het grote voordeel van deze methode is, dat niet enkel monotoon stijgende functies doorlopen kunnen worden, maar dat ook grenswaarden in belasting en verplaatsing verwerkt kunnen worden.

Het doel van deze rapportage is tweeledig. Enerzijds worden enige aspecten van het uitgesmeerde scheuren concept en van de 'arc length' methode van Riks nader belicht. Anderzijds wordt nagegaan of het concept wellicht ook op porselein van toepassing kan zijn. Als dit zo is kunnen simulaties op porseleinen inlays waarschijnlijk zinvol worden uitgevoerd.

1.2 Aanpak

Eerst wordt een simulatie uit bovengenoemd proefschrift gereproduceerd. Het betreft de driepuntsbuigproef van een betonnen balk. In het midden van de balk bevindt zich een sleuf. Door middel van deze simulatie wordt ervaring opgedaan met het EEM-programma DIANA.

Daarnaast wordt een literatuuronderzoek uitgevoerd naar de theoretische achtergrond van scheurvorming, zoals dat geïmplementeerd is in DIANA.

Vervolgens wordt de methodiek toegepast op porseleinen vullingen (inlays) voor kiezen. Een geïdealiseerde kies met een inlay wordt een voorgeschreven verplaatsing opgelegd. Door het proces incrementeel te laten verlopen, kan de scheurinitiatie en -propagatie worden gevolgd.

1.3 Aansturing in DIANA

Om scheurvorming in DIANA op te nemen moeten verschillende aanvullingen aangebracht worden ten opzichte van de lineair elastische procedure. Binnen DIANA zijn er diverse opties rondom materiaalgedrag en oplossingsmethoden. Hier wordt alleen ingegaan op die opties die in het proefschrift van Rots^{Rots88} aan de orde zijn gekomen. Dit is de theorie met betrekking tot de 'softening'.

Om te beginnen moeten karakteristieken van het breukgedrag worden ingevoerd. Dit breukgedrag wordt binnen DIANA met verschillende soorten parameters beschreven. De beschrijving in DIANA komt voort uit de civiele techniek. Rots maakt voor deze probleemstelling gebruik van exponentieel niet-lineair gedrag volgens Hordijk, Cornelissen en Reinhardt^{Rein84}, ter beschrijving van beton. Bij de overgang op porselein is het derhalve noodzakelijk om voorzichtig te zijn.

Om het niet lineaire probleem op te lossen heeft Rots de 'arc length' methode van Riks gekozen. Deze methode bepaalt zelf de incrementgrootte van elk increment.

De verschillende data- en commandofiles voor DIANA zijn in de bijlage opgenomen.

2. Uitgesmeerde scheuren

2.1 Lineaire theorie

In de lineaire theorie wordt gebruik gemaakt van de wet van Hooke. Deze wet geeft de relatie tussen spanning en rek. Dit gebeurt met een lineair verband, dat wil zeggen dat bij een trekproef de kracht evenredig is met de verplaatsing. Om dit gedrag te beschrijven wordt gebruik gemaakt van de elasticiteitsmodulus en de dwarscontractiecoëfficiënt.

Bij een homogeen materiaal geldt ook nog dat de eigenschappen op alle plaatsen hetzelfde zijn. Een dergelijk materiaal heet homogeen isotroop als ook de verbanden in alle richtingen gelijk zijn.

De wet van Hooke wordt genoteerd in componentvorm ten opzichte van een orthonormale basis.

$$2.1 \quad \underline{\varepsilon} = C \underline{\sigma}$$

$$\text{met } \underline{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T \text{ en } \underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31}]^T$$

Hierin is $\underline{\sigma}$ de spanningskolom, $\underline{\varepsilon}$ de rekkolom en C de compliantiematrix.

Bij isotropie geldt dat de materiaaleigenschappen in alle richtingen hetzelfde zijn. De compliantiematrix ziet er dan als volgt uit:

$$2.2 \quad C = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Hierin is E de elasticiteitsmodulus en ν de dwarscontractiecoëfficiënt.

In deze studie worden 2-dimensionale problemen beschouwd. Het is dan ook zinvol om van de hierboven gebruikte 3-dimensionale beschrijving over te stappen op de 2-dimensionale. Dit houdt echter in dat daarmee de dimensies van kolommen en matrices veranderen. Bij de overgang kan men kijken naar vlakspanning of vlakvervorming.

Voor vlakspanning geldt de relatie:

$$2.3 \quad \sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$$

Dit leidt tot:

$$2.4 \quad \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

De rek in \vec{e}_3 -richting is:

$$2.5 \quad \epsilon_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

Bij vlakvervorming geldt de relatie:

$$2.6 \quad \epsilon_{33} = \gamma_{32} = \gamma_{31} = 0$$

De lineaire relatie wordt nu:

$$2.7 \quad \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0 \\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Voor de normaalspanning loodrecht op het vlak met normaal in \vec{e}_3 -richting:

$$2.8 \quad \sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Voor de balk, die in hoofdstuk 4 aan de orde komt, wordt gekozen voor de vlakspanningsanalyse. Voor de tand in hoofdstuk 5 daarentegen wordt de vlakvervormingsanalyse toegepast om redenen die nog aan de orde zullen komen.

2.2 Scheurconcept

De lineaire theorie geldt natuurlijk slechts tot op bepaalde hoogte. Als het materiaal te ver wordt opgerekend breekt het.

De scheuren zijn in het materiaal duidelijk herkenbaar. Bij nauwkeurig bestudering van scheuren in brosse materialen blijkt echter dat er rond de scheuren een zone aanwezig is met microscheuren. De scheur is dus verdeeld over deze zogenaamde localisatiebreedte. De macroscheur ontstaat door het aaneengroeien van microscheuren.

Er zijn verschillende concepten voor het beschrijven van het scheurgedrag van materiaal. Een eerste onderscheid wordt gemaakt tussen modellen met discrete en uitgesmeerde scheurvoortplanting.

In de discrete breukmechanica wordt gewerkt met de macroscheuren. Deze scheuren zijn zo groot, dat ter plekke de interne samenhang van het materiaal wegvalt. Discrete scheuren worden bij de EEM-analyse gemodelleerd als de verplaatsing tussen twee oorspronkelijk samenvallende knooppunten. Een direct nadeel is dat de scheur loopt volgens een voorgeschreven pad, namelijk dat van de elementgrenzen.

Het model voor uitgesmeerde scheuren gaat er van uit dat bij de uitgesmeerde scheur de spanning loodrecht op het breukoppervlak niet meteen wegvalt maar geleidelijk daalt. Deze scheur is dus over een gebied uitgesmeerd dat in meer

of mindere mate kapot is. Bij het uitgesmeerde concept worden de scheuren beschreven in de elementen. Een scheur ontstaat door het aanpassen van de compliantiematrix op elementniveau. De scheuren kunnen worden beschreven als:

- gefixeerd: Hierbij behoudt de scheur zijn richting als hij eenmaal is geïnitieerd.
- multidirectioneel: Hierbij kunnen meerdere scheuren met verschillende richtingen in een punt optreden.
- roterend : Hierbij kan de richting van de scheur gedurende het proces veranderen.

In dit onderzoek is gekozen voor de gefixeerde variant. Deze variant dient namelijk als basis voor de twee anderen. Bij de multidirectionele variant wordt de gedecomposeerde scheurrek nog eens sub-gedecomposeerd voor de verschillende scheurrichtingen. Terwijl bij het roterende concept de scheurrichting steeds loodrecht op de maximale hoofdspanning blijft staan.

2.3 Globaal gedrag van een scheur

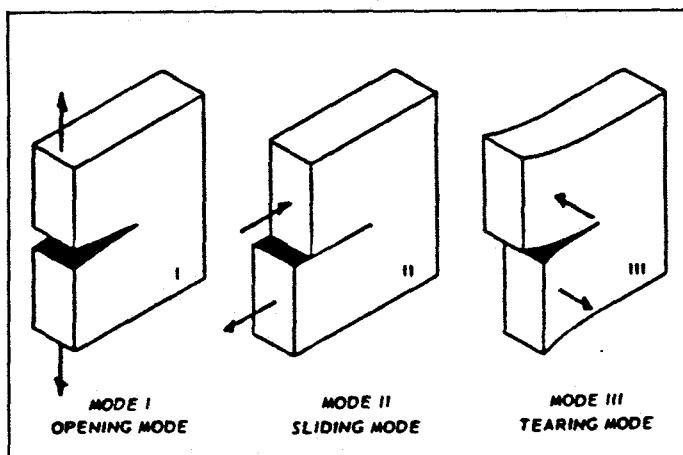


fig. 2.1

Belastingsituaties worden verdeeld in verschillende 'modes' (fig. 2.1). Voor tweedimensionale situaties zijn alleen 'Mode I' en 'II', dus zuivere trek en afschuiving, van belang.

Het scheuren begint met het ontstaan van microscheuren.

Deze scheuren groeien door tot de constructie gebroken is. De plaats van het

ontstaan van de scheuren is afhankelijk van lokale spanningstoestanden in het materiaal. Op het moment dat de scheur wordt geïnitieerd is de lineaire elasticiteitstheorie ter plekke niet meer van toepassing. Er wordt dan overgestapt op een ander constitutief verband. In dit nieuwe verband zal er rekening mee moeten worden gehouden dat de scheur in bepaalde richtingen minder of geen spanningen meer kan door leiden.

De scheur fungeert lokaal als symmetrievlak in het materiaal voor de constitutieve beschrijving. Het verband tussen rek en spanning is in alle richtingen parallel aan dit vlak gelijk. Dit komt overeen met transversaal isotroop materiaalgedrag.

Bij het ontstaan van een scheur ontstaat een breukvlak. Dit breukvlak dient als ondersteuning voor een nieuwe lokale orthogonale basis $(\vec{e}_n, \vec{e}_s, \vec{e}_t)$ (fig. 2.2). Ten opzicht van dit breukvlak zijn de materiaaleigenschappen symmetrisch. In de

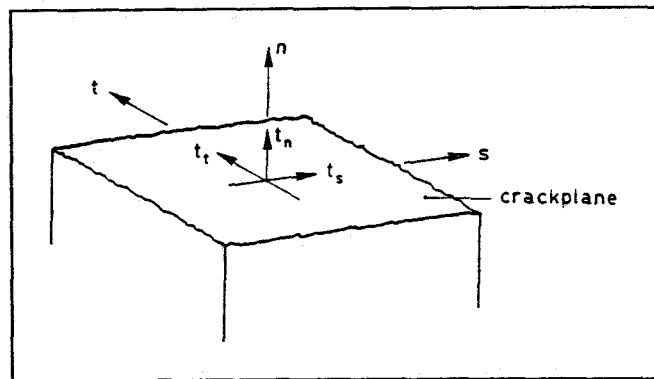


fig. 2.2

scheurtip doet zich een bijzondere situatie voor. Traditioneel worden de vlakken die loodrecht op het breukvlak staan ook gezien als symmetrievlakken voor de materiaaleigenschappen. De richtingen \vec{e}_t en \vec{e}_s staan voor de Mode II en III belastingrichtingen. Deze richtingen vormen elk in combinatie met \vec{e}_n de twee symmetrievlakken voor de materiaaleigenschappen. Daarmee is het gedrag van het materiaal orthotroop. Hier werken we echter met transversaal-isotroop materiaal, omdat de scheurtip niet het onderwerp van studie is. Daarbij komt dat bij de uiteindelijke beschrijving in de twee-dimensionale situatie het verschil

grotendeels wegvalt. De compliantiematrix voor transversaal-isotropoos materiaal is:

$$2.9 \quad C = \begin{bmatrix} E_L^{-1} & -\nu_{LT}E_T^{-1} & -\nu_{LT}E_T^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{TL}E_L^{-1} & E_T^{-1} & -\nu_{TT}E_T^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{TL}E_L^{-1} & -\nu_{TT}E_T^{-1} & E_T^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_L^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_L^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{met } \nu_{LT}E_T = \nu_{TL}E_L \text{ en } G_T = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TT})}$$

Substitueren we voor E_T , E_L , ν_{TT} , ν_{LT} , G_T en G_L respectievelijk E , E_{nn} , ν , ν_{nt} , G en G_{nt} , dan wordt de compliantiematrix:

$$2.10 \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{ts} \\ \gamma_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn}^{-1} & -\nu_{nt}E^{-1} & -\nu_{nt}E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{nt}E^{-1} & E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{nt}E^{-1} & -\nu E^{-1} & E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{nt}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{nt}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{nt} \\ \sigma_{ts} \\ \sigma_{sn} \end{bmatrix}$$

Voor de 2-dimensionale situaties valt de derde dimensie, de \vec{e}_s -richting weg. De situatie aan het breukvlak ziet er nu zo uit dat de relatie van de matrix ten

opzichte van de basis (\vec{e}_n, \vec{e}_t) voor vlakspanning geschreven kan worden als:

$$2.11 \quad \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_u \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn}^{-1} & -\nu_{nt}E^{-1} & 0 \\ -\nu_{nt}E^{-1} & E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_u \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix}$$

Voor de rek loodrecht op het vlak volgt uit $\sigma_{ss} = 0$:

$$2.12 \quad \epsilon_{ss} = -\frac{E_{nn}}{E - \nu_{nt}^2 E_{nn}} \left(\nu_{nt}(1+\nu) \epsilon_{nn} + \left(\nu_{nt}^2 + \nu \frac{E}{E_{nn}} \right) \epsilon_u \right)$$

Voor vlakvervorming volgt:

$$2.13 \quad \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_u \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn}^{-1} - \nu_{nt}^2 E^{-1} & -\nu_{nt}(1+\nu)E^{-1} & 0 \\ -\nu_{nt}(1+\nu)E^{-1} & (1-\nu^2)E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_u \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix}$$

De spanning loodrecht op het vlak volgt uit $\epsilon_{ss} = 0$:

$$2.14 \quad \sigma_{ss} = \nu_{nt} \sigma_{nn} + \nu \sigma_u$$

Als de belasting de treksterkte bereikt, wordt de scheur gemodelleerd door lokaal over te gaan op de transversaal-isotrope compliantiematrix. Dit gebeurt ergens midden in het belastingproces. Het optreden van een scheur resulteert in een aanpassing van de stijfheidsmatrix. Het is daarom noodzakelijk om het gehele proces in incrementen te verdelen.

In de incrementele opzet luiden de isotrope en transversaal-isotrope relaties voor vlakspanning en vlakvervorming:

Isotrope vlakspanning:

$$2.15 \quad \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{11} \\ \Delta \epsilon_{22} \\ \Delta \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 \\ -\nu E^{-1} & E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Isotrope vlakvervorming:

$$2.16 \quad \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{11} \\ \Delta \epsilon_{22} \\ \Delta \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\nu^2)E^{-1} & -\nu(1+\nu)E^{-1} & 0 \\ -\nu(1+\nu)E^{-1} & (1-\nu^2)E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Transversaal-isotrope vlakspanning:

$$2.17 \quad \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{nn} \\ \Delta \epsilon_u \\ \Delta \gamma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn}^{-1} & -\nu_{nt} E^{-1} & 0 \\ -\nu_{nt} E^{-1} & E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{nn} \\ \Delta \sigma_u \\ \Delta \sigma_{nt} \end{bmatrix}$$

Transversaal-isotrope vlakvervorming:

$$2.18 \quad \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{nn} \\ \Delta \epsilon_u \\ \Delta \gamma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn}^{-1} - \nu_{nt}^2 E^{-1} & -\nu_{nt}(1+\nu)E^{-1} & 0 \\ -\nu_{nt}(1+\nu)E^{-1} & (1-\nu^2)E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{nn} \\ \Delta \sigma_u \\ \Delta \sigma_{nt} \end{bmatrix}$$

In de eerste opzet, bij eerdere publicaties, om breukgedrag te beschrijven vielen E_{nn} en G_{nt} direct terug op nul. Bij het toepassen van dit model ontstonden echter numerieke problemen ten gevolge van het plotselinge wegvallen van de

spanningen. Deze numerieke problemen konden worden opgelost door invoering van de 'shear retention factor', β , en de 'reduction factor for Mode I Stiffness', μ , waardoor een geleidelijke overgang gerealiseerd wordt. Beide reductiefactoren lopen tijdens het proces van 1 naar 0. Als μ en β gelijk zijn aan 1 hebben we te maken met ongescheurd materiaal. Het materiaal is volledig gescheurd als μ en β gelijk zijn aan 0. De dwarscontractiecoëfficiënt blijft ongewijzigd. In twee-dimensionale vorm wordt dit bij vlakspanning:

$$2.19 \quad \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{nn} \\ \Delta \epsilon_u \\ \Delta \gamma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{nn} \\ \Delta \sigma_u \\ \Delta \sigma_{nt} \end{bmatrix}$$

Bij vlakvervorming krijgt men het volgende:

$$2.20 \quad \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{nn} \\ \Delta \epsilon_u \\ \Delta \gamma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\mu\nu^2}{\mu E} & -\frac{\nu(1+\nu)}{E} & 0 \\ -\frac{\nu(1+\nu)}{E} & \frac{(1-\nu^2)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{nn} \\ \Delta \sigma_u \\ \Delta \sigma_{nt} \end{bmatrix}$$

Het optreden van een scheur betekent dus het aanpassen van de stijfheidsmatrix. Deze aanpassing vindt plaats op elementniveau en is uitgesmeerd over het materiaal.

2.4 Beschrijving in de elementenmethode

In de elementenmethode wordt omgekeerd aan het voorafgaande gewerkt. Daar worden de spanningen uit de rekken bepaald met behulp van de stijfheidsmatrix. De stijfheidsmatrix is de inverse van de compliantie matrix.

Voor het model wordt ervan uitgegaan dat de scheur en de het ongescheurde materiaal een serieschakeling vormen. Om een beter inzicht te krijgen in de verhouding tussen de rek van het ongescheurde materiaal, ϵ^{co} , en de rek die wordt opgenomen door de scheur, ϵ^{cr} , wordt decompositie van de rek toegepast:

$$2.21 \quad \underline{\Delta \epsilon} = \underline{\Delta \epsilon}^{cr} + \underline{\Delta \epsilon}^{co}$$

Voor het ongescheurde materiaal geldt de relatie:

$$2.22 \quad \underline{\Delta \sigma} = \underline{D}^{co} \underline{\Delta \epsilon}^{co}$$

$$\underline{\Delta \sigma} = [\Delta \sigma_{11} \quad \Delta \sigma_{22} \quad \Delta \sigma_{12}]^T$$

met $\underline{\Delta \epsilon}^{co} = [\Delta \epsilon_{11}^{co} \quad \Delta \epsilon_{22}^{co} \quad \Delta \gamma_{12}^{co}]^T$

\underline{D}^{co} = isotrope stijfheidsmatrix

De scheur wordt gemodelleerd met een matrix \underline{D}^{cr} :

$$2.23 \quad \underline{\Delta t} = \underline{D}^{cr} \underline{\Delta e}^{cr}$$

$$\underline{\Delta t} = [\Delta t_n \quad \Delta t_t]^T$$

met $\underline{\Delta e}^{cr} = [\Delta \epsilon_{nn}^{cr} \quad \Delta \gamma_{nt}^{cr}]^T$

\underline{D}^{cr} = stijfheidsmatrix voor de scheur

De twee matrices \underline{D}^{co} en \underline{D}^{cr} zijn beschreven ten opzichte van verschillende bases. Om tot een globale uitdrukking te komen moeten de bases omgezet worden. Dit wordt gedaan met de transformatiematrix \underline{N} . Deze geeft de transformatie weer van de lokale rek, $\underline{\Delta e}^{cr}$, en spanning, $\underline{\Delta t}$, naar de globale rek, $\underline{\Delta \epsilon}^{cr}$, respectievelijk spanning, $\underline{\Delta \sigma}$.

$$2.24 \quad \underline{\Delta \epsilon}^{cr} = \underline{N} \underline{\Delta e}^{cr}$$

$$2.25 \quad \underline{\Delta \sigma} = \underline{N} \underline{\Delta t}$$

Om tot een globale uitdrukking te komen substitueren we (2.24) in (2.21) en vervolgens (2.21) in (2.22). Dit geeft:

$$2.26 \quad \underline{\Delta\sigma} = D^{co} [\underline{\Delta\epsilon} - N \underline{\Delta\epsilon}^{cr}]$$

(2.26) voorvermenigvuldigen met N^T en (2.25) substitueren in het linkerlid, gevolgd door een substitutie van (2.23) geeft de relatie tussen de lokale scheurrek en de globale rek:

$$2.27 \quad \underline{\Delta\epsilon}^{cr} = [D^{cr} + N^T D^{co} N]^{-1} N^T D^{co} \underline{\Delta\epsilon}$$

Uiteindelijk leidt substitutie van (2.27) in (2.26) tot de volgende globale uitdrukking:

$$2.28 \quad \underline{\Delta\sigma} = D^{coco} \underline{\Delta\epsilon}$$

$$\text{met } D^{coco} = [D^{co} - D^{co} N [D^{cr} + N^T D^{co} N]^{-1} N^T D^{co}]$$

De isotrope stijfheidsmatrix, D^{co} is de inverse compliantiematrix. Deze is af te leiden uit (2.15) voor vlakspanning:

$$2.29 \quad D^{co} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}$$

en voor vlakvervorming uit (2.16).

$$2.30 \quad D^{co} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

De matrix D^{cr} , ter beschrijving van het scheurgedrag wordt behandeld in de volgende paragraaf.

De transformatiematrix N wordt opgebouwd uit de beschrijving van het lokale stelsel met scheuren in globale componenten ten opzocht van de basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$2.31 \quad \underline{e}_n = [l_n m_n n_n]^T, \underline{e}_t = [l_t m_t n_t]^T, \underline{e}_s = [l_s m_s n_s]^T$$

Voor N volgt:

$$2.32 \quad N = \begin{bmatrix} l_n^2 & l_t^2 & l_s^2 \\ m_n^2 & m_t^2 & m_s^2 \\ n_n^2 & n_t^2 & n_s^2 \\ 2l_n m_n & 2l_t m_t & 2l_s m_s \\ 2l_n n_n & 2l_t n_t & 2l_s n_s \\ 2m_n n_n & 2m_t n_t & 2m_s n_s \\ 2l_n m_n & l_t m_n + l_n m_t & l_s m_n + l_n m_s \\ 2m_n n_n & m_t n_n + m_n n_t & m_s n_n + m_n n_s \\ 2n_n l_n & n_t l_n + n_n l_t & n_s l_n + n_n l_s \end{bmatrix}$$

Voor de twee-dimensionale situatie vallen de derde kolom en derde, vijfde en zesde regel van de matrix weg.

$$2.33 \quad N = \begin{bmatrix} l_n^2 & l_t^2 \\ m_n^2 & m_t^2 \\ 2l_n m_n & l_t m_n + l_n m_t \end{bmatrix}$$

Hiermee is het scheurgedrag beschreven in de elementenmethode. Het grote voordeel van deze beschrijfwijze is dat de scheurrichting eenvoudig kan worden ingevoerd. De opgestelde globale matrix voldoet aan transversaal-isotropie. Dit wordt in paragraaf 2.6 aangetoond.

2.5 Het constitutieve model matrix voor scheuren

Beton en porselein zijn twee globaal brose materialen. Deze materialen breken bij een bepaalde spanning zonder dat er plastische vervorming (uitgezonderd scheurvorming) heeft plaatsgevonden.

Zolang het materiaal niet te zwaar belast wordt is het isotroop en lineair-elastisch. Bij het optreden van een scheur in de twee-dimensionale beschouwing wordt de matrix ter plekke van de scheur vervangen. Hierbij wordt voor de scheur de matrix D^{cr} geïmplementeerd.

$$2.34 \quad D^{cr} = \begin{bmatrix} D^I & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix}$$

Hierin zijn D^I en D^{II} respectievelijk de stijfheidsmoduli voor Mode I en II. De termen die niet op de diagonaal voorkomen worden verwaarloosd. Het voordeel is dat het model hierdoor eenvoudig blijft. Hoewel er geen directe koppeling tussen normaal- en afschuifcomponenten aanwezig is, kan dit indirect bereikt worden door de diagonale termen afhankelijk te stellen van spanningen en rekken.

We gaan uit van een eenvoudig model voor het beschrijven van materiaalgedrag voor de scheur. Dit gedrag wordt beschreven met twee moduli. Bij elk van deze moduli zijn bepaalde materiaalgrootheden van belang.

De eerste modulus D^I beschrijft het gedrag loodrecht op de scheur. Zoals gezegd zal bij het ontstaan van de scheurzone de spanning niet direct tot nul terugvallen. De scheur zal optreden bij het bereiken van een bepaalde spanning, de treksterkte. Bij het ontstaan van een scheur wordt een nieuw oppervlak gevormd. De energie die hiervoor nodig is, is de 'energy release rate'. Naarmate de rek groter wordt en het aantal microscheuren toeneemt daalt de spanning over de rek.

Voor mode I zijn een aantal parameters van belang:

f_t	Treksterkte	$[N/m^2]$
G_f	'Energy release rate'	$[N/m]$
w_c	Localisatiebreedte	$[m]$

Voor een beschrijving van het 'softening'-gedrag van materialen zijn er een aantal mogelijkheden (fig. 2.3).

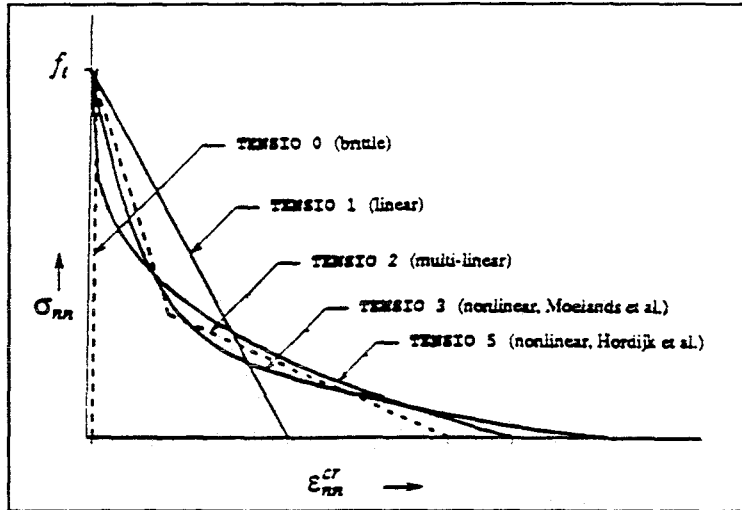


fig. 2.3

De energie per oppervlakteëenheid van de scheur, die bij het initiëren van de scheuren gedissipeerd wordt, is de

'energy release rate'. Deze energie wordt gerepresenteerd door het oppervlak onder de 'softening' functie. Voor uitgesmeerde scheuren is de scheur verdeelt over een localisatiebreedte w_c .

2.35

$$G_f = w_c \int_0^{\epsilon_u^{cr}} t_n d\epsilon_{nn}^{cr}$$

De scheur is verdeelt over de localisatiebreedte. Uit onderzoeken^{Baža89} aan beton is bekend dat voor de localisatiebreedte ongeveer drie maal de korrelgrootte genomen kan worden.

De spanningsvrije rek, ϵ_u^{cr} , is de rek bij een volledige scheur. Het is een materiaalgrootheid. Voor het bepalen van ϵ_u^{cr} zijn de treksterkte, de 'energy release rate', de localisatiebreedte, en de vorm van het softening diagram van belang^{Baža83}.

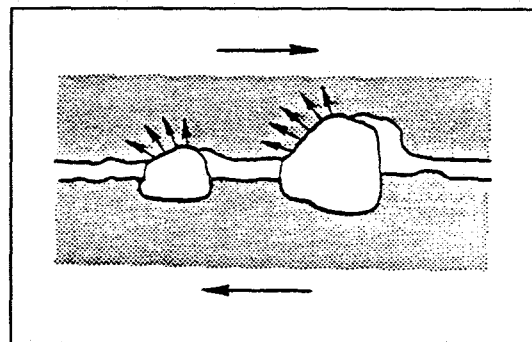


fig. 2.4

De tweede modulus D^{II} beschrijft het afschuivingsgedrag over de scheur. Een scheur loopt langs de korrels van het

brosse materiaal. Dit verloop is grillig. Dit betekent dus dat er nog steeds een schuifweerstand kan zijn ook al zijn er scheuren opgetreden (fig. 2.4). De vermindering van de schuifweerstand wordt uitgedrukt met behulp van een reductiefactor voor de oorspronkelijke glijdingsmodulus, de 'shear retention factor'.

De reductiefactor werd in het verleden constant verondersteld. Dit geeft echter problemen omdat de schuifspanning daarmee kan blijven toenemen, waardoor de hoofdspansingen in het gescheurde element gaan roteren.

Beter is het om de afschuifmodulus een dalende functie van de normaal scheurrek te laten zijn. Een veel toegepaste vorm is de machtsfunctie^{Rois88}.

$$2.36 \quad \beta = \left(1 - \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_u^{cr}} \right)^p$$

Dit betekent dus dat aan het begin van de scheur, voor $\epsilon_{nn}^{cr}=0$, de afschuifmodulus gelijk is aan die voor het isotrope materiaal. Naarmate het aantal microscheuren toeneemt daalt de 'shear retention factor' tot nul, bij volledig gescheurd materiaal.

2.6 Verband tussen de twee modellen

In paragraaf 2.4 is een modellering beschreven die het eenvoudig maakt om een scheur in elke gewenste richting te implementeren. De scheurrichting wordt bepaald met de transformatiematrix N . De resulterende matrix dient transversaal isotroop te zijn. Om dit aan te tonen wordt de modellering uitgewerkt voor het geval dat de scheurrichting overeenkomt met de \vec{e}_1 -as van de isotrope matrix D^{co} .

Voor het geval, dat de scheur in de \vec{e}_1 -richting liggen, geldt voor de richtingsvectoren \vec{e}_n en \vec{e}_t :

$$2.37 \quad \underline{e}_n = \begin{bmatrix} l_n \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_t = \begin{bmatrix} l_t \\ m_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

N ziet er dan met (2.33) als volgt uit:

$$2.38 \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Voor vlakspanning worden de vergelijkingen (2.29), (2.38) en (2.34) in (2.28) gesubstitueerd. Dit resulteert in een uitdrukking voor \mathbf{D}^{crco} :

$$2.39 \quad \mathbf{D}^{crco} = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{v} \begin{bmatrix} \frac{D^I}{D^I + \frac{E}{1-\nu^2}} & \mathbf{v} \left(\frac{D^I}{D^I + \frac{E}{1-\nu^2}} \right) & 0 \\ \left(\frac{D^I}{D^I + \frac{E}{1-\nu^2}} \right) & \frac{D^I + E}{D^I + \frac{E}{1-\nu^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{D^{II}}{D^{II} + G} \right) \end{bmatrix}$$

Voor vlakvervorming wordt in plaats van (2.29) de vergelijking (2.30) gesubstitueerd:

$$D^{crco} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$2.40 \quad \left[\begin{array}{ccc} (1-\nu) \left(\frac{D^I}{D^I + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \right) & \nu \left(\frac{D^I}{D^I + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \right) & 0 \\ \nu \left(\frac{D^I}{D^I + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \right) & (1-\nu) \left(\frac{D^I + \frac{E}{(1-\nu^2)}}{D^I + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \left(\frac{D^{II}}{D^{II} + G} \right) \end{array} \right]$$

De beschrijving in paragraaf 2.3 is een globale beschouwing van het materiaal. Deze beschrijving gebruikt de reductiefactoren μ en β . In paragraaf 2.4 wordt een onderscheidt gemaakt tussen het elastische materiaal en de scheur. Het is een serieschakeling van materiaalgedrag. Het globale gedrag moet dus identiek zijn. Dit wordt weergegeven in:

$$2.41 \quad \frac{1}{\mu E} = \frac{1}{E} + \frac{1}{D^I}$$

$$2.42 \quad \frac{1}{\beta G} = \frac{1}{G} + \frac{1}{D^{II}}$$

Hieruit zijn μ en β expliciet op te lossen.

Substitueren we (2.41) en (2.42) in (2.39) respectievelijk (2.40) dan krijgen we:

$$2.43 \quad \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_u \\ \Delta\sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_u \\ \Delta\gamma_{nt} \end{bmatrix}$$

respectievelijk:

$$2.44 \quad \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_u \\ \Delta\sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu(1-\nu)E}{1-\nu-2\mu\nu^2} & \frac{\mu\nu E}{1-\nu-2\mu\nu^2} & 0 \\ \frac{\mu\nu E}{1-\nu-2\mu\nu^2} & \left(\frac{1-\mu\nu^2}{1-\nu^2}\right) \frac{(1-\nu)E}{1-\nu-2\mu\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_u \\ \Delta\gamma_{nt} \end{bmatrix}$$

Geïnverteerd zijn deze vergelijkingen gelijk aan (2.19) respectievelijk (2.20). De beschrijving in de elementenmethode is dus transversaal isotroop.

2.7 Elementgrootte

Nu het materiaal en breukgedrag beschreven is, is het goed om even stil te staan bij het concrete model. Bij het modelleren wordt de constructie opgedeeld in discrete elementen. De grootte van de elementen heeft invloed op het resultaat van de analyse. Op elementniveau wordt de scheur uitgesmeerd over het hele element. Dit betekent dus dat het element ter plekke van de scheurzone nooit groter mag zijn als de localisatiebreedte. Zou dit zo zijn dan zou het element in werkelijkheid ongescheurd materiaal moeten bevatten. Dit is echter niet opgenomen in het model.

Dit uitgangspunt kan echter problemen opleveren. Als de localisatiebreedte klein is dan moet de mesh in teveel elementen verdeelt worden. De reken capaciteit vormt dan het struikelblok.

Noodgedwongen moet het element soms groter zijn als de localisatiebreedte. Dit heeft echter tot gevolg dat de 'energy release rate' te groot is. Deze zal dus gecorrigeerd moeten worden.

We beschouwen hiervoor lineaire 'softening'. De spanning-rekrelatie voor lineaire 'softening' is:

$$2.45 \quad \frac{t_n}{f_t} = 1 - \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_u^{cr}}$$

Deze formule gesubstitueerd in (2.35) levert:

$$2.46 \quad G_f = \frac{1}{2} w_c f_t \epsilon_u^{cr}$$

De localisatiebreedte voor het EEM-model is gelijk aan de breedte van het element, h , omdat de scheur verdeelt is over het element. Derhalve is de energy release rate dus:

$$2.47 \quad G_f = \frac{1}{2} h f_t \epsilon_u^{cr}$$

2.8 Vertaling naar andere grootheden

In onderzoeken wordt niet altijd de 'energy release rate' bepaald. Vaak geeft men de spanningsintensiteitsfactor, K_{Ic} . Deze kunnen echter in elkaar worden omgezet.

Bij vlakspanning geldt voor de spanningsintensiteitsfactor^{Schr90}:

$$2.48 \quad G_f = \frac{1}{E} K_{Ic}^2$$

Bij vlakvervorming wordt de volgende relatie gegeven.

$$2.49 \quad G_f = \frac{1-\nu^2}{E} K_{Ic}^2$$

3. 'arc length' methode van Riks

Om de niet-lineaire vergelijkingen op te lossen wordt een incrementeel iteratieve methode toegepast. Een veel toegepaste methode is die van Newton-Raphson.

Newton-Raphson geeft na elke iteratie een correctie van de verplaatsingen:

$$3.1 \quad \underline{\Delta a}_i = \underline{\Delta a}_{i-1} + \underline{\delta a}_i$$

De correctie $\underline{\delta a}_i$ na elke iteratie volgt uit:

$$3.2 \quad \underline{\delta a}_i = \mathbf{K}_{i-1}^{-1}(\Delta \lambda_i \underline{q} + \underline{p}_{i-1})$$

Hierbij is $\Delta \lambda_i$ de grootte van het belastingincrement, \underline{q} de belastingvector en \underline{p}_{i-1} de totale belastingvector aan het eind van het vorige increment min de vector van de interne krachten aan het eind van de vorige iteratie. \underline{p}_{i-1} is afhankelijk van \underline{a}_{i-1} via de niet-lineaire constitutieve vergelijkingen. De matrix \mathbf{K}_{i-1} is de stijfheidsmatrix.

Deze methode ondervindt problemen bij limieten in kracht en verplaatsing ('snap-backs'). Een voorgeschreven belasting, $\Delta \lambda_i \underline{q}$, kan een limiet van maximale of minimale kracht niet passeren. Het alternatief, de voorgeschreven verplaatsing geeft problemen bij 'snap-back'.

De 'arc-length' methode van Riks^{Riks79} heeft deze problemen niet. Zij gebruikt $\Delta \lambda_i$ als extra variabele. $\Delta \lambda_i$ is de maat voor de grootte van het belastingincrement. Na elke iteratie wordt deze waarde opnieuw bepaald. Het iteratieproces bepaalt dus niet slechts de verplaatsingskolom maar ook een aanpassing van de belastingkolom. Indien noodzakelijk, zoals het passeren van een limiet in de belasting, kan de variabele van teken wisselen.

Om de grootte van $\Delta\lambda_i$ te bepalen wordt een strategie van twee stappen gevolgd. $\underline{\delta a}_i$ wordt eerst verdeeld in twee delen:

$$3.3 \quad \underline{\delta a}_i = \Delta\lambda_i \underline{\delta a}_i^I + \underline{\delta a}_i^{II}$$

Waarbij de volgende koppeling geldt:

$$3.4 \quad \underline{\delta a}_i^I = K_{i-1}^{-1} q$$

$$3.5 \quad \underline{\delta a}_i^{II} = K_{i-1}^{-1} p_{i-1}$$

De grootte van $\Delta\lambda_i$ kan nu worden bepaald door bepaalde voorwaarden te stellen. De methode, die binnen DIANA wordt toegepast, stelt dat de iteratie plaatsvindt normaal op de verplaatsingskolom uit de vorige iteratie:

$$3.6 \quad \underline{\Delta a}_{i-1}^T \underline{\delta a}_i = 0$$

Dit geeft na substitutie van (3.3) een oplossing voor $\Delta\lambda_i$ als quotiënt van twee inproducten:

$$3.7 \quad \Delta\lambda_i = - \frac{\underline{\Delta a}_{i-1}^T \underline{\delta a}_i^{II}}{\underline{\Delta a}_{i-1}^T \underline{\delta a}_i^I}$$

In figuur 3.1 is een iteratieslag weergegeven. Deze situatie is niet 1-dimensionaal. Voor 1-dimensionale problemen levert de voorwaarde (3.6) namelijk een zodanige $\Delta\lambda_i$ op, dat de $\underline{\delta a}_i$ gelijk aan nul is. Het iteratieproces vindt meteen een evenwicht.

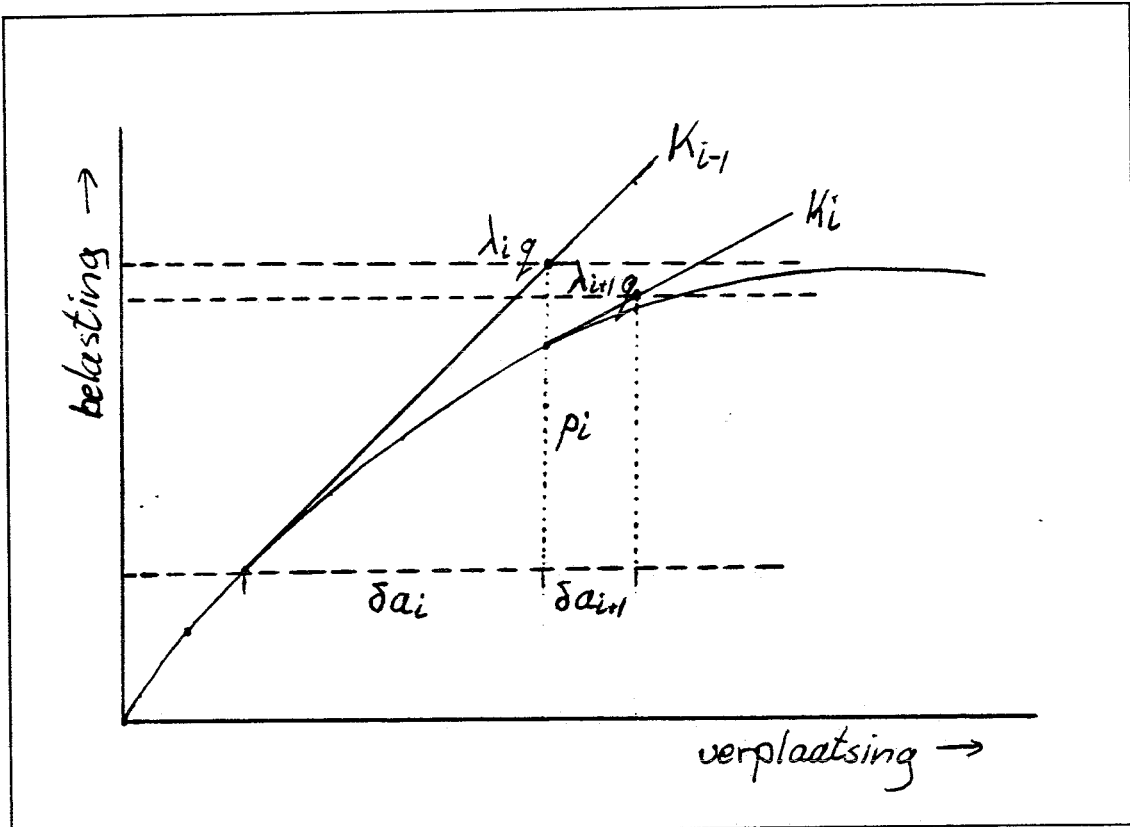


fig. 3.1

Alternatieve voorwaarden gaan uit van de booglengte van het increment. Deze wordt in DIANA echter niet toegepast.

In geval van sterke lokalisatie kan deze methode nog wel eens falen. Dit kan worden opgelost door slechts een deel van \underline{a}_i te gebruiken voor de bepaling van $\Delta \lambda_i$. Dit heet 'indirect displacement control'.

Voor de aansturing voor deze methode in DIANA wordt verwezen naar de bijlage.

4. Indirecte 'Mode I'-belasting bij beton

4.1 Doelstelling

Om te leren omgaan met DIANA-Crack is er voor gekozen een bestaand voorbeeld te reproduceren. De keuze viel hierbij op een driepuntsbuigproef met een betonnen balk. Deze proef staat beschreven in het proefschrift van Rots^{Rots88}. De aansturing in DIANA is met enig commentaar te vinden in de bijlage.

4.2 Mesh en materiaaleigenschappen

Uit het proefschrift konden de volgende gegevens worden gehaald:

E	=	20000.	N/mm^2
ν	=	0.2	
G_f	=	113.	N/m
f_t	=	2.4	N/mm^2
h	=	5.	mm

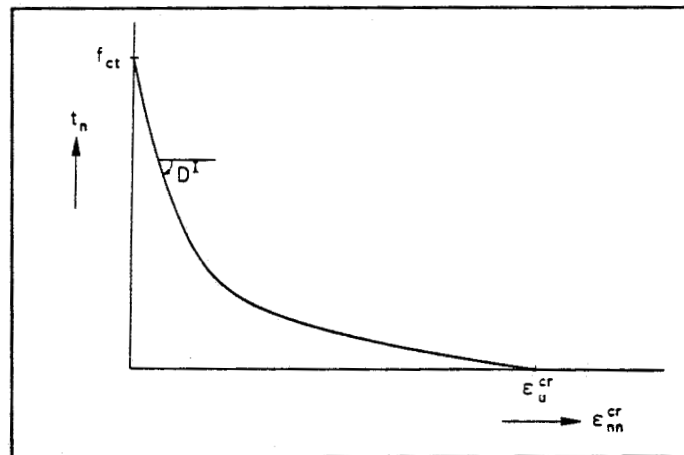


fig. 4.1

De beschrijving volgens Hordijk, Cornelissen en Reinhardt^{Rein84} wordt toegepast (fig. 4.1). Deze functie is niet-lineair en exponentieel en in DIANA standaard

aanwezig:

$$4.1 \quad \frac{\sigma_{nn}}{f_t} = \left(1 + \left(c_1 \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_u} \right)^3 \right) \exp \left(-c_2 \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_u} \right) - \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_u} (1 + c_1^3) \exp(-c_2)$$

met $c_1=3.0$ en $c_2=6.93$

Voor beton is onderzoek naar de 'shear retention factor', β , gedaan^{Rots 84}. Het resultaat is opgenomen in het DIANA-pakket:

$$4.2 \quad \beta = \frac{1}{1 + 4447 \epsilon_{nn}}$$

In (4.2) is geen sprake van ϵ_u^{cr} , zoals gesteld in (2.36), omdat het verschil tussen ϵ_{nn} en ϵ_{nn}^{cr} relatief klein is.

Voor de geometrie werd een meshverdeling (fig. 4.2) gemaakt.

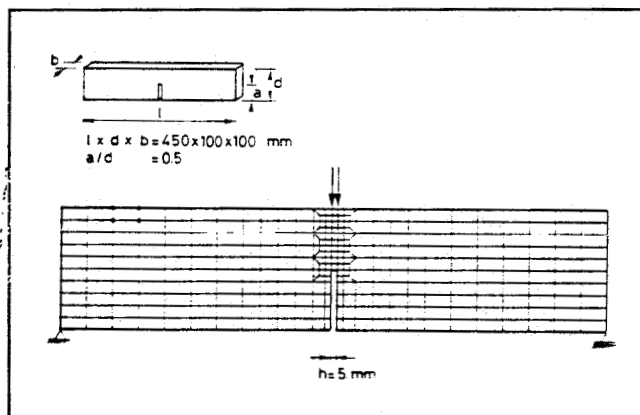


fig. 4.2

Er worden vlakspanningselementen gebruikt met vier knooppunten.

Er ontbraken enkele gegevens. Daarom zijn enkele aanpassingen gemaakt:

- Voor de middelste kolom elementen werden in de oorspronkelijke beschrijving speciale elementen met een 2x1 integratieschema gebruikt. Op deze wijze kon een enkele scheur worden gecreëerd. Dit element

was echter niet toegankelijk. Daarom werd het vervangen door een element met een 2x2-integratieschema.

- Er werd geen dichtheid van het beton genoemd. De invloed van het eigen gewicht is daarom in deze berekeningen niet meegenomen.

4.3 Resultaten

De resultaten geven aan, dat het proces zijn voorbeeld^{Rots88} (fig. 4.3) prima volgt. Dit geldt voor zowel de toepassing van de methode Riks (fig. 4.4) als bij de opgelegde verplaatsingen (fig. 4.5).

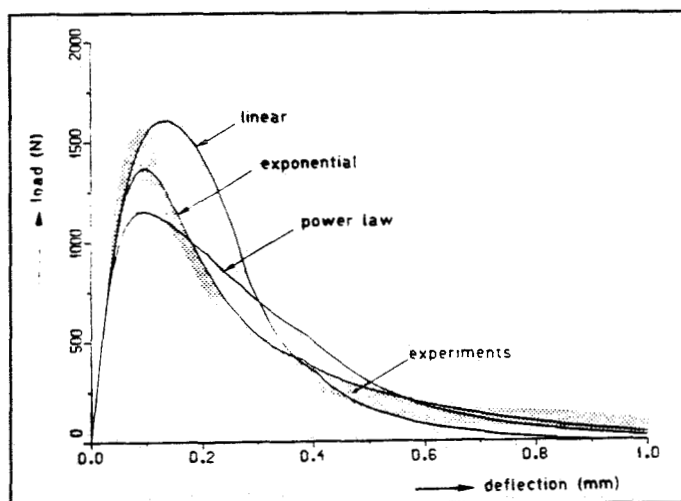


fig. 4.3

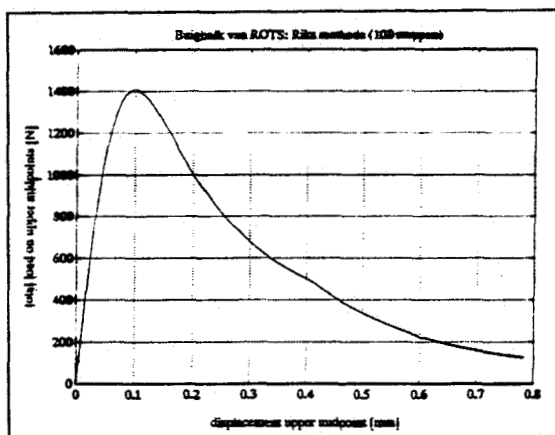


fig. 4.4

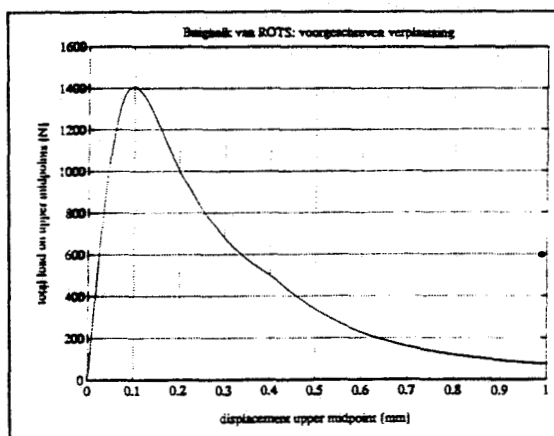


fig. 4.5

Ter aanvulling worden hier nog de beelden gegeven van de scheur-situatie zoals die is bij de piek-belasting (fig. 4.6) en bij een buiging van ca. 0,8 mm na 100 stappen (fig. 4.7).

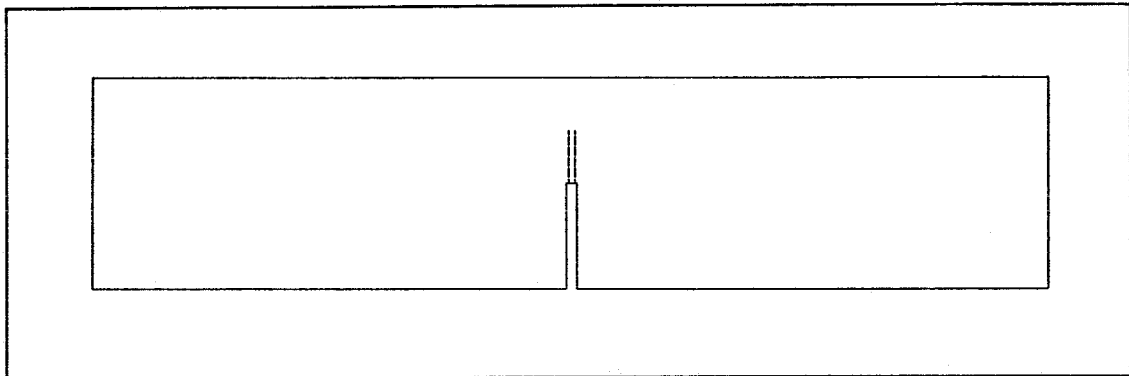


fig. 4.6

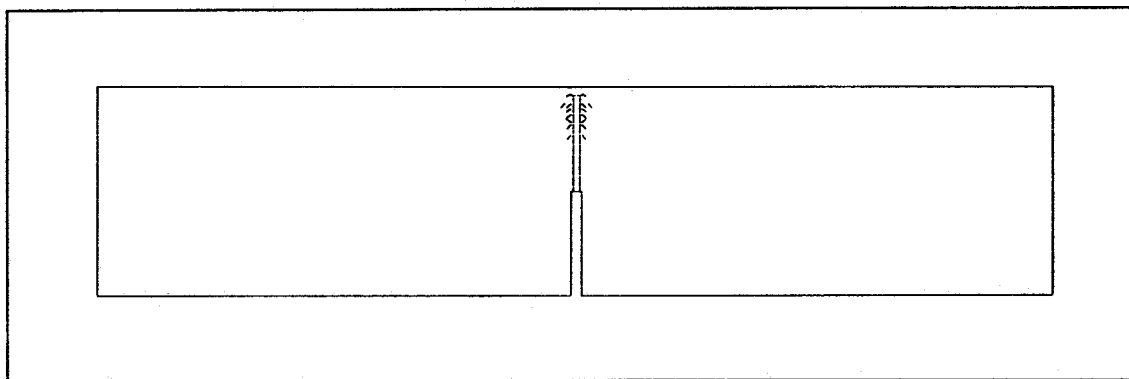


fig. 4.7

5. Toepassing op porseleinen inlays

5.1 Inleiding

Één van de nieuwere materialen die voor het maken van inlays wordt gebruikt is porselein. Voor kronen is porselein al langer van toepassing. Het grote voordeel van porselein ligt in het esthetische vlak. Door aanpassing van kleur is het mogelijk de restauratie zo goed als onzichtbaar te maken.

Porselein is een bros materiaal. Dit betekent dat de eigenschappen wezenlijk verschillen van de legeringen die vanouds zijn toegepast. Één van de belangrijkste is dat porselein bij een overbelasting direct breekt. De schade is irreversibel. Het is daarom van belang om te weten hoever porseleinen inlays belast kunnen worden en waar de zwakke plekken in de constructie zitten.

Als voorbeeld wordt een drievlaksvulling in een kies genomen (fig. 5.1). Het model is een mesio-distale doorsnede van een premolaar met een MOD-inlay. Deze is symmetrisch en kan daarom worden gehalveerd (fig. 5.2). De basis voor het EEM-model bevat drie materialen (fig.5.3). De stomp van de tand is van dentine, de rest van de tandstomp is glazuur. De inlay is van porselein.



fig. 5.1

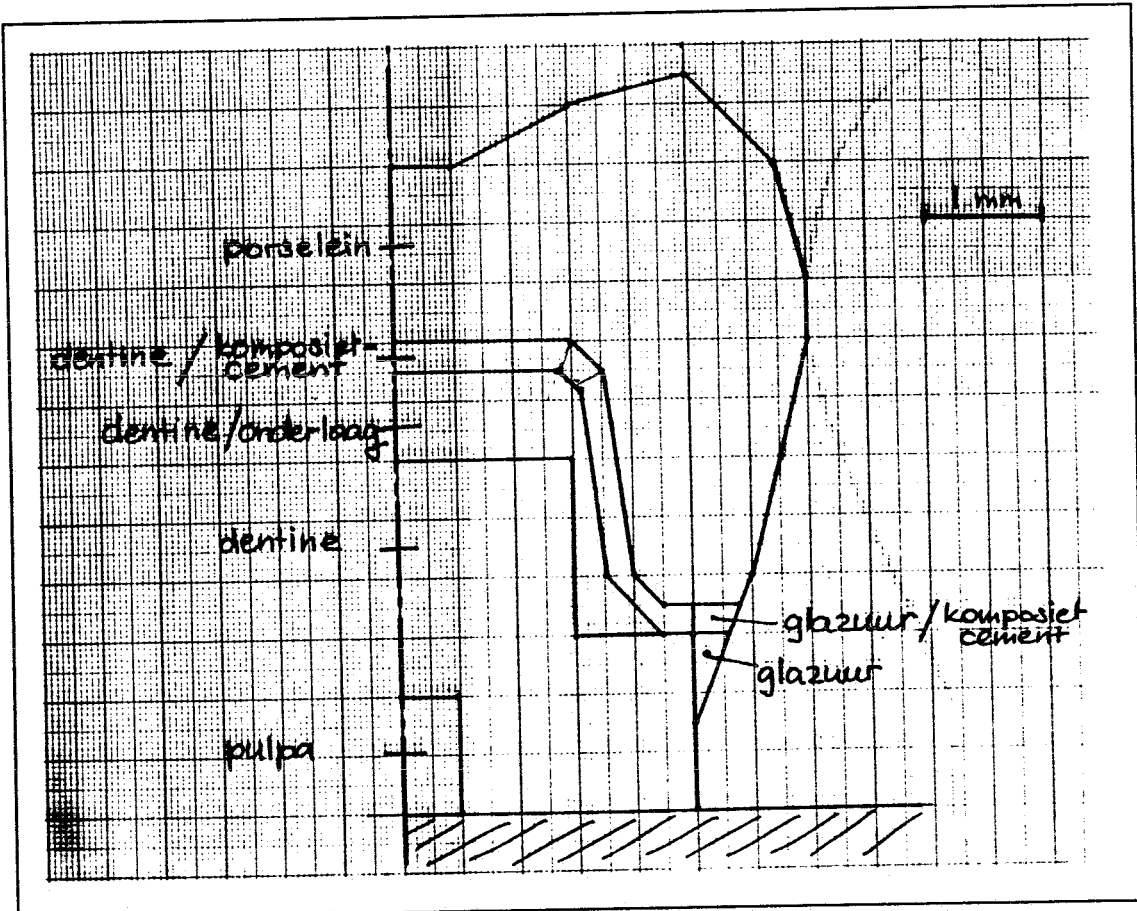


fig. 5.2

De materiaalovergangen hebben een zeer sterke binding. De huidige komposietcementen hechten sterk aan zowel porselein als ook dentine.

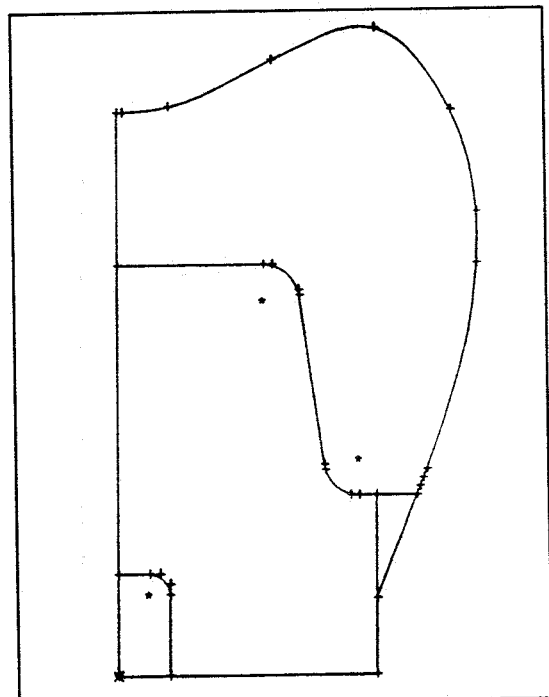


fig. 5.3

5.2 Materiaaleigenschappen

De drie materialen, porselein, dentine en glazuur, hebben verschillende eigenschappen. Uit onderzoek^{Wate80} komen een aantal materiaaleigenschappen en -samenstellingen naar voren (tabel 5.1).

	porselein	dentine	glazuur
E [10^3 Nmm ⁻²]	70.0	18.3	75.0
v [-]	0.3	0.3	0.3
f _t [Nmm ⁻²]	24.8	51.7	22.5
f _c [Nmm ⁻²]	149.0	297.0	300.0
K _{1c} [10^6 Nmm ^{-3/2}]	38.0	97.4	31.1
Structuur	korrels (30 μ m)	tubules (4 μ m) fibrillen (0.3 μ m)	prisma's (4 μ m) kristallen (0.1 μ m)

tabel 5.1

De inlay zit geklemd tussen het glazuur van de oude tand. Daarom wordt uitgegaan van een vlakvervormingsanalyse. De 'energy release rate' voor een vlakvervormingsanalyse is te bepalen uit (2.49) en is weergegeven in tabel 5.2.

Voor de localisatiebreedte wordt aangenomen dat deze drie maal de korrelgrootte is, net als bij beton. Dit wordt gedaan bij gebrek aan specifiek onderzoek. Hier wordt voor de korrelgrootte de grootst aanwezige structuur in het materiaal genomen. Daarmee zijn alle benodigde materiaalgrootheden bepaald.

	porselein	dentine	glazuur
G _f [10^{-3} Nmm ⁻¹]	18.8	471.7	12.6
w _c [mm]	0.1	0.02	0.01

tabel 5.2

Het materiaalgedrag moet eenvoudig worden gekozen. Er zijn geen onderzoeken bekend over de verbanden tussen normaalspanning en -rek. Daarom wordt de spanning-rekrelatie lineair verondersteld. Volgens (2.46) geldt voor de rek bij volledige breuk, ϵ_u^{cr} (tab. 5.3):

5.1

$$\epsilon_u^{cr} = \frac{2G_f}{w_c f_t}$$

Ook over de 'shear retention factor' zijn met betrekking tot de drie materialen geen onderzoeken bekend. Voor de 'shear retention factor' is de moeilijkheid dat de variabele mogelijkheid binnen DIANA is afgeleid uit de civiele techniek voor beton. Porselein wordt hier weliswaar ook beschouwd als bros materiaal, maar de absolute overeenkomst met beton kan niet zonder meer worden aangenomen. Daarom wordt teruggevallen op een vaste waarde voor de 'shear retention factor'. Uit onderzoek^{Rots84} is gebleken, dat bij beton voor de waarden 0.2 tot 0.4 goede resultaten worden behaald. Voor de materialen zal de waarde 0.4 als aanname voor de 'shear retention factor' ingevoerd worden.

	porselein	dentine	glazuur
$\epsilon_u^{cr} [10^{-3}]$	15.2	912.4	112.0
$\beta [-]$	0.4	0.4	0.4

tabel 5.3

5.3 Elementenmesh

Uitgaande van een vlakvervormingsanalyse worden vlakvervormingselementen toegepast. Omdat de hechting tussen de materialen sterk is, worden geen 'interface'-elementen in het EEM-model opgenomen. De elementen voor de verschillende materialen worden direct aan elkaar geknoopt.

Voor de eerste opzet wordt een grove mesh gemaakt (fig. 5.4). Op deze mesh wordt een lineair elastische analyse uitgevoerd. De spanningsverdelingen geven inzicht in de plaats waar scheuren geïnitieerd kunnen worden.

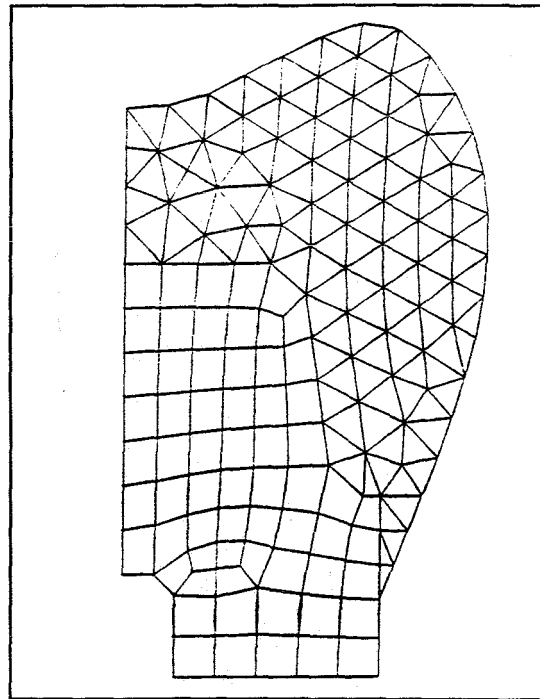


fig. 5.4

De maximale hoofdspanningen (fig. 5.5) laten twee gebieden zien die voor meshverfijning in aanmerking komen. Het betreft de knobbelhelling, waar de belasting wordt opgelegd, en de bovenkant van het kauwvlak. De knobbelhelling is het schuine gedeelte van de knobbel op het kauwvlak, het zogenaamde occlusale vlak. De vergelijkspanningen (fig. 5.6), volgens 'von Mises', geven aan dat tussen de plaatsen met hoge trek- en drukspanningen een gebied met hoge vergelijkspanningen loopt. In het glazuur heersen de hoogste vergelijkspanningen.

Op basis van deze resultaten wordt de mesh in de vernoemde gebieden verfijnd. De elementgrootte voor deze gebieden wordt zo gekozen dat de breedte van de elementen gelijk is aan de localisatiebreedte van porselein (fig. 5.7).

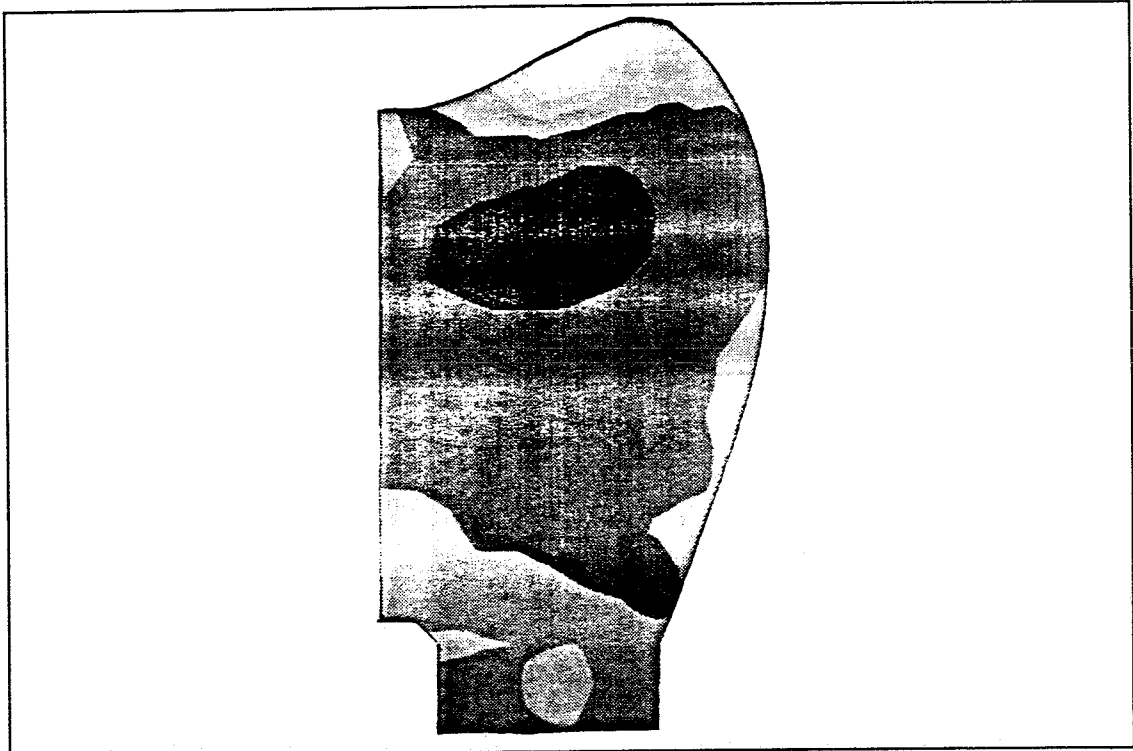


fig. 5.5

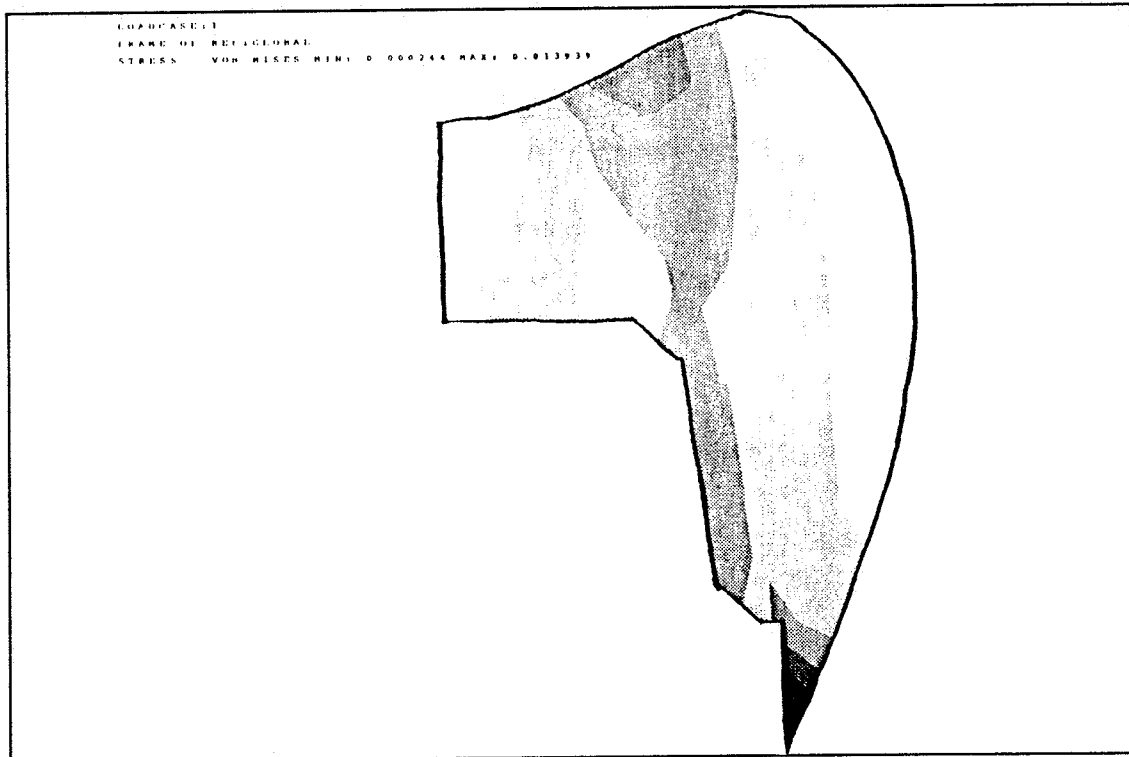


fig. 5.6

De belastingen zijn afgeleid van:

1. puntbelasting (fig. 5.8)
2. Hertze-kontaktspanning (breedte: 1.25 mm) (fig. 5.9)
3. Hertze-kontaktspanning (breedte: 2.5 mm) (fig. 5.10)

Lineaire berekeningen leveren voor het drietal belastingsituaties deformaties op. Deze deformaties worden gebruikt als voorgeschreven verplaatsingen bij de niet-lineaire analyses.

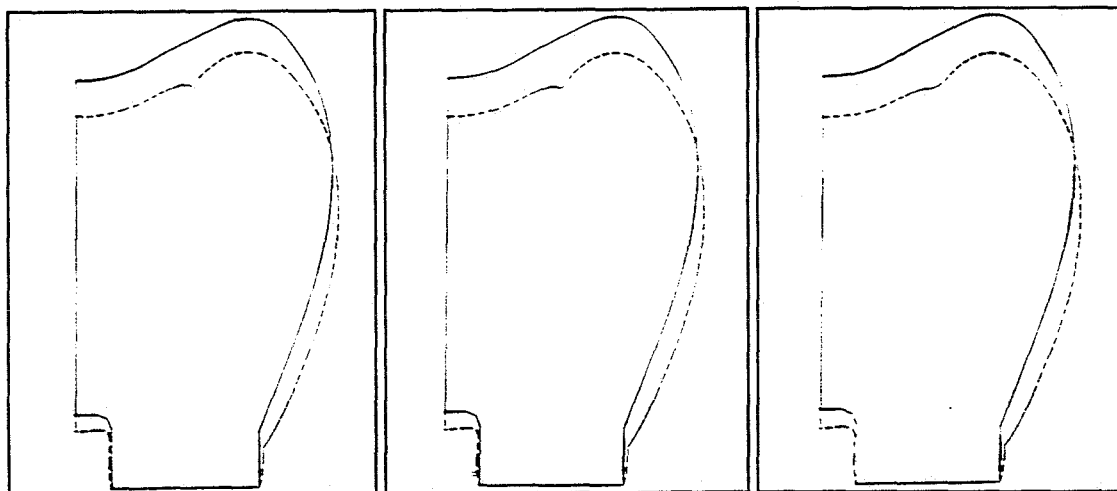


fig. 5.8

fig. 5.9

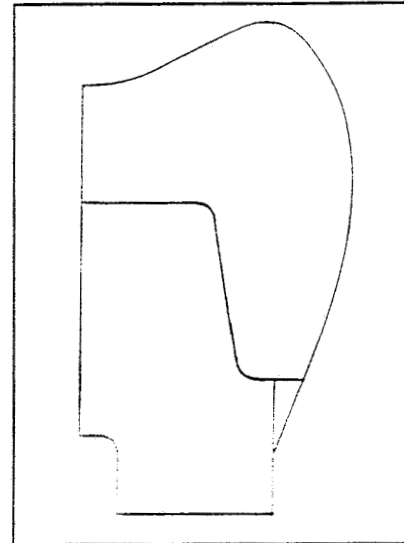
fig. 5.10

5.5 Resultaten

De incrementele niet-lineaire analyses geven de mogelijkheid om stapsgewijs het verloop van de scheurgroei te volgen (fig. 5.11-31). Het eerste gebied, waar scheurinitiatie plaatsvindt, ligt bij de knobbelhelling. Dit gebeurt bij een relatief lage belasting. Het tweede gebied ligt aan het interne occlusale oppervlak. De scheur groeit in eerste instantie langs het bovenzvlak van het interne occlusale oppervlak naar het midden gezamenlijk met een lichte propagatie van het gebied naar boven.

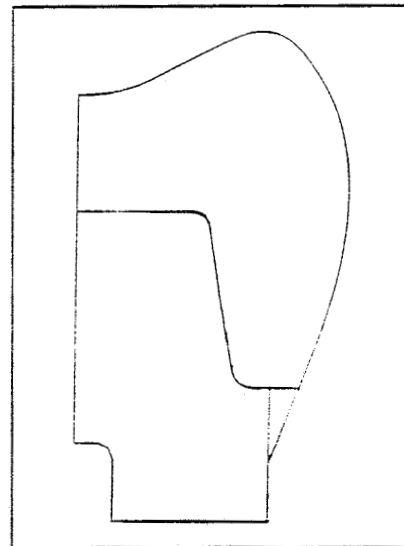
Puntbelasting:

fig. 5.11 Geen belasting [0 N]



Hertze kontaktspanning (2,5 mm):

fig. 5.12 Geen belasting [0 N]



Hertze kontaktspanning (5 mm):

fig. 5.13 Geen belasting [0 N]

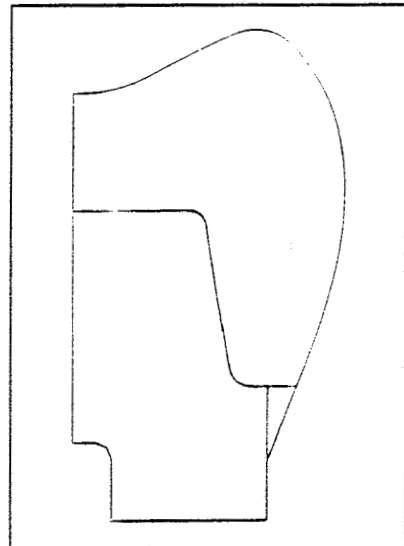


fig. 5.14 Initiatie aan kauwvlak [21 N]

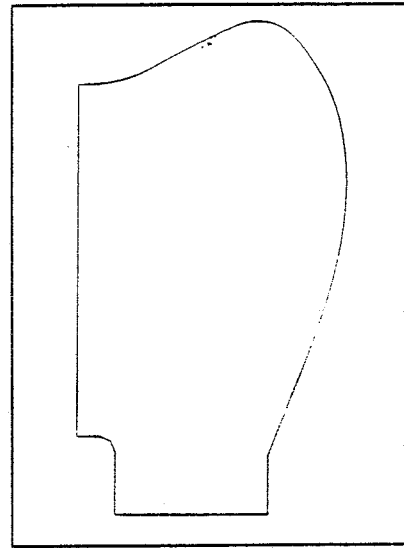


fig. 5.15 Initiatie aan kauwvlak [22 N]

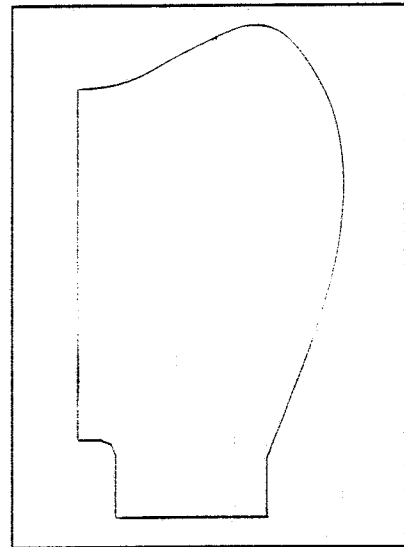


fig. 5.16 Initiatie aan kauwvlak [33 N]

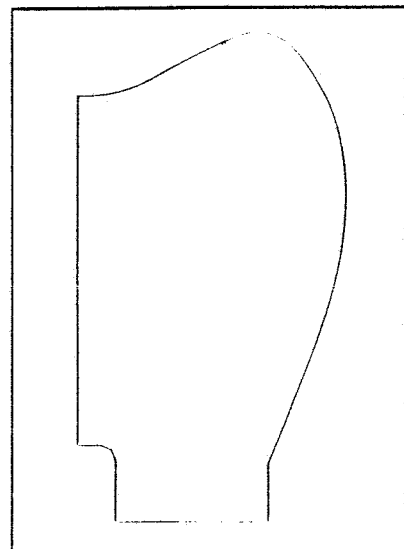


fig. 5.17 Initiatie aan interne occlusale vlak
[57 N]

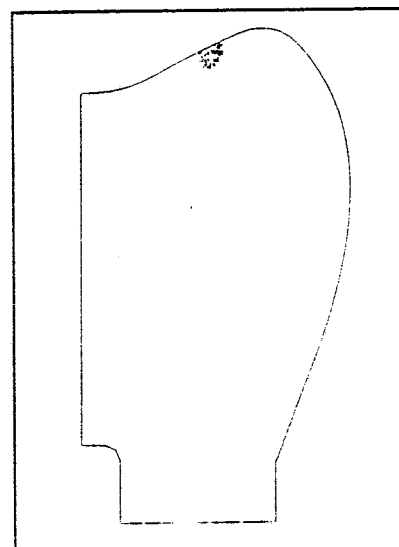


fig. 5.18 Initiatie aan interne occlusale vlak
[60 N]

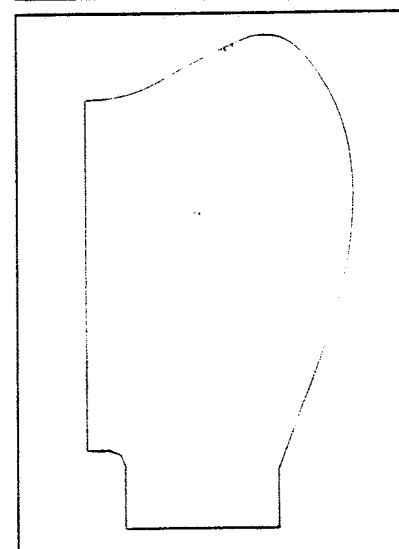


fig. 5.19 Initiatie aan interne occlusale vlak
[60 N]

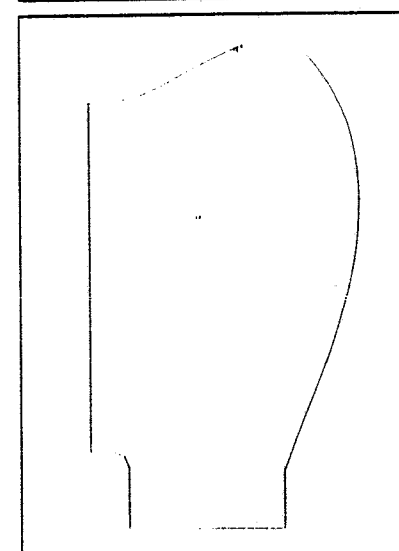


fig. 5.20 Groei langs bovenkant van interne
occlusale vlak [80 N]

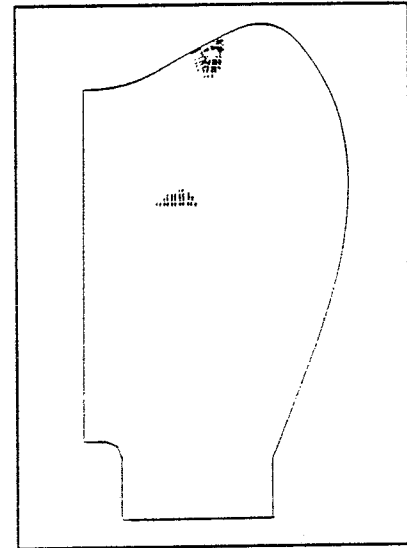


fig. 5.21 Groei langs bovenkant van interne
occlusale vlak [81 N]

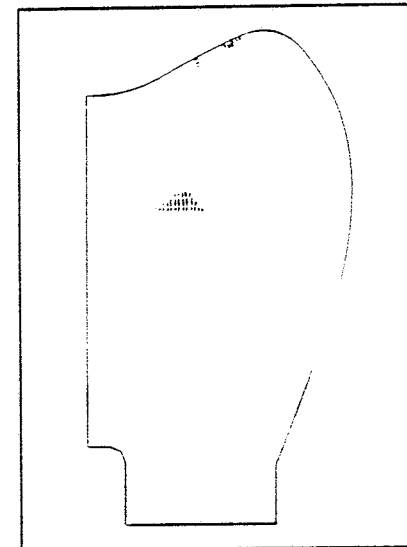


fig. 5.21 Groei langs bovenkant van interne
occlusale vlak [81 N]

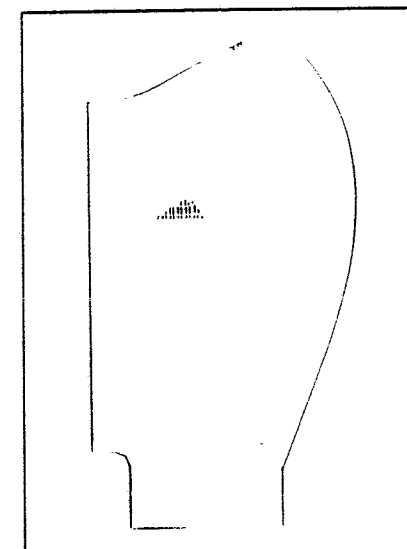


fig. 5.23 Initiatie 'subveld' [92 N]

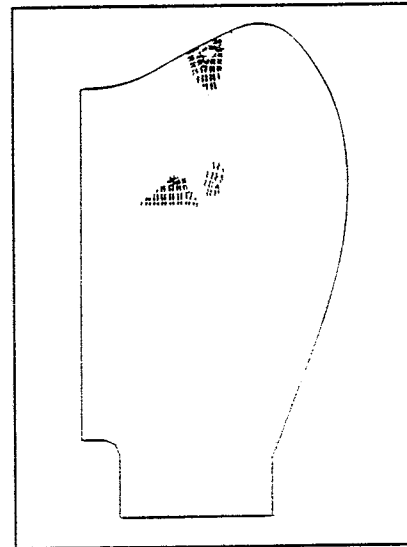


fig. 5.24 Initiatie 'subveld' [92 N]

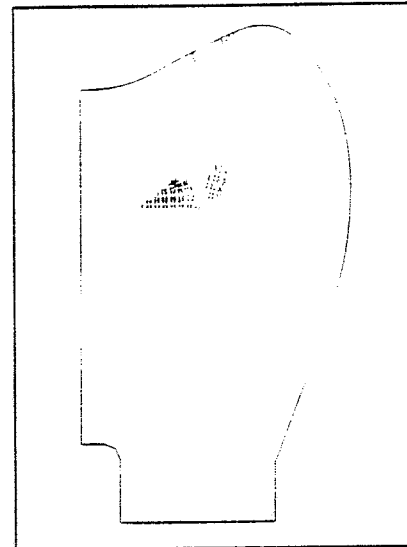


fig. 5.25 Initiatie 'subveld' [92 N]

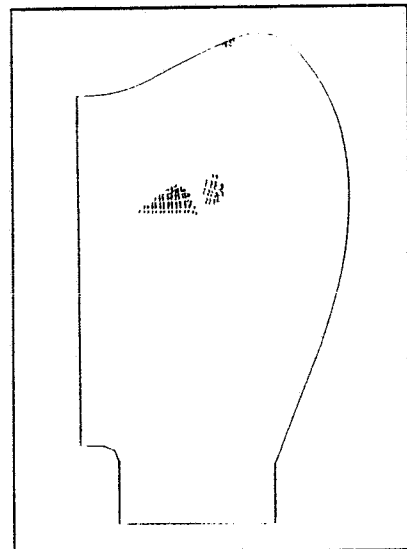


fig. 5.26 Volledige scheur [99 N]

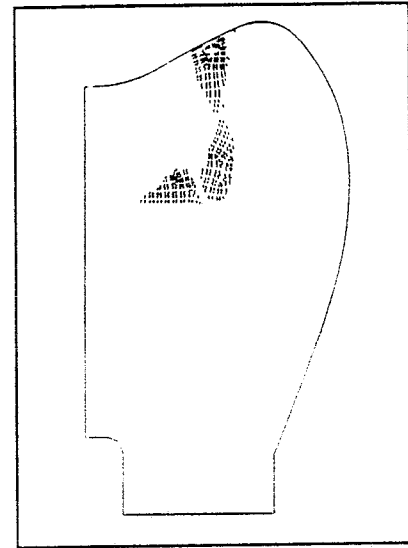


fig. 5.27 Volledige scheur [103 N]

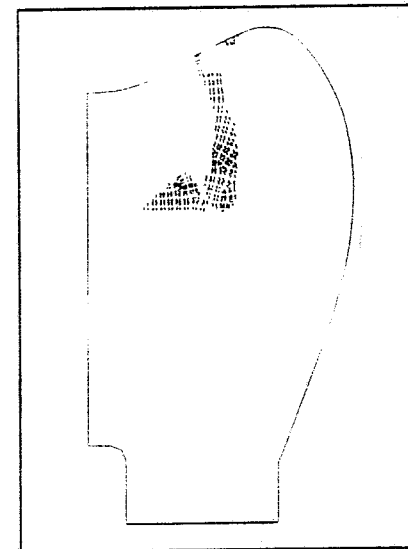


fig. 5.28 Volledige scheur [112 N]

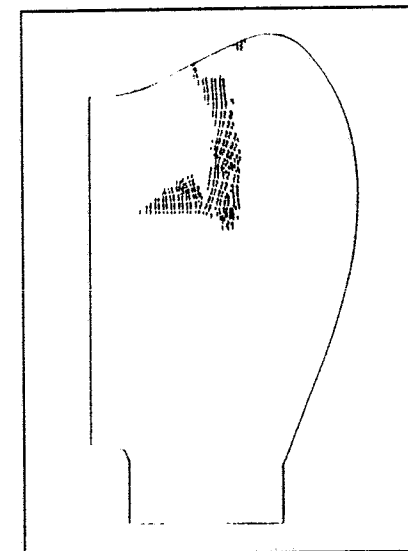


fig. 5.29 Voortgezette groei [107 N]

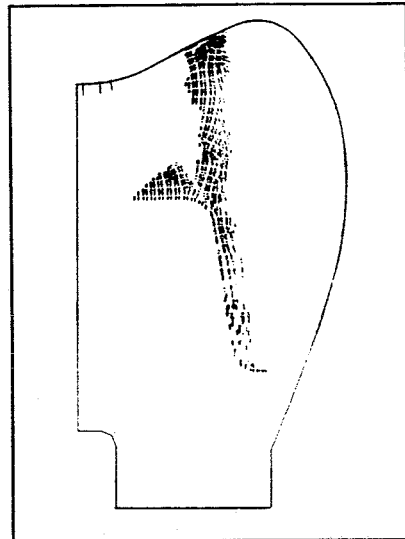


fig. 5.30 Voortgezette groei [124 N]

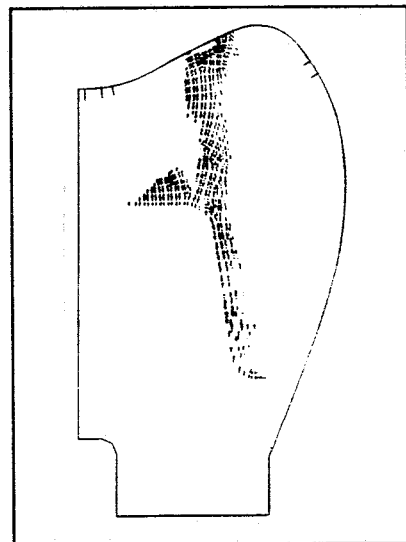
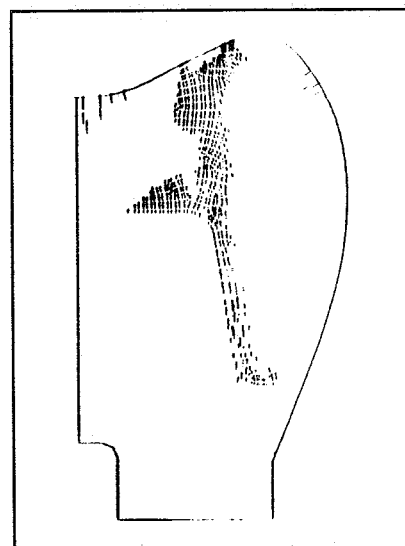


fig. 5.31 Voortgezette groei [148 N]



Na het ontstaan van een 'subgebied', nabij de tweede initiatie, volgt een toenadering van de verschillende gebieden tot een volledige scheur tussen het interne en het externe occlusale oppervlak gerealiseerd is. Voortzetting van de scheur vindt plaats langs de zijkant van het interne occlusale oppervlak.

De waarde van de eerste initiatie bij de knobbelhelling is twijfelachtig. Het kan een gevolg zijn van de belasting. Dit wordt ondersteund door het feit dat de scheur niet of heel langzaam doorgroeit totdat het tweede gebied is geïnitieerd. Uitzondering hierop is de situatie met de puntbelasting. Hier wordt een veel sterkere groei waargenomen.

Uit kracht-verplaatsingskromme (fig 5.32) kunnen een aantal gegevens gehaald worden. Enkele opvallende resultaten worden genoteerd (tab. 5.5).

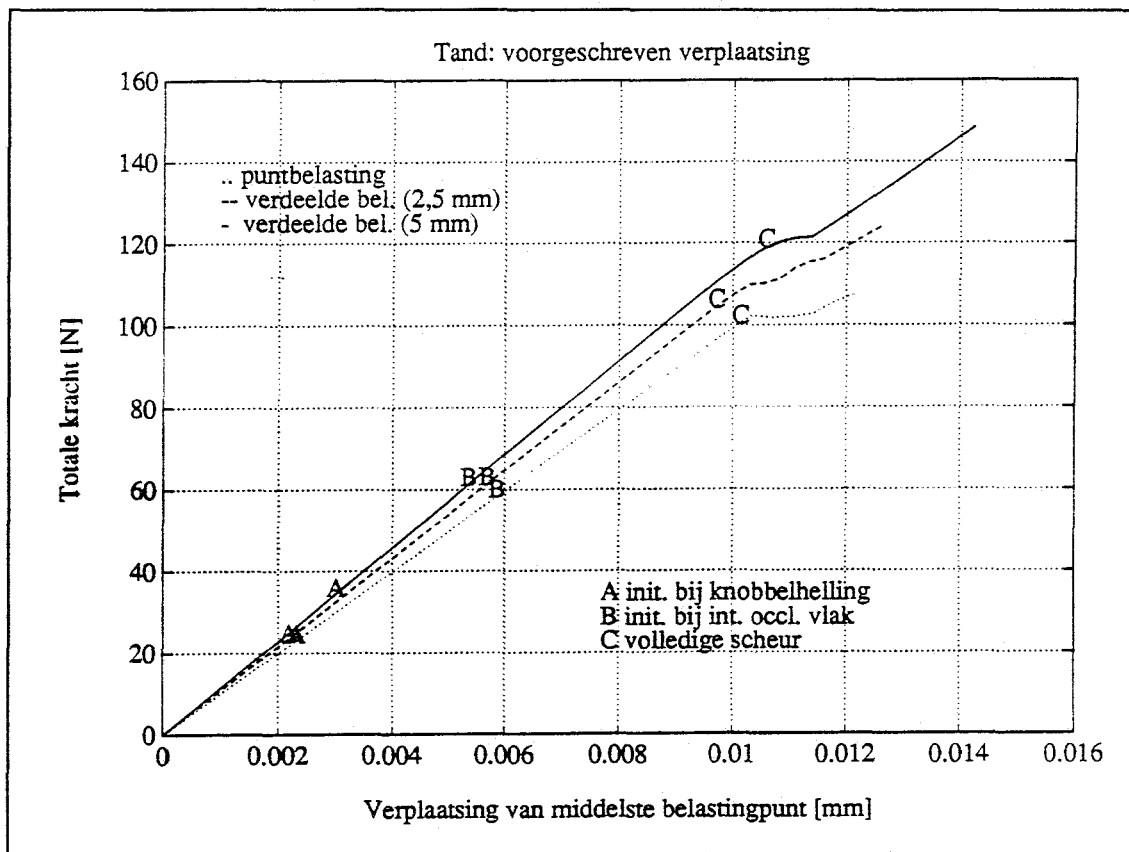


fig. 32

Kracht bij:	puntbelasting	verdeelde belasting (2,5 mm)	verdeelde belasting (5 mm)
scheurinitiatie aan het kauwvlak [N]	21	22	33
scheurinitiatie aan het interne occlusale vlak [N]	57	60	60
volledige scheur [N]	99	103	112

tabel 5.5

De initiatie van scheuren aan het kauwvlak is afhankelijk van de belasting. Naarmate de belasting verdeeld is over een breder gebied zijn er minder grote spanningsconcentraties. De scheuren zullen minder snel optreden. De absolute waarde van de krachten bij deze initiatie is niet noodzakelijkerwijs representatief, daar de opgelegde vervorming is afgeleid van een verticale belasting en niet van een belasting loodrecht op het kauwvlak.

De initiatie aan het interne occlusale vlak gebeurt in alle belastinggevallen bij dezelfde kracht. De invloed van de verdeling van de belasting is niet aanwezig, omdat dit initiatiegebied op enige afstand van het belaste gebied ligt.

Het moment van contact tussen de diverse gebieden om tot een volledige scheur te komen is verschillend. Deze verschillen zijn echter relatief gering. De groei van de scheur versnelt bij het einde van het proces, zodat een nauwkeuriger bepaling van het ontstaan van de volledige scheur moeilijker wordt.

Het verloop van de kracht-verplaatsingsrelatie na ontstaan van de volledige scheur mag betwijfeld worden. De scheur loopt vrijwel verticaal naar beneden. Aan weerszijden van de scheur is het materiaal van het model verschillend. Deze verschillen veroorzaken afschuiving over de scheur. Daar gekozen is voor een vaste waarde van de 'shear retention factor' is het mogelijk dat er sprake is

van 'overstiffness behaviour'. Door het toenemen van de afschuifspanningen roteren de hoofdspansingen ten opzichte van de hoofdrekken en kunnen de hoofdspansingen in principe groter worden als de treksterkte.

5.6 Confrontatie met kauwkrachten

Er zijn nog geen scheurpatronen uit de praktijk vastgelegd. De berekende scheurpatronen geven echter een aanvaardbaar beeld.

	zacht voedsel	hard voedsel	steentje (gespierde ka- ken)
Kauwkrachten [N]	3-18	50-100	265

tabel 5.6

Een confrontatie met de kauwkrachten^{Wate80} (tabel 5.6) laat zien dat onder normale omstandigheden de krachten geen aanleiding geven tot breuk. Dit is in overeenstemming met de praktijk. Slechts bij uitzonderlijke gevallen, zoals het bijten op steentjes, is het duidelijk dat de tand breekt.

Het kauwen op hard voedsel kan problemen opleveren. De berekeningen geven aan dat de krachten, die nodig zijn voor scheurgroei bij het interne occlusale vlak, in de zelfde orde van grote liggen als die voor het kauwen op hard voedsel.

De scheuren, die geïnitieerd worden, staan open voor bacteriën die de tand kunnen verzwakken. Deze scheuren zijn voor niet of moeilijk detecteerbaar. De verzwakking van de inlay kan in de loop van de tijd voor een volledige breuk zorgen zonder dat daar extreem hoge kauwkrachten voor noodzakelijk zijn. Dit is een mogelijke verklaring voor het feit dat mensen met een gebroken inlay zich soms niet kunnen herinneren dat zij op iets hards hebben gebeten. Deze mogelijkheid moet echter worden onderzocht.

6. Conclusies en aanbevelingen

De methodiek toegepast in DIANA geeft vertrouwen. De resultaten met betrekking tot de balk zijn reproduceerbaar en ze zijn vergelijkbaar met experimenten. Het model van de tand met de porseleinen inlay geeft resultaten die niet direct als onzin verworpen kunnen worden. Verder onderzoek zal dit echter nog moeten aantonen.

De 'arc-length' methode van Riks is een nuttige methode indien bij een probleem inderdaad limieten in belasting of verplaatsing plaatsvinden. Indien dit niet het geval is, is gebruik van deze methode niet handig. Er is geen directe controle meer over de incrementgrootte.

Er zijn kanttekeningen te plaatsen bij de materiaaleigenschappen van porselein, dentine en glazuur die betrekking hebben op het scheurgedrag. De lineaire relatie tussen normaalrek- en spanning is een sterke vereenvoudiging. Uit de onderzoeken aan beton blijkt dat een niet-lineaire exponentiële relatie een aanwijsbare verbetering is.

De 'shear retention factor' zal eveneens nader moeten worden bestudeerd. Met name in voor porselein waar de hele breuk gesitueerd is zal dit van belang zijn. Een variërende 'shear retention factor' zal het voordeel hebben dat het gevaar voor 'overstiffness behaviour' minder wordt. Hiervoor is het wel noodzakelijk om toegang te hebben tot de 'source' van DIANA.

Hoewel er duidelijke beperkingen aan de aannames voor de materialen kleven, geven de resultaten een aanvaardbaar beeld. Verder onderzoek zou zich moeten richten op een serie analyses waarbij symmetrie niet meer wordt toegepast. Ook de aanname van vlakvervorming zal moeten worden losgelaten. De elasticiteitsmodulus van porselein is nagenoeg gelijk aan die van het

glazuur, dat de inlay inklemt. Een drie-dimensionale analyse kan overwogen worden.

De belangrijkste conclusie uit de analyse van de tand is dat scheurinitiatie plaatsvindt bij de overgang tussen dentine en porselein. Deze initiatie is niet zichtbaar. Voor de initiatie aan het kauwvlak moet nog blijken in hoeverre deze reëel is. Indien deze te verwaarlozen is zullen oplossingen in de tandheelkundige sfeer gezocht kunnen worden bijvoorbeeld door implementatie van een onderlaag tussen dentine en porselein die bestand is tegen de optredende spanningen. Doordat de scheuren open staan voor bacteriën zullen de eigenschappen van de scheur veranderen. De verandering kan mogelijk voor een versnelling van het verval zorgen.

Literatuurlijst

Bažant Z.P. and Oh B.H. (1983), "Crack band theory for fracture of concrete", Materials and construction structures, 16(93), 155-177.

Bažant Z.P. (1989), "Measurement of characteristic length of nonlocal continuum", J. Engineering Mechanics, 115(4).

Reinhardt. H.W. (1984), "Fracturemechanics of an elastic softening material like concrete", HERON, 29(2), 1-42.

Riks E. (1978), "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", Int. J. Solids Structures, 15, 529-551.

Rots J.G., Kusters G.M.A. and Nauta P. (1984), "Variabele reductiefactor voor de schuifweerstand van beton", Report, TNO Delft.

Rots J.G. (1988), "Computational modeling of concrete fracture", Proefschrift, Techn. Universiteit Delft.

Schreurs P. (1990), "Breukmechanica", Dictaat, Techn. Universiteit Eindhoven, Fac. Werktuigbouwkunde, WFW.

Waters N.E. (1980), "Some mechanical and physical properties of teeth", The mechanical properties of biological material, eds.: Vincent J.F.V. and Curry J.D., Cambridge, University press, 99-135.

Nawoord

Het werken aan een onderwerp als dit is uitermate boeiend. Daarmee doel ik niet alleen op het werken tussen twee disciplines. Het is boeiend om door deterministisch te werk te gaan, te proberen zich een beeld te vormen van een geheel.

Aan het einde van de rit is het haast onmogelijk om te zeggen dat je alles te pakken hebt. Ik werd er voor een van de weinige keren in mijn studie mee geconfronteerd dat alles slechts een theorie is.

Dit geeft je de mogelijkheid om kritiek te uiten. Kritiek op een theorie is gemakkelijk te geven, als je er eenmaal mee bekend bent, maar kritiek op je eigen zienswijze is niet zo eenvoudig.

Verslaglegging is een vak apart. Het valt niet mee om zelf in te schatten hoeveel tijd dit in beslag neemt. Het is niet zo dat je niet weet wat je wil opschrijven, het grote probleem is hoe schrijf je het op. Gelukkig kon ik met mijn vragen terecht bij mijn begeleiders. Ik wil hen voor hun steun hartelijk danken.

Tom Kemper

**Ik ben gaarne braaf,
zei de ezel,
maar ik heb geen haast!**

Bijlage

Korte handleiding aansturing DIANA-Crack

Deze handleiding is verre van volledig. Zij geeft enkel aan hoe de diverse files eruit kunnen zien. Voor andere gevallen verwijs ik naar de DIANA-handleiding.

Om een analyse met DIANA uit te voeren moeten een datafile (`file.dat`) en een commandofile (`file.com`) aangemaakt worden. Voor niet-lineaire berekeningen met 'cracking-behaviour' zijn er een aantal mogelijkheden. Hier wordt een beperkt aantal beschreven. De iteratiemethode die is toegepast is steeds gewone Newton-Raphson.

Men kan verplaatsing of belasting voorschrijven.

De methode Riks is niet in staat om analyses met voorgeschreven verplaatsing uit te werken. Indien er sterke localisering van de niet-lineaire verschijnselen zich voordoet, dan kan de indirecte methode van Riks uitkomst bieden. Deze methode gebruikt bij bepaling van het belastingincrement slechts enkele op voorhand geselecteerde knooppunten. Hiervoor worden vaak de punten aan weerszijde van een scheur genomen. Deze methode wordt 'Crack Opening Displacement (COD) Control' genoemd.

Van alle bovengenoemde mogelijkheden zijn voorbeelden opgenomen op de volgende pagina's.

Om een probleem met DIANA te kunnen draaien, moet het programma eerst aangeroepen worden. Dit wordt gedaan met het shell-commando: `impl_diana`.

Als de data- en commandofile klaar zijn wordt de som opgestart met het shell-commando: `diana file`. De output-file draagt dan de naam `file.out`.

Het selecteren van gegevens uit de output-file wordt eenvoudiger door toepassing van het unix-commando: `grep`.

Voorbeeld: `grep DISPLA: file.out > verpl.out`

Alle regels met de string "DISPLA:" worden naar `verpl.out` geschreven.

Voorgeschreven verplaatsing:

Bij de datafile moet erop gelet worden dat de knooppunten die de voorgeschreven verplaatsing krijgen (*LOADS) worden ondersteund (*SUPPORT).

Datafile:

```
REPRODUKTIE: BUIGING VAN BALK
'COORDI'
1 -2.25000E+02 0.00000E+00 0.00000E+00
2 -2.03534E+02 0.00000E+00 0.00000E+00
...
349 2.50000E+00 9.50000E+01 0.00000E+00
350 2.50000E+00 1.00000E+02 0.00000E+00
'DIRECT'
1 1.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
2 0.00000E+00 1.00000E+00 0.00000E+00
3 0.00000E+00 0.00000E+00 1.00000E+00
'ELEMEN'
CONNEC
1 Q8MEM 1 2 14 13
2 Q8MEM 2 3 15 14
...
305 Q8MEM 173 348 349 174
306 Q8MEM 174 349 350 175
MATERI
/ 1-306 / 1
GEOMET
/ 1-306 / 1
'SUPPOR'
/ 1,177 / TR 2
/ 175,350 / TR 2
'MATERI'
1 YOUNG 20000.
POISON 0.2
: CRACKING INPUT
CRACK 1
CRKVAL 2.4
TENSIO 5
TENVAL 2.4 113E-3 5
TAUCRI 1
BETA 0.
'GEOMET'
1 THICK 100.0
'LOADS'
CASE 1
DEFORM
/ 175,350 / TR 2 -0.01
'END'
```

Commandofile:

```
NOLOG
ERRORS .CPF MF=5 MV=20
*FILOS
INITIA
*INPUT
*ELASSE
STORE .X
*ELMAT
*LOADS
*ORDER
*SOLVE
*NONLIN
INITIALIZE
ANALYS PHYSIC CRACKI
OPTION TANGEN
END
LOADING
LOAD(1): (1) 1.0 /
LOAD(2): (2) 1.0 /
LOAD(3): (3) 1.0 /
END LOADIN
SELECT PRINT STEPS
NODES 175 /
ELEMEN 142-148 290-306 //
DISPLA TOTAL
LOAD TOTAL RESIDU
STATUS
STRAIN TOTAL.P CRACK
STRESS TOTAL.P CRACK
END SELECT PRINT
EXECUTE LOAD (1) STEPS
SIZE 1. (20) /
PERFOR.C NEWTON REGULA
USE PHYSIC
CRACKI.T
END USE
NORM REFERE ENERGY
NORM CHECK ENERGY
PRINT
END EXECUT
*END
*END
```

Toepassing van 'arc length method'

Datafile:

```
REPRODUKTIE: BUIGING VAN BALK
'COORDI'
1 -2.25000E+02 0.00000E+00 0.00000E+00
2 -2.03534E+02 0.00000E+00 0.00000E+00
...
349 2.50000E+00 9.50000E+01 0.00000E+00
350 2.50000E+00 1.00000E+02 0.00000E+00
'DIRECT'
1 1.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
2 0.00000E+00 1.00000E+00 0.00000E+00
3 0.00000E+00 0.00000E+00 1.00000E+00
'ELEMEN'
CONNEC
1 Q8MEM 1 2 14 13
2 Q8MEM 2 3 15 14
...
305 Q8MEM 173 348 349 174
306 Q8MEM 174 349 350 175
MATERI
/ 1-306 / 1
GEOMET
/ 1-306 / 1
'SUPPOR'
/ 1,177 / TR 2
1 TR 1
'MATERI'
1 YOUNG 20000.
POISON 0.2
DENSIT 3.E-6
: CRACKING INPUT
CRACK 1
CRKVAL 2.4
TENSIO 5
TENVAL 2.4 113E-3 5
TAUCRI 1
BETA 0.
'GEOMET'
1 THICK 100.0
'LOADS'
CASE 1
NODAL
175 TR 2 -100.
350 TR 2 -100.
'END'
```

Commandofile:

```
NOLOG
ERRORS .CPF MF=5 MW=20
*FILOS
INITIA
*INPUT
*ELASSE
STORE .X
*ELMAT
*LOADS
*ORDER
*SOLVE
*NONLIN
INITIALIZE
ANALYS PHYSIC CRACKI
OPTION TANGEN RIKS
END
LOADING
LOAD(1): (1) 1.0 /
END LOADIN
SELECT PRINT STEPS
NODES 159 175 /
DISPLA TOTAL
LOAD TOTAL RESIDU
END SELECT PRINT
EXECUTE LOAD (1) STEPS
SIZE 1. (5) /
PERFOR.A NEWTON REGULA
USE PHYSIC
CRACKI .T
END USE
NORM REFERE ENERGY
NORM CHECK ENERGY
PRINT
END EXECUT
*END
*END
```

Gebruik van Crack Opening Displacement Control:

De datafile is onveranderd. De knooppunten worden in de commandofile geselecteerd (*SELECT ARCLLEN).

Commandofile:

```
NOLOG
ERRORS .CPF MF=5 MW=20
*FILOS
INITIA
*INPUT
*ELASSE
STORE.X
*ELMAT
*LOADS
*ORDER
*SOLVE
*NONLIN
INITIALIZE
ANALYS PHYSIC CRACKI
OPTION TANGEN RIKS
END
LOADING
LOAD(1): (1) 1.0 /
LOAD(2): (2) 1.0 /
LOAD(3): (3) 1.0 /
END LOADIN
SELECT PRINT STEPS
NODES 175 /
ELEMEN 142-148 290-306 //
DISPLA TOTAL
LOAD TOTAL
STATUS
STRAIN TOTAL.P CRACK
STRESS TOTAL.P CRACK
END SELECT PRINT
SELECT ARCLLEN
TR 1 1. 316 319 323 326 330 /
TR 1 -1. 148 150 152 154 156 /
END SELECT ARCLLEN
EXECUTE LOAD (1) STEPS
SIZE 1. (20) /
PERFOR.R NEWTON REGULA
USE PHYSIC
CRACKI.T
END USE
NORM REFERE ENERGY
NORM CHECK ENERGY
PRINT
END EXECUT
*END
*END
```