MASTER

Bewegingsconstanten voor tweedimensionale elastische media

Rutten, J.M.M.P.

Award date:
1981

BEWEGINGSCONSTANTEN VOOR
TWEEDIMENSIONALE ELASTISCHE MEDIA

M. Rutten februari 1981

Verslag van het afstudeerwerk
in de vakgroep Theoretische Natuurkunde
o.l.v. prof. dr. L.J.F. Broer

INHOUDSOPGAVE

0. INLEIDING

Voor mechanische systemen is het verband tussen Eulerse variaties van de veldvariabelen, en behoudswetten en bewegingsconstanten vastgelegd in het Noethertheorema. Deze Eulerse variaties worden voor lineaire systemen gevonden door middel van de kommutatoren van de dynamische operator van deze systemen.
Er bestaat een verband tussen de ontaarding van deze dynamische operator en de structuur van zijn kommutator-verzameling, wat het mogelijk maakt een basis van deze verzameling te construeren waaruit door lineaire combinatie de gehele verzameling kan worden opgebouwd. Voor scalaire systemen is dit gedemonstreerd door L. Mooren in zijn proefschrift (2).
In dit verslag worden deze methoden uitgebreid naar vektorsystemen in twee dimensies. Als voorbeelden zullen dienen isotrope en anisotrope elastische media.
Een bijzonder type bewegingsconstanten voor vektorsystemen zijn de zogenaamde Zilchgrootheden. Deze kunnen worden afgeleid uit reciprociteitsstellingen. Hierop wordt ingegaan in hoofdstuk 3.
Voor anisotrope systemen blijkt het nuttig de verzameling van eigenfuncties van de dynamische operator te herparametriseren. In plaats van de parameters (k,l), zijnde de componenten van de golfvektor $\underline{k}$, worden nu gebruikt de eigenwaarde ω^2 van de eigenfunctie en de parameter $\phi = \arctan l/k$. Dit zal in hoofdstuk 4 worden uitgewerkt.
Als voorbeeld van een anisotroop elastisch medium wordt gebruikt een medium met vierkantsymmetrie. De resultaten van de verschillende berekeningen voor dit medium blijken niet bijzonder eenvoudig of inzichtelijk te zijn. Daarom wordt volstaan met enkele kwalitatieve beschouwingen, geldig voor dergelijke systemen.

1.1 HET NOETHERTHEOREMA :

Het onderzoek naar bewegingsconstanten vindt zijn oorsprong in het Noethertheorema. Dit theorema beschrijft hoe uit Eulerse variaties van de veldvariabelen behoudswetten en (door integratie hiervan) bewegingsconstanten kunnen worden gevonden. Voor lineaire systemen kunnen dergelijke variaties gemakkelijk worden gevonden door middel van hermitische en antihermitische kommutatoren van de dynamische operator V.

We beschouwen een fysisch systeem dat volledig beschreven wordt door n stuks onafhankelijke coördinaatfuncties of veldvariabelen u_i, $i = 1 \ldots\ldots n$, die ieder afhangen van de tijd t en m onafhankelijke variabelen of coördinaten x_j, $j = 1 \ldots\ldots m$.
Deze coördinaatfuncties zijn gedefinieerd op een gebied G in de coördinaatruimte R_m. Wij nemen als definitiegebied de gehele coördinaatruimte. We veronderstellen dat alle functies in G voldoende glad en kwadratisch integreerbaar zijn. Dit houdt in dat de functies en hun afgeleiden voldoende snel naar nul moeten gaan voor $|\underline{x}| \to \infty$.
We beschouwen slechts Lagrangiaanse systemen, d.w.z. er moet een functionaal van de vorm

$$A\{u_1 \ldots\ldots u_n\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_G dv\, L \qquad (1.1)$$

bestaan, zodanig dat de bewegingsvergelijkingen van het systeem geschreven kunnen worden als

$$\frac{\delta A}{\delta u_i} = 0, \quad i = 1 \ldots\ldots n \qquad (1.2)$$

waarin $\frac{\delta A}{\delta u_i}$ de functionaalafgeleide voorstelt.

L wordt de <u>Lagrangedichtheid</u> genoemd, A de <u>aktiefunctionaal</u>.

Voor systemen waarvoor L slechts van de coördinaatfuncties u_i en hun eerste afgeleiden naar t en x_j afhangt, hebben de bewegingsvergelijkingen de vorm

$$\frac{\delta A}{\delta u_i} = \frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{i,t}} \right) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{i,x_j}} \right) = 0. \qquad (1.3)$$

We gaan nu variaties in de koördinaatfuncties aanbrengen, die we aangeven door u_i, $i = 1....n$.
Deze variaties worden <u>Eulers</u> verondersteld, d.w.z. er moet gelden

$$\delta u_{i,t} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta u_i) \qquad (1.4)$$

en

$$\delta u_{i,x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) \qquad (1.5)$$

Er geldt nu : $\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \int_G dt\, dv\, \delta L \qquad (1.6)$

met

$$\delta L = \delta u_i \frac{\partial L}{\partial u_i} + \delta u_{i,t} \frac{\partial L}{\partial u_{i,t}} + \sum_{j=1}^{m} \delta u_{i,x_j} \frac{L}{u_{i,x_j}} \qquad (1.7)$$

in eerste orde. Van belang zijn variaties waarvoor geldt $\delta A = 0$.

Voor geschikte functies T en χ_j is dit het geval wanneer geldt bij zekere δu_i :

$$\delta L = \frac{\partial}{\partial t} T + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_j \qquad (1.8)$$

Het Noethertheorema stelt nu dat bij deze variatie δu_i geldt :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(T - \sum_{i=1}^{n} \delta u_i L_{u_{i,t}} \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\chi_j - \sum_{i=1}^{n} \delta u_i L_{u_{i,x_j}} \right) \doteq 0. \qquad (1.9)$$

Hierin is $L_{u_{i,t}} = \frac{\partial L}{\partial u_{i,t}}$; $L_{u_{i,x_j}} = \frac{\partial L}{\partial u_{i,x_j}} \qquad (1.10)$

Het $\doteq$ teken geeft aan dat deze bewering slechts geldt wanneer u_i oplossingen zijn van de bewegingsvergelijking.

1.9) heeft de vorm van een lokale behoudswet. We kunnen deze integreren over het gehele gebied G. Op grond van het feit dat alle functies u_i kwadratisch integreerbaar en minstens eenmaal kontinu differentieerbaar moeten zijn, levert deze integraal met behulp van de divergentiestelling van Gauss :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \int_{-\infty}^{+\infty} dv \, (T - \sum_{i=1}^{n} \partial u_i \, L_{u_{i,t}}) \} \doteq 0. \qquad (1.11)$$

Met andere woorden : de uitdrukking tussen haakjes is een bewegingsconstante.

Literatuur : (1)

1.2 KOMMUTATOREN VAN DE DYNAMISCHE OPERATOR

We beschouwen nu systemen met een homogeen kwadratische Lagrangedichtheid

$$L = \tfrac{1}{2}(\underline{u}_t \cdot \underline{u}_t + \underline{u} \cdot V\underline{u}) \qquad (2.1)$$

Hierin is V, de dynamische operator, een positieve lineaire hermitische (2x2) matrixoperator.
De bewegingsvergelijkingen luiden

$$\underline{u}_{tt} = -V\underline{u} \qquad (2.2)$$

Voor de systemen die voor ons van belang zijn (golfvergelijkingen en elastische systemen) zijn de elementen van V tweede orde differentiaaloperatoren. Via partiële integratie kunnen we desgewenst de Lagrangedichtheid schrijven als een homogeen kwadratische functie van $u_{i,t}$ en u_{i,x_j} .
Er geldt in eerste orde :

$$\delta L = \tfrac{1}{2}\{\delta u_{i,t} u_{i,t} + u_{i,t}\delta u_{i,t} + \delta u_i V_{ij} u_j + u_i \delta(V_{ij}u_j)\} \quad (2.3)$$

Voor een Eulerse variatie $\delta u_i = K_{ij}u_j$ geldt nu :

$$\begin{aligned}
\delta L &= \tfrac{1}{2}\{K_{ij}u_{j,t}u_{i,t} + u_{i,t}K_{ij}u_{j,t} + K_{ij}u_j V_{il}u_l + u_i V_{ij}K_{jl}u_l\} \\
&= \tfrac{1}{2}\{u_{j,t}(K_{ij}{}^{\dagger})u_{i,t} + u_{i,t}K_{ij}u_{j,t} + u_j(K_{ij}{}^{\dagger}V_{il})u_l + u_i V_{ij}K_{jl}u_l\} \\
&= \tfrac{1}{2}\{u_{i,t}(K_{ji}{}^{\dagger} + K_{ij})u_{j,t} + u_i(K_{ji}{}^{\dagger}V_{il} + V_{ij}K_{jl})u_l\}
\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van partiële integratie in de uitdrukking

$$\int_G dv\,\delta L\ ,\quad \delta L \text{ als boven.}$$

$K_{ji}{}^{\dagger}$ stelt de hermitisch toegevoegde voor van K_{ji}.
Als nu de operator K een antihermitische kommutator van V is, dan geldt :

$$K_{ji}{}^{\dagger} = -K_{ij} \qquad (2.5)$$

en $\quad K_{ji}{}^{\dagger}V_{jl} + V_{ij}K_{jl} = -K_{ij}V_{jl} + V_{ij}K_{jl} = [V,K] = 0. \qquad (2.6)$

Dus geldt $\quad \delta L = 0. \qquad (2.7)$

Volgens het Noethertheorema is met een dergelijke variatie de bewegingsconstante

$$\int_G dv \quad \delta u_i \, L_{u_{i,t}} = \int_G dv \; u_{i,t} \, K_{ij} u_j \qquad (2.8)$$

geassocieerd.

Op soortgelijke wijze kunnen we aantonen dat voor variaties van de vorm

$$\delta u_i = K_{ij} u_{j,t} = (K \partial_t \underline{u})_i \qquad (2.9)$$

waarbij K een <u>hermitische kommutator</u> van V is, geldt :

$$\delta L = \frac{d}{dt} \; T(\underline{u}, \underline{\dot{u}}) \qquad (2.10)$$

met $T(\underline{u}, \underline{\dot{u}}) = \frac{1}{2} \left(- u_i V_{ij} K_{jl} u_l + \dot{u}_i K_{ij} u_j \right)$ $\qquad (2.11)$

waarbij $\dot{u}_i = \frac{\partial}{\partial t} u_i$.

In dit geval vinden we de bewegingsconstante

$$\int_G dv \left(- \tfrac{1}{2} u_i V_{ij} K_{jl} u_l + \tfrac{1}{2} \dot{u}_i K_{ij} \dot{u}_j - K_{ij} \dot{u}_j . \dot{u}_i \right)$$

$$= - \tfrac{1}{2} \int_G dv \left(\dot{u}_i K_{ij} \dot{u}_j + u_i V_{ij} K_{jl} u_l \right) \qquad (2.12)$$

Op deze wijze vinden we een een-eenduidige correspondentie tussen de hermitische en antihermitische kommutatoren van de dynamische operator en de verzameling van kwadratische bewegingsconstanten.

Literatuur : Bewegingsvergelijkingen, Variatieprincipes en Behoudswetten, THE diktaat nr 3.303, 1975 Hoofdstuk 3.

2. DE ONTAARDING VAN DE DYNAMISCHE OPERATOR EN DE STRUKTUUR VAN ZIJN KOMMUTATORVERZAMELING

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat kwadratische bewegingskonstanten gevonden kunnen worden uit kommutatoren van de dynamische operator. In dit hoofdstuk zullen we laten zien dat er verband bestaat tussen de ontaarding van de dynamische operator en de structuur van zijn kommutatorverzameling. Dit verband speelt een rol bij de constructie van een deelverzameling van de kommutatorverzameling, waaruit de volledige verzameling kan worden opgebouwd door lineaire combinatie. De hier uiteengezette theorie is ontleend aan het werk van L. Mooren (2) voor acalaire mechanische systemen. We zullen hieraan enkele opmerkingen toevoegen over vektorsystemen.

2.1 DISCRETE EIGENWAARDEN

In eerste instantie beschouwen we een systeem waarvan de dynamische operator een stel discrete eigenwaarden met een eindige ontaarding bezit. We nemen aan dat de operator V n_k k-voudig ontaarde eigenwaarden bezit. Ten opzichte van een basis van eigenfuncties heeft V een diagonaalvorm. Deze eigenfuncties kunnen we in een zodanige volgorde zetten dat V de volgende blokvorm krijgt :

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & & & & & & \\ & V_2 & & & & & \\ & & V_2 & & & & \\ & & & V_3 & & & \\ & & & & V_3 & & \\ & & & & & V_3 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Dit noteren we als $V = \mathrm{diag}\ (V_1 ;\ V_2, V_2 ;\ V_3, V_3, V_3 ;\ \ldots.)$ (1.2)

Hierin is V_k (een diagonaalmatrix) de deelmatrix die alle K-voudig ontaarde eigenwaarden eenmaal bevat. Dus V_k is een reële, niet ontaarde diagonaalmatrix met als enige kommutatoren de identiteit en functies (polynomen) van V_k.

Nu hebben alle kommutatoren van V dezelfde blokstructuur als (1.1). De kommutatoren van het blok

$$\left(\begin{array}{c|c} V_2 & \\ & V_2 \end{array}\right)$$

kunnen worden samengesteld uit lineaire kombinaties van operatoren uit het volgende stelsel :

We nemen de matrices

$$\left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & I \end{array}\right) ; \quad \left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & -I \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{c|c} & I \\ \hline I & \end{array}\right) ; \quad \left(\begin{array}{c|c} & I \\ \hline -I & \end{array}\right) \qquad (1.3)$$

en vormen de produkten van deze matrices met willekeurige polynomen van V_2, aangegeven door $f_{2,j}(V_2)$, $j = 1.....4$.

De matrices uit het stelsel (1.3) vormen een algebra, isomorf met de algebra van de groep $L^+(2,R)$. (Dit is de groep van reële (2x2) matrices met positieve determinant.) De verzameling van kommutatoren van het blok

$$\left(\begin{array}{c|c} V_2 & \\ \hline & V_2 \end{array}\right)$$

(dit zijn dus de matrices (1.3), vermenigvuldigd met $f_{2,j}(V_2)$) heeft dus een homeomorfie met de algebra van de groep $L^+(2,R)$.

Op dezelfde wijze kunnen we afleiden dat het blok van alle k-voudig ontaarde eigenwaarden kommutatoren heeft, die kunnen worden samengesteld uit lineaire kombinaties van operatoren uit het stelsel

$$f_{k,j}(V_k) \otimes L_{k,j} \tag{1.4}$$

Hierin is k de index van het blok, $f_{k,j}(V_k)$ is een willekeurige functie van V_k, $j = 1.....k^2$.
$L_{k,j}$ zijn de generatoren van $L^+(k,R)$ (de groep van reële (kxk) matrices met positieve determinant.)

We beschouwen nu een operator V waarvan alle eigenwaarden een <u>even</u> ontaardingsgraad hebben. We kunnen nu V in de volgende blokvorm brengen :

$$V = \left(\begin{array}{c|c} V_2 & \\ \hline & V_2 \end{array}\right) \tag{1.5}$$

Hierin is V_2 een diagonaalmatrix die mogelijk nog ontaarde eigenwaarden bezit. In elk geval heeft V_2 als kommutatoren de identiteit en operatoren van de vorm $f(V_2)$. Als alle eigenwaarden van V tweevoudig ontaard zijn, dan is V_2 <u>niet</u> ontaard en heeft dus geen andere kommutatoren.

We kunnen nu kommutatoren van V construeren door lineaire combinaties van operatoren uit het stelsel :

$$\left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & I \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & -I \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c} & I \\ \hline I & \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c} & I \\ \hline -I & \end{array}\right) \tag{1.6}$$

vermenigvuldigd met $f(V_2)$. In het algemeen vormen deze kommutatoren een <u>deelverzameling</u> van de kommutatorenverzameling van V. De matrices (1.6) vormen een algebra, isomorf met $L^+(2,R)$.

In het algemeen geldt :
Als alle eigenwaarden van V minstens n-voudige ontaarding hebben, dan heeft V een deelverzameling van kommutatoren, homeomorf met $L^+(n,R)$. Dit is gemakkelijk in te zien wanneer we V in een blokvorm brengen, analoog aan (1.5).

2.2 SCALAIRE SYSTEMEN MET KONTINU SPEKTRUM

Voor ons zijn van belang kommutatorenverzamelingen van differentiaaloperatoren met constante coëfficiënten. Dit zijn operatoren met een kontinu spektrum.

We beschouwen een systeem in twee dimensies met bewegingsvergelijking

$$u(x,y)_{,tt} = - Vu(x,y) \tag{2.1}$$

$$V = V(\partial_x, \partial_y) \tag{2.2}$$

Ten opzichte van de orthonormale basis van eigenfuncties van V, gegeven door de functies

$$u(k,l;x,y) \exp -i\omega t = \exp i(kx + ly - \omega t) \tag{2.3}$$

waarin k en l reële continue parameters voorstellen, $-\infty \leq k \leq \infty$, $-\infty \leq l \leq \infty$, gaat de bewegingsvergelijking over in de eigenwaardenvergelijking

$$\omega^2 u(k,l;x,y) = V u(k,l;x,y) \tag{2.4}$$

$$= f(k,l)\, u(k,l;x,y)$$

ofwel $\omega^2 = f(k,l) = \hat{V}(k,l)$ (2.5)

Hierin is $\hat{V}(k,l)$ de Fouriergetransformeerde van V.

We nemen nu een eigenfunctie u van V met eigenwaarde ω^2.

Er geldt : $$V\,u = \omega^2 u \qquad (2.6)$$

Als nu tevens geldt $[K,V] = 0$ voor een lineaire operator K

dan is $$K\,V\,u = K\,\omega^2\,u = \omega^2(Ku) = V\,K\,u \qquad (2.7)$$

Met andere woorden : K u is een eigenfunctie van V bij <u>dezelfde</u> eigenwaarde ω^2.

<u>Omgekeerd</u> : Als u en K u eigenfuncties zijn van V met <u>dezelfde</u> eigenwaarde ω^2,

dus als $$V\,u = \omega^2\,u, \quad V\,(K\,u) = \omega^2\,(K\,u) \qquad (2.8)$$

dan geldt $$V\,(K\,u) = \omega^2\,(K\,u) = K\,\omega^2\,u = K\,V\,u \qquad (2.9)$$

Met andere woorden : K is een kommutator van V.

2.2.1 <u>DISCRETE KOMMUTERENDE OPERATOREN</u>

Als voorbeeld beschouwen we nu een systeem met bewegingsvergelijking
$$u_{,tt} = -\,V\,u, \quad V = V(\partial_x,\partial_y) \qquad (2.1.1)$$

waarbij geldt $$\begin{aligned}\hat{V}\,(k,l) &= \omega^2(k,l)\\ &= \omega^2(-k,l)\\ &= \omega^2(k,-l)\\ &= \omega^2(-k,-l)\end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

Met andere woorden $\omega^2(k,l)$ is een <u>even</u> functie van k en l.

Dit betekent dat de functies u (k,l), u (-k,l), u (k,-l) en u (-k,-l) van de vorm (2.3) eigenfuncties zijn van V bij <u>dezelfde</u> eigenwaarde.

Als we definiëren $S_x f(x,y) = f(-x,y)$

en $S_y f(x,y) = f(x,-y)$ (2.1.3)

dan geldt voor eigenfuncties van de gedaante (2.3) :

$$u(-k,l) = S_x u(k,l)$$

$$u(k,-l) = S_y u(k,l)$$

$$u(-k,-l) = S_x S_y u(k,l) \qquad (2.1.4)$$

De operatoren S_x, S_y en $S_x S_y$ zijn dus kommutatoren van V.

We zien uit (2.1.2) dat elke eigenwaarde ω^2 van V (minstens) viervoudig ontaard is. In de vorige paragraaf hebben we laten zien dat operatoren met <u>discrete</u> eigenwaarden met alle (minstens) n-voudige ontaarding een (deel) verzameling hebben, homeomorf met $L^+(n,R)$.
Een analoge redenering geldt ook voor kommutatoren met een <u>kontinu</u> spektrum van eigenwaarden. In het bovenstaande geval is er een (deel) verzameling van kommutatoren van V die homeomorf is met $L^+(4,R)$.
We kunnen de kommutatorverzameling van V dan ook indelen in 16 klassen, die elk corresponderen met een van de basismatrices van $L^+(4,R)$ en die op dezelfde wijze onderling kommuteren.
In paragraaf 2.3 zullen we het bovenstaande illustreren voor de isotrope golfvergelijking in een en twee dimensies.

We zullen daarbij uitgaan van de reële oplossingen van de bewegingsvergelijking.
Deze oplossingen kunnen we ontwikkelen naar het stelsel eigenfuncties van V, gegeven door functies van de gedaante

$$u_1(k,l;x,y) = \sin kx \sin ly$$
$$u_2(k,l;x,y) = \cos kx \sin ly$$
$$u_3(k,l;x,y) = \sin kx \cos ly$$
$$u_4(k,l;x,y) = \cos kx \cos ly,$$

elk vermenigvuldigd met een factor exp $-i\omega t$.
Bij ontwikkeling naar eigenfuncties van deze vorm wordt een willekeurige oplossing van de bewegingsvergelijking opgesplitst in vier delen die elk even of oneven zijn in x en y.

Voor eendimensionale systemen heeft het stelsel van reële eigenfuncties van V de gedaante

$$u_1 = \sin kx$$
$$u_2 = \cos kx$$

2.2.2 (PSEUDO) ROTATIES

De boven gevonden kommutatoren zijn voorbeelden van operatoren van eindige orde. Er geldt $S_x^2 = S_y^2 = I$.
Een ander type kommutator van V is te vinden uit een infinitesimale transformatie in k en l die $\omega^2(k,l)$ invariant laat. Deze wordt gevormd door

$$K\omega^2(k,l) = \omega^2(k,l) + \delta\omega^2(k,l) \qquad (2.2.1)$$

waarbij $\delta\omega^2(k,l) = \omega_{,k}^{\ 2}\,\delta k + \omega_{,l}^{\ 2}\,\delta l$ (2.2.2)

Er geldt nu $\omega_{,k}^{\ 2}\,\delta k = -\omega_{,l}^{\ 2}\,\delta l$ (2.2.3)

$$\frac{\delta k}{\omega^2_{,l}} = \frac{-\delta l}{\omega^2_{,k}} = \varepsilon \qquad (2.2.4)$$

Ofwel

$$\delta k = \varepsilon\omega^2_{,l}$$

$$\delta l = -\varepsilon\omega^2_{,k} \qquad (2.2.5)$$

Deze transformatie komt overeen met een kommutator K van V, gegeven door

$$K\, u(k,l;x,y) = u(k + \delta k,\ l + \delta l;\ x,y) \qquad (2.2.6)$$

waarbij u een eigenfunctie is van de vorm (2.3).

Schrijven we

$$\begin{aligned} K\, u &= u(k + \delta k,\ l + \delta l;\ x,y) \\ &= u(k,l;\ x + \delta x,\ y + \delta y) = L\, u \end{aligned} \qquad (2.2.7)$$

dan geldt $K = \hat{L}$. (2.2.8)

<u>Opmerking 1</u> : De transformatie (2.2.5) komt overeen met een infinitesimale verplaatsing langs de kromme $\omega^2(k,l)$ = constant in het (k-l) - vlak.

<u>Opmerking 2</u> : Voor de operator $\hat{V}(k,l) = \omega^2(k,l) = k^2 + l^2$ (een cirkel in het k-l - vlak) komt deze transformatie overeen met een infinitesimale rotatie in het k-l - vlak. Dit is de Fouriergetransformeerde van een infinitesimale rotatie in het x-y - vlak. Om deze reden dragen dergelijke operatoren de naam <u>pseudorotaties</u> .

2.3 DE SCALAIRE EEN- EN TWEEDIMENSIONALE GOLFVERGELIJKINGEN

We geven hier de resultaten weer zoals die door L. Mooren (2) verkregen zijn voor de een- en tweedimensionale golfvergelijkingen. Zoals later zal blijken kunnen deze resultaten dienen als uitgangspunt bij de constructie van de kommutatorverzameling van het isotrope elastische medium.

2.3.1 EENDIMENSIONAAL

De bewegingsvergelijking luidt $u_{,tt} = u_{,xx}$ (3.1.1)

De eigenwaardenvergelijking is nu $\omega^2 = k^2$ (3.1.2)

Er geldt $\omega^2(k) = \omega^2(-k) = k^2$ (3.1.3)

Bij elke eigenwaarde k^2 behoren twee eigenfuncties, te weten sin kx en cos kx, en twee waarden van k, namelijk +k en -k.

De dynamische operator heeft dus een (kontinu) spektrum met tweevoudige ontaarding. De kommutatorverzameling is dus homeomorf met de algebra van $L^+(2,R)$. Deze moet dus in vier klassen van kommutatoren te verdelen zijn, die een algebra vormen, isomorf met de algebra van de generatoren van $L^+(2,R)$.

Uit (3.1.3) blijkt dat de operator S_x, gedefinieerd als $S_x\, f(x) = f(-x)$, een kommutator is. Verder is de operator ∂_x een kommutator.
Als lineair onafhankelijke kommutatoren hebben we nu de operatoren I , ∂_x , S_x , $S_x\partial_x$.

We kunnen nu de onderstaande vier klassen van kommutatoren met de bijbehorende matrices uit de algebra van $L^+(2,R)$ opschrijven :

$$
\begin{array}{llll}
K_0 & \partial_x^{\,2n} & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \text{hermitisch} \\[2ex]
K_1 & \partial_x^{\,2n+1} & \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} & \text{antihermitisch} \\[2ex]
K_2 & S_x \partial_x^{\,2n} & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \text{hermitisch} \\[2ex]
K_3 & S_x \partial_x^{\,2n+1} & \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} & \text{hermitisch}
\end{array}
\qquad (3.1.4)
$$

De kommutatierelaties zijn :

$$
\begin{aligned}
[K_0,K_1] &= 0 \;;\; [K_0,K_2] = 0 \;;\; [K_0,K_2] = 0 \\
[K_1,K_2] &= -2K_3 \;;\; [K_1,K_3] = -2K_2 \;;\; [K_2,K_3] = 2K_1
\end{aligned}
\qquad (3.1.5)
$$

2.3.2 TWEEDIMENSIONAAL

Hier luidt de bewegingsvergelijking :

$$u,_{tt} = u,_{xx} + u,_{yy} \qquad (3.2.1)$$

De eigenwaardenvergelijking is nu :

$$\omega^2 = k^2 + l^2 \qquad (3.2.2)$$

Er geldt : $\omega^2(k,l) = \omega^2(-k,l) = \omega^2(k,-l) = \omega^2(-k,l)$ (3.2.3)

Bij elke eigenwaarde k^2+l^2 behoren vier lineair onafhankelijke eigenfuncties, te weten

$$
\begin{array}{lcl}
\sin kx \sin ly & , & \sin kx \cos ly \\
\cos kx \cos ly & , & \cos kx \sin ly
\end{array}
\qquad (3.2.4)
$$

en vier waarden van de parameters (k,l).

De kommutatorverzameling moet dus in zestien klassen van kommutatoren te verdelen zijn, die een algebra vormen, isomorf met de algebra van $L^+(4,R)$.

Uit (3.2.3) vinden we als kommutatoren de operatoren $S_x : S_x\, f(x,y) = f(-x,y)$ en $S_y : S_y\, f(x,y) = f(x,-y)$ en S_xS_y. Verder kennen we de kommutatoren ∂_x en ∂_y.

We kunnen nu 16 onderling lineair onafhankelijke klassen van kommutatoren construeren. Ze bestaan uit alle mogelijke produkten van operatoren uit het stelsel

$$\begin{array}{cccc} \partial_x^{\,2n} & \partial_x^{\,2n+1} & S_x\partial_x^{\,2n} & S_x\partial_x^{\,2n+1} \\ \\ K_0 & K_1 & K_2 & K_3 \end{array} \qquad (3.2.5)$$

met operatoren uit het stelsel

$$\begin{array}{cccc} \partial_y^{\,2n} & \partial_y^{\,2n+1} & S_y\partial_y^{\,2n} & S_y\partial_y^{\,2n+1} \\ \\ L_0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \qquad (3.2.6)$$

De zestien klassen kunnen dus als volgt worden weergegeven :

$$\begin{array}{cccc} K_0L_0 & \underline{K_0L_1} & K_0L_2 & K_0L_3 \\ \\ \underline{K_1L_0} & K_1L_1 & \underline{K_1L_2} & \underline{K_1L_3} \\ \\ K_2L_0 & \underline{K_2L_1} & K_2L_2 & K_2L_3 \\ \\ K_3L_0 & \underline{K_3L_1} & K_3L_2 & K_3L_3 \end{array} \qquad (3.2.7)$$

De onderstreepte operatoren zijn <u>antihermitisch</u>.

De klassen K_0 t/m K_3 en L_0 t/m L_3 corresponderen met de matrices uit de algebra van $L^+(2,R)$ volgens (3.1.4).
De verschillende klassen van kommutatoren uit (3.1.7) corresponderen nu met <u>Kroneckerprodukten</u> van deze matrices.

Zo geldt bijvoorbeeld

$$K_1L_3 \qquad \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} \qquad (3.2.8)$$

De zo verkregen 16 matrices vormen een basis voor de algebra van $L^+(4,R)$.
De kommutatierelaties tussen de operatoren uit de klassen van (3.1.7) zijn nu dezelfde als tussen de bijbehorende (4x4) matrices.

<u>De operator C : $(x \rightarrow y,\ y \rightarrow x)$</u> :

Behalve de ontaarding zoals weergegeven in (3.2.3) geldt ook nog :

$$\omega^2(k,l) = \omega^2(l,k) \qquad (3.2.9)$$

De operator C : $(x \rightarrow y,\ y \rightarrow x)$ is dus eveneens een kommutator.
Op grond hiervan kunnen we een <u>achtvoudige</u> ontaarding aannemen, die het bestaan van 64 klassen van kommutatoren tot gevolg heeft. Men zie hiervoor litt. (2) hfdst.3 pag. 85.

<u>De rotatieoperator</u> :

Zoals in paragraaf 2.2.2 al aangegeven is, is de infinitesimale rotatie in het (k-l) - vlak, aangegeven door

$$\begin{aligned} \delta k &= \varepsilon l \\ \delta l &= -\varepsilon k \end{aligned} \qquad (3.2.10)$$

een kommutator van $\hat{V} = k^2 + l^2$.

In het (x-y) - vlak komt deze rotatie overeen met de infinitesimale rotatie

$$R : \quad \begin{aligned} \delta x &= -\varepsilon y \\ \delta y &= \varepsilon x \end{aligned} \qquad (3.2.11)$$

Vanwege het oneindige aantal lineair onafhankelijke kommutatoren dat op deze wijze is te construeren (alle machten van R zijn lineair onafhankelijke kommutatoren) is een klassenindeling zoals die voor diskrete operatoren geldt hier niet meer te realiseren.

2.4 VEKTORVERGELIJKINGEN IN TWEE DIMENSIES

Vektorsystemen hebben bewegingsvergelijkingen van de vorm

$$\underline{u}_{,tt} = - V\underline{u} \qquad (4.1)$$

waarin V een symmetrische matrix van differentiaaloperatoren voorstelt.

We beschouwen nu een systeem, waarvoor $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix}$

en waarin V_{ij} differentiaaloperatoren met constante coëfficiënten voorstellen.

Op de basis van eigenfuncties, gegeven door

$$\underline{u}(k,l) = \hat{\underline{u}}(k,l) \exp i\ (\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \qquad (4.2)$$

k en l reëel

heeft V de vorm

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{12} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(k,l) & f_{12}(k,l) \\ f_{12}(k,l) & f_{22}(k,l) \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

Voor elk paar (k,l) is $\hat{V}$ een matrix met constante coëfficiënten. Deze kunnen we diagonaliseren.

Noemen we de eigenvektoren van (4.3) $\underline{a}(\underline{k})$ resp. $\underline{b}(\underline{k})$, dan kunnen we stellen dat op de basis van eigenfuncties

$$\begin{aligned} &\underline{a}(\underline{k}) \exp i\ (\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \\ &\underline{b}(\underline{k}) \exp i\ (\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \end{aligned} \qquad (4.4)$$

de operator $\hat{V}$ de vorm krijgt

$$\hat{V}_{diag} = \begin{pmatrix} g_{11}(k,l) & 0 \\ 0 & g_{22}(k,l) \end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

De functies $g_{11}(k,l)$ en $g_{22}(k,l)$ zijn de eigenwaarden bij (4.4).

Terugtransformeren levert nu een diagonale (2x2) operator.

Op deze wijze kunnen we $\dot{V}$ dus schrijven als een diagonaaloperator, ten opzichte van zijn eigenvektoren.

Schrijven we nu $V = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix}$, dan luiden de bewegingsvergelijkingen op deze basis

$$\begin{aligned} \underline{u}_{1,tt} &= V_{11}\, \underline{u}_1 \\ \underline{u}_{2,tt} &= V_{22}\, \underline{u}_2 \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Hierin zijn $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ de betreffende eigenvektoren. De bewegingsvergelijkingen zijn nu ontkoppeld.

De spektra van eigenwaarden van V_{11} en V_{22} worden gegeven door $\omega_1{}^2 = g_{11}(k,l)$, $\omega_2{}^2 = g_{22}(k,l)$.
Zijn deze spektra identiek, d.w.z. $g_{11} = g_{22}$, dan kunnen we stellen dat bij elke eigenwaarde twee eigenvektoren behoren, te weten $\underline{a}(\underline{k})$ en $\underline{b}(\underline{k})$. De ontaarding is dan in elk geval tweevoudig.

De ontaarding is eveneens tweevoudig als voor $g_{11} \neq g_{22}$ de spektra hetzelfde bereik hebben. Nu kunnen we namelijk voor elk paar (k,l) een paar $(\bar{k},\bar{l})$ vinden, zodanig dat geldt :

$$\omega^2 = g_{11}(k,l) = g_{22}(\bar{k},\bar{l}) \qquad (4,7)$$

Nu behoren bij eigenwaarde ω^2 de eigenvektoren $\underline{a}(k,l)$ en $\underline{b}(\bar{k},\bar{l})$.

In beide gevallen bezit de kommutatorverzameling van V een (deel) verzameling van kommutatoren, homeomorf met $L^+(2,R)$.
We kunnen de kommutatorverzameling nu in vier klassen opsplitsen.

3. HET ISOTROPE ELASTISCHE MEDIUM IN TWEE DIMENSIES

3.1 INLEIDING

De in het voorgaande besproken methoden zijn door L. Mooren (2) gedemonstreerd voor enkele scalaire systemen en het isotrope elastische medium in drie dimensies. In dit onderzoek lag de nadruk op de groepentheoretische structuren in de gevonden kommutatorverzamelingen. Eerder was door B. Pots (3) reeds werk gedaan aan enkele vektorsystemen. Hij bestudeerde het ideale elastische medium en enkele daarmee samenhangende systemen :

> De bewegingsvergelijking voor het ideale isotrope elastische medium luidt :
>
> $$\underline{u}_{,tt} - c_1^{\,2} \text{ grad div } \underline{u} + c_2^{\,2} \text{rot rot } \underline{u} = 0 \quad (1.1)$$
>
> Hierin zijn c_1 en c_2 de longitudinale resp. transversale geluidssnelheden.
>
> Als bijzondere gevallen gelden nu :
>
> a. $c_1 = 0$ maxwellvergelijkingen in vacuum
> b. $c_2 = 0$ akoestische golfvergelijking
> c. $c_1 = c_2 = c$ isotrope vektorgolfvergelijking

Door Pots zijn voor deze systemen een aantal Noethertransformaties van de vorm $\delta\underline{u} = K\,\underline{u}$ bepaald, waarbij K een eerste- of tweede orde differentiaaloperator voorstelt. Hij heeft tevens een interpretatie gegeven van de bijbehorende behoudswetten.

Het doel van ons onderzoek is deze twee onderzoeken te completeren door voor enkele scalaire- en vektorsystemen een basis voor de kommutatorverzameling van de dynamische operator vast te stellen.
Uiteindelijk willen we meer weten over het isotrope elastische medium in twee dimensies. Het blijkt dat inzicht in de structuur van de kommutatorverzameling en zijn bewegingsconstanten verkregen kan worden uit de bestudering van enkele eenvoudige systemen. Dit blijkt wanneer we de dynamische operator van het isotrope medium diagonaliseren.

3.2 EIGENWAARDEN EN EIGENVEKTOREN

De dynamische operator voor het isotrope elastische medium luidt :

$$V = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_x^{\,2} + \mu\partial_y^{\,2} & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_y \\ (\lambda + \mu)\partial_x\partial_y & (\lambda + 2\mu)\partial_y^{\,2} + \mu\partial_x^{\,2} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

λ en μ zijn de (constante) Lamé moduli.

Ten opzichte van een basis van eigenfuncties van de differentiaties heeft V de vorm van een matrix met constante coëfficiënten. Een dergelijke basis vormen bijvoorbeeld de vlakke golfoplossingen met golfvektor $\underline{k}$:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \exp i\ (\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \qquad (2.2)$$

Ten opzichte hiervan heeft V de vorm

$$V = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)k^2 + \mu l^2 & (\lambda + \mu)kl \\ (\lambda + \mu)kl & (\lambda + 2\mu)l^2 + \mu k^2 \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

We kunnen deze matrix diagonaliseren en vinden als eigenwaarden en - vektoren :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= (\lambda + 2\mu)\ (k^2 + l^2) & \underline{a}_1 &= \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \\ \omega_2^2 &= \mu\ (k^2 + l^2) & \underline{a}_2 &= \begin{pmatrix} l \\ -k \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (2.4)$$

De eigenvektoren zijn <u>orthogonaal</u>.

Ten opzichte van de eigenfunkties

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \exp i\ (\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \\ \underline{u}_2 &= \begin{pmatrix} l \\ -k \end{pmatrix} \exp i\ (\underline{k}.x - \omega t) \end{aligned} \qquad (2.5)$$

heeft V de diagonaalvorm

$$V_{diag} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\ (k^2 + l^2) & 0 \\ 0 & \mu\ (k^2 + l^2) \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

Deze kunnen we schrijven in operatorvorm

$$V = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\,(\partial_x^2 + \partial_y^2) & 0 \\ 0 & \mu\,(\partial_x^2 + \partial_y^2) \end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

Opmerking : De eigenfuncties van de gedaante van $\underline{u}_1$ beschrijven longitudinale golven. De eigenfuncties van de gedaante van $\underline{u}_2$ beschrijven transversale golven. Uit (2.7) blijkt dat beide typen golven verschillende voortplantingssnelheden hebben.

3.3 DE ISOTROPE VEKTORGOLFVERGELIJKING IN TWEE DIMENSIES

Voordat we van (2.7) de kommutatorverzameling construeren, zullen we aandacht besteden aan een iets eenvoudiger systeem, te weten de isotrope golfvergelijking.

De bewegingsvergelijkingen van dit systeem luiden :

$$\underline{u}_{,tt} = - V\,\underline{u} \tag{3.1}$$

waarbij

$$V = \begin{pmatrix} (\partial_x^2 + \partial_y^2) & 0 \\ 0 & (\partial_x^2 + \partial_y^2) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Voor een operator $K = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ geldt nu :

$$\lfloor K,V \rfloor = \begin{pmatrix} \lfloor A,\nabla^2 \rfloor & \lfloor B,\nabla^2 \rfloor \\ \lfloor C,\nabla^2 \rfloor & \lfloor D,\nabla^2 \rfloor \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 \, .$$

Als K een kommutator is van V, dan moeten A, B, C en D kommutatoren zijn van ∇^2 . Uit de verzameling van kommutatoren van ∇^2 zijn dus alle kommutatoren van V samen te stellen.

Een basis voor de kommutatorverzameling van V kunnen we als volgt construeren :

De algebra van kommutatoren van ∇^2 noemen we K. Alle elementen van K vermenigvuldigen we met elk van de vier onderstaande matrices :

$$\underset{P_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} ; \underset{P_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} ; \underset{P_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} ; \underset{P_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \tag{3.4}$$

We krijgen zo vier klassen van kommutatoren. Uit lineaire kombinaties is elke willekeurige kommutator vna V samen te stellen. De matrices P_1 t/m P_4 vormen de algebra van $L^+(2,R)$.

3.4 DE "ANISOTROPE" VEKTORGOLFVERGELIJKING

Iest ingewikkelder ligt dit in het geval van een dynamische operator van de vorm

$$V = \begin{pmatrix} \alpha(\partial_x^2 + \partial_y^2) & 0 \\ 0 & \beta(\partial_x^2 + \partial_y^2) \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

Voor $\alpha = \lambda + 2\mu$, $\beta = \mu$ is deze operator identiek aan (2.7).

De bewegingsvergelijking $\underline{u}_{,tt} = - V \underline{u}$ met V als in (4.1) hebben we bij gebrek aan beter de "anisotrope" vektorgolfvergelijking gedoopt. In feite gaat het hier om een kombinatie van twee scalaire golfvergelijkingen met verschillende voortplantingssnelheden.

Als we schrijven $K = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dan is K een kommutator

van V als geldt :

$$\begin{aligned} &- [A,\nabla^2] = 0 \\ &- [D,\nabla^2] = 0 \\ &- \beta B\nabla^2 - \alpha \nabla^2 B = 0 \rightarrow \nabla^2 B = (\beta/\alpha) B\nabla^2 = \gamma^2 B\nabla^2 \\ &- \alpha C\nabla^2 - \beta \nabla^2 C = 0 \rightarrow \nabla^2 C = (\alpha/\beta) C\nabla^2 = \varepsilon^2 C\nabla^2 \end{aligned} \qquad (4.2)$$

A en D moeten dus kommutatoren zijn van ∇^2. Voor B en C kunnen we geschikte operatoren vinden in de vorm van dilataties.

Een dilatatie G is gedefinieerd als volgt :

$$G f(x,y) = f(\theta x, \theta y) \text{ met } \theta \text{ constant.} \qquad (4.3)$$

Er geldt nu : $\nabla^2 G f(x,y) = \theta^2 G \nabla^2 f(x,y)$ (4.4)

Door geschikte keuze van θ kunnen we nu operatoren B en C construeren die voldoen aan (4.2) :

$$B\, f(x,y) = f(\gamma x,\gamma y) \qquad \gamma^2 = \beta/\alpha \quad \gamma>0 \qquad (4.5)$$

$$C\, f(x,y) = f(\varepsilon x,\varepsilon y) \qquad \varepsilon^2 = \alpha/\beta \quad \varepsilon>0 \qquad (4.6)$$

Er geldt : $B = C^{-1}$.

We willen nu een basis van hermitische en antihermitische kommutatoren construeren voor de kommutatorverzameling van V, analoog aan hetgeen beschreven is voor de isotrope golfvergelijking.

Met de vier matrixoperatoren

$$\underset{Q_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} ; \underset{Q_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} ; \underset{Q_3}{\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}} ; \underset{Q_4}{\begin{pmatrix} 0 & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}} \qquad (4.7)$$

kunnen we een basis van kommutatoren van V construeren door ze te vermenigvuldigen met de elementen uit de algebra van kommutatoren van ∇^2.

Zo zijn bijvoorbeeld operatoren van de vorm

$$Q_3 A = \begin{pmatrix} 0 & BA \\ CA & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Q_4 A = \begin{pmatrix} 0 & BA \\ -CA & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.8)$$

waarbij geldt $[A,\nabla^2] = 0$, kommutatoren van V.

Er geldt namelijk

$$\begin{aligned} &\nabla^2\ (BA)\ f(x,y) = \gamma^2 B\ \nabla^2\ A\ f(x,y) = \gamma^2 (BA)\ \nabla^2\ f(x,y) \\ \text{en} \quad &\nabla^2\ (CA)\ f(x,y) = \varepsilon^2 C\ \nabla^2\ A\ f(x,y) = \varepsilon^2 (CA)\ \nabla^2\ f(x,y) \end{aligned} \qquad (4.9)$$

De operatoren BA en CA voldoen dus aan (4.2).

Ook operatoren van de vorm

$$A\,Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ AC & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A\,Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -AC & 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

zijn kommutatoren van V.

Er geldt namelijk

$$\begin{aligned} AB\, f(x,y) &= \gamma^{-n}(BA)\, f(x,y) \\ AC\, f(x,y) &= \varepsilon^{-n}(CA)\, f(x,y) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Hierin stelt n de <u>dimensie</u> voor van de operator A.

Zo heeft bijvoorbeeld de operator $(\partial_x)^n$ de dimensie $-n$
en de operator y^n de dimensie $+n$.

We kunnen nu schrijven

$$A\,Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-n}(BA) \\ \varepsilon^{-n}(CA) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A\,Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-n}(BA) \\ -\varepsilon^{-n}(CA) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

$A\,Q_3$ en $A\,Q_4$ zijn nu lineaire kombinaties van operatoren van het type (4.8), die kommutatoren zijn van V.

In de basis van kommutatoren van V, gegeven door het stelsel

$$\underset{Q_1A}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}} ; \underset{Q_2A}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}} ; \underset{Q_3A}{\begin{pmatrix} 0 & BA \\ CA & 0 \end{pmatrix}} ; \underset{Q_4A}{\begin{pmatrix} 0 & BA \\ -CA & 0 \end{pmatrix}} \tag{4.13}$$

met $[A,\nabla^2]=0$, zijn echter de operatoren van het type Q_3A en Q_4A niet hermitisch of antihermitisch.

Om deze reden kiezen we als basis het stelsel van hermitische en antihermitische kommutatoren, gegeven door

$$\underset{S_1}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}} ; \underset{S_2}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}} ; \underset{S_3}{\begin{pmatrix} 0 & AB \\ \varepsilon^2 CA & 0 \end{pmatrix}} ; \underset{S_4}{\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -\varepsilon^2 CA & 0 \end{pmatrix}} \qquad (4.14)$$

met $\lfloor A,\nabla^2 \rfloor = 0$, $\varepsilon^2 = \alpha/\beta$.

Een willekeurige kommutator van V is nu (eventueel met behulp van (4.12)) te schrijven als lineaire combinatie van operatoren uit (4.14).

We zullen nu laten zien dat S_3 antihermitisch is voor antihermitische A :

Er geldt : $\int d\underline{x}\ \underline{u}\ S_3\ \underline{v}$

$$= \int d\underline{x}\ (u_1\ AB\ v_2 + u_2\ \varepsilon^2 CA\ v_1)$$

$$= \int d\underline{x}\ (-B\ v_2\ A\ u_1 - A\ v_1\ B\ u_2)$$

$$= \int d\underline{x}\ (-v_2\ \varepsilon^2 CA\ u_1 - v_1\ AB\ u_2)$$

$$= - \int d\underline{x}\ \ \underline{v}\ S_3\ \underline{u} \qquad \text{(q.e.d)} \qquad (4.15)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de eigenschap :

$$\int d\underline{x}\ \ v_1\ B\ u_2 = \int d\underline{x}\ u_2\ \varepsilon^2 C\ v_1 \qquad (4.16)$$

Deze eigenschap is te bewijzen door overgang op de nieuwe integratievariabelen $\overline{x} = \gamma x$, $\overline{y} = \gamma y$.

Voor de operatoren S_1 t/m S_4 uit (4.14) geldt nu :

A hermitisch : S_1 , S_2 , S_3 hermitisch
S_4 antihermitisch

A antihermitisch : S_1 , S_2 , S_3 antihermitisch
S_4 hermitisch.

Deze eigenschappen zijn te bewijzen, analoog aan (4.15).

3.5 KOMMUTATOREN VAN HET ISOTROPE ELASTISCHE MEDIUM

Zoals we in paragraaf 3.2 hebben laten zien, kunnen we de dynamische operator van het isotrope elastische medium schrijven als een diagonaalmatrix. Daartoe moeten we overgaan op een basis van longitudinale en transversale golfoplossingen, aangegeven door $\underline{u}_L(\underline{x},t)$ resp. $\underline{u}_T(\underline{x},t)$.

Ten opzichte van deze basis heeft V de vorm

$$V = \begin{Bmatrix} (\lambda + 2\mu)\nabla^2 & 0 \\ 0 & \mu\nabla^2 \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

De bewegingsvergelijkingen luiden nu

$$\underline{u}_{L,tt} = (\lambda + 2\mu)\, \nabla^2\, \underline{u}_L \tag{5.2}$$

en $$\underline{u}_{T,tt} = \mu\nabla^2\, \underline{u}_T \tag{5.3}$$

Ondanks het feit dat $\underline{u}_L(\underline{x},t)$ en $\underline{u}_T(\underline{x},t)$ vektorfuncties zijn, kunnen deze twee bewegingsvergelijkingen opgevat worden als scalaire golfvergelijkingen.
Dit is als volgt in te zien :

Een scalaire golf met frequentie ω^2 wordt gekenmerkt door de parameters k en l, die samen de golfvektor $\underline{k}$ vormen, en een amplitude A :

$$u(\underline{x},t) = A \exp i\,(\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \tag{5.4}$$

Dit geldt ook voor de transversale en longitudinale golfoplossingen in twee dimensies :
Deze hebben de gedaante

$$\underline{u}_T(\underline{x},t) = A \begin{pmatrix} l \\ -k \end{pmatrix} \exp i\,(\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \tag{5.5}$$

$$\underline{u}_L(\underline{x},t) = A \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \exp i\,(\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \tag{5.6}$$

Dus ondanks het feit dat $\underline{u}_T$ en $\underline{u}_L$ vektoren zijn, hebben ze niet meer vrijheidsgraden als scalaire golffuncties in twee dimensies. Beide golfvergelijkingen (5.2) en (5.3) transformeren dus als scalaire golfvergelijkingen.

In het voorgaande hebben we reeds aangegeven hoe een basis geconstrueerd kan worden voor de kommutatorverzameling van (5.1). Deze ziet er uit als volgt :

$$\underset{S_1}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}} ; \underset{S_2}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}} ; \underset{S_3}{\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -\varepsilon^2 CA & 0 \end{pmatrix}} ; \underset{S_4}{\begin{pmatrix} 0 & AB \\ +\varepsilon^2 CA & 0 \end{pmatrix}} \tag{5.7}$$

A is weer een (anti)hermitische kommutator van ∇^2.
B en C zijn gedefinieerd als in (4.5) en (4.6).

Bij diagonalisatie van de dynamische operator zijn we overgegaan op een andere basis. We kunnen nu onderzoeken hoe de verschillende kommutatoren er uit zien ten opzichte van de oorspronkelijke basis. Dit kan het gemakkelijkst in Fouriertaal.

De Fouriergetransformeerde van de overgangsmatrix luidt :

$$\hat{U} = \hat{U}^{-1} = (k^2 + l^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} k & l \\ l & -k \end{pmatrix} \qquad (5.8)$$

zoals onder meer blijkt uit (5.5) en (5.6).

Een willekeurige kommutator kan nu teruggetransformeerd worden als volgt :

$$\hat{\tilde{K}} = \hat{U}^{-1} \hat{K} \hat{U} \qquad (5.9)$$

waarbij $\tilde{K}$ de kommutator voorstelt ten opzichte van de oorspronkelijke coördinaten.

Voor de kommutatoren uit de verschillende klassen levert dit in het algemeen weinig doorzichte resultaten op, behalve voor de kommutator, gegeven door

$$P = (x\partial_y - y\partial_x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.10)$$

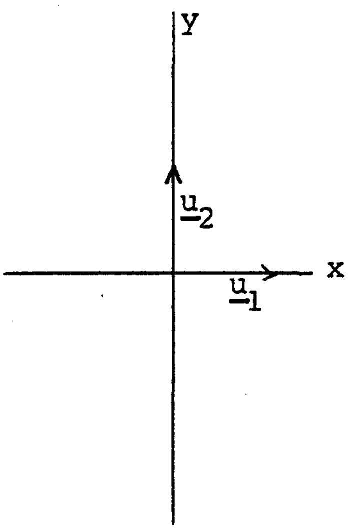
Deze komt in het stelsel ($\underline{u}_T$, $\underline{u}_L$) overeen met een infinitesimale rotatie van het (x,y) - stelsel, het <u>coördinatenstelsel</u>. De beide scalaire bewegingsvergelijkingen (3.2) en (3.3) zijn <u>rotatieinvariant</u>.

Met behulp van de overgangsmatrix U kunnen we nagaan dat deze kommutator ten opzichte van het oorspronkelijke stelsel de onderstaande gedaante heeft :

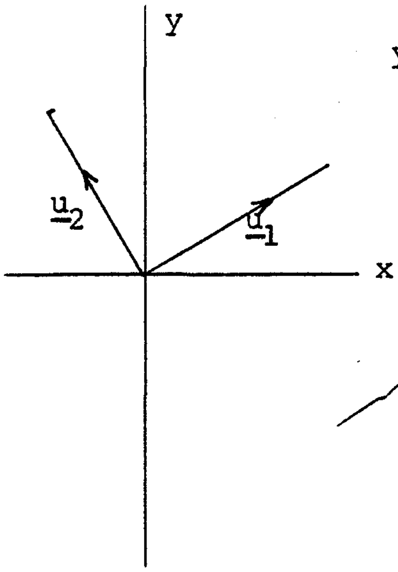
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (x\partial_y - y\partial_x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.11)$$

De operator $\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$ komt overeen met een rotatie van het <u>referentiestelsel</u> (fig. 1, fig.2).

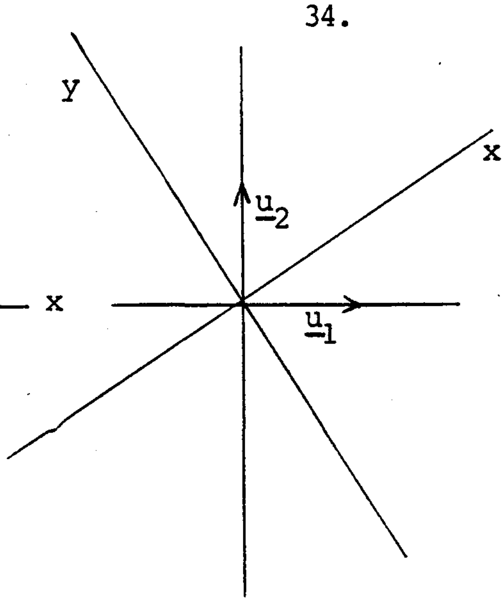
De operator $(x\partial_y - y\partial_x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ komt overeen met een rotatie van het <u>coördinatenstelsel</u> (fig. 3).



figuur 1



figuur 2



figuur 3

Kombinatie van beide operatoren komt dus overeen met een rotatie van referentiestelsel plus coördinatenstelsel. Dit is hetzelfde als een rotatie van het medium in tegengestelde richting.

Conclusie : Elk tweedimensionaal isotroop medium moet een kommutator hebben van het type (5.11).

Door B. Pots (3) is de bewegingsconstante, behorend bij (5.11), geassocieerd met het impulsmoment.

3.6 ZILCHGROOTHEDEN EN RECIPROCITEITSSTELLINGEN

In deze paragraaf willen we enige opmerkingen maken over de verschillende typen van bewegingsconstanten die geassocieerd zijn met de kommutatorklassen S_1 t/m S_4 uit (5.7).
In hoofdstuk 1 is afgeleid dat uit een antihermitische kommutator K^- van de dynamische operator een bewegingsconstante gevonden kan worden met als dichtheid

$$\underline{u}_{,t} . K^- \underline{u} \qquad (6.1)$$

Voor een hermitische kommutator K^+ vinden we een bewegingsconstante met als dichtheid

$$\underline{u}_{,t} . K^+ \underline{u}_{,t} + \underline{u} . K^+ V \underline{u} \qquad (6.2)$$

Dit zijn zogenaamde kwadratische bewegingsconstanten, d.w.z. de dichtheden (6.1) en (6.2) zijn homogeen kwadratische uitdrukkingen in $\underline{u}$ en zijn afgeleiden. Wanneer K^- en K^+ kommutatoren zijn, behorend tot de klassen S_1 en S_2, dus diagonale operatoren, dan zijn de bijbehorende bewegingsconstanten tevens homogeen kwadratisch in de veldvariabelen $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ afzonderlijk. Met $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ worden de oplossingen gegeven van de ontkoppelde bewegingsvergelijkingen (zie paragraaf 1.4) :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{1,tt} &= -V_{11}\underline{u}_1 \\ \underline{u}_{2,tt} &= -V_{22}\underline{u}_2 \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Nu kunnen uit de kwadratische bewegingsconstanten van het type (6.1) en (6.2) precies tweemaal zoveel zogenaamde lineaire bewegingsconstanten worden geconstrueerd:

Als $\underline{u}$ en $\underline{v}$ twee verschillende oplossingen zijn van de bewegingsvergelijking :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{,tt} &= - V\underline{u} \\ \underline{v}_{,tt} &= - V\underline{v} \end{aligned} \qquad (6.4)$$

dan is de uitdrukking $\underline{u}_{,t} . K^- \underline{v} - \underline{u} . K^- \underline{v}_{,t}$ (6.5)

eveneens een dichtheid van een bewegingsconstante.

Er geldt namelijk

$$\partial_t \left(\underline{u}_{,t} . K^- \underline{v} - \underline{u} . K^- \underline{v}_{,t} \right)$$

$$= \underline{u}_{,tt} . K^- \underline{v} + \underline{u}_{,t} . K^- \underline{v}_{,t} - \underline{u}_{,t} K^- \underline{v}_{,t} - \underline{u} . K^- \underline{v}_{,tt}$$

$$= - V\underline{u} . K^- \underline{v} + \underline{u} . K^- V\underline{v} = 0 \qquad (6.6)$$

Hierin is echter nergens gebruik gemaakt van het feit dat K^- antihermitisch is. Dus ook de uitdrukking

$$\underline{u}_{,t} . K^+ \underline{v} - \underline{u} . K^+ \underline{v}_{,t} \qquad (6.7)$$

waarin K^+ hermitisch is, is de dichtheid van een bewegingsconstante.

Op analoge wijze kunnen we laten zien dat de uitdrukkingen

$$\underline{u}_{,t} . K^+ \underline{v}_{,t} + \underline{u} . K^+ V\underline{v} \qquad (6.8)$$

en

$$\underline{u}_{,t} . K^- \underline{v}_{,t} + \underline{u} . K^- V\underline{v} \qquad (6.9)$$

dichtheden zijn van bewegingsconstanten. Bij iedere kommutator van V vinden we zo twee bilineaire bewegingsconstanten.

Wanneer we schrijven

$$\underline{v} = Z\underline{u} \qquad (6.10)$$

waarin $\underline{v}$ een oplossing is van de bewegingsvergelijking, dan moet gelden

$$\underline{v}_{,tt} = (Z\underline{u})_{,tt} = - V(Z\underline{u}) = Z(- V\underline{u}) \qquad (6.11)$$

dus Z moet een kommutator zijn van V.

We kunnen nu de uitdrukkingen (6.5)/(6.7) en (6.8)/(6.9) weer herleiden tot homogeen kwadratische uitdrukkingen in $\underline{u}$.

Voor hermitische Z geldt nu :

$$(6.5) \longrightarrow \underline{u},_t.K^-Z\underline{u},_t - \underline{u}.K^-Z\underline{u},_{tt} = 2\,\underline{u},_t.K^-Z\underline{u} \qquad (6.12)$$

$$(6.7) \longrightarrow \underline{u},_t.K^+Z\underline{u} - \underline{u}.K^+Z\underline{u},_t \;\; \equiv 0 \qquad (6.13)$$

$$(6.8) \longrightarrow \underline{u},_t.K^+Z\underline{u},_t + \underline{u}.K^+ZV\underline{u} \qquad (6.14)$$

$$(6.9) \longrightarrow \underline{u},_t.K^-Z\underline{u},_t + \underline{u}.K^-VZ\underline{u} \;\; \equiv 0 \qquad (6.15)$$

Analoge uitdrukkingen kunnen afgeleid worden voor antihermitische Z.

We gaan nu uit van diagonale kommutatoren K^+ en K^-. De afgeleide bewegingsconstanten (6.12) t/m (6.15) zijn nu homogeen kwadratisch in $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ voor diagonale Z. Dit zijn de bewegingsconstanten behorend tot de klassen S_1 en S_2.

Als Z een van de kommutatoren is uit de klassen S_3 en S_4 dan vinden we bewegingsconstanten die bilineair zijn in $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$. Dit type bewegingsconstanten en behoudswetten worden ook wel reciprociteitswetten genoemd.

In de literatuur (4) is er reeds eerder op gewezen dat een aantal behoudswetten die gevonden zijn bij de bestudering van de Maxwellvergelijkingen en die Zilchwetten genoemd werden, af te leiden zijn uit soortgelijke reciprociteitswetten. Om deze reden worden de bewegingsconstanten, behorend bij kommutatoren uit de klassen S_3 en S_4 ook wel Zilchgrootheden genoemd.

Door B. Pots (3) zijn voor de isotrope golfvergelijking en voor het isotrope elastische medium in drie dimensies soortgelijke Zilchgrootheden gevonden.

De eenvoudigste operatoren uit de klassen S_3 en S_4 zijn Z_1 en Z_2, gedefinieerd als

$$Z_1\underline{u}_1 = \underline{u}_2 \qquad\qquad Z_2\underline{u}_1 = \underline{u}_2$$
$$\text{en} \tag{6.16}$$
$$Z_1\underline{u}_2 = -\underline{u}_1 \qquad\qquad Z_2\underline{u}_2 = \underline{u}_1$$

Hierin is $\underline{u}_1$ een oplossing van bewegingsvergelijking (5.2), dat wil zeggen een functie van de vorm

$$\underline{u}_1 = A \binom{1}{-k} \exp i\,(\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \quad \text{met eigenwaarde}$$

$$\omega^2 = (\lambda + 2\mu)(k^2 + 1^2) \tag{6.17}$$

$\underline{u}_2$ is een oplossing van bewegingsvergelijking (5.3), dat wil zeggen

$$\underline{u}_2 = B \binom{k}{1} \exp i\,(\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \quad \text{met eigenwaarde}$$

$$\omega^2 = \mu(k^2 + 1^2) \tag{6.18}$$

Z_1 is antihermitisch en heeft de gedaante

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & S_x C'B \\ -S_y C'C & 0 \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

waarin $C'f(x,y) = f(y,x)$,

$$B\,f(x,y) = f(\gamma x,\gamma y) \ , \quad \gamma^2 = \mu/(\lambda + 2\mu) \tag{6.20}$$

$$C = B^{-1} \tag{6.21}$$

Z_1 behoort tot klasse S_3.

Analoog geldt voor Z_2 :

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & S_x C'B \\ S_y C'C & 0 \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

Z_2 is hermitisch en behoort tot klasse S_4.

In paragraaf 4.6 zullen we laten zien dat voor willekeurige vektorsystemen in twee dimensies operatoren met analoge eigenschappen te definiëren zijn, die eveneens aanleiding geven tot het bestaan van bilineaire bewegingsconstanten.

4. NIET - ISOTROPE ELASTISCHE MEDIA

4.1 INLEIDING

De in het voorgaande besproken methoden werden toegepast op het isotrope elastische medium. Door overgang op een basis van eigenvektoren van de dynamische operator werd deze in diagonaalvorm gebracht en kon vrij gemakkelijk een basis voor de kommutatorverzameling geconstrueerd worden.
In dit hoofdstuk zullen we een aanzet geven tot uitbreiding van dergelijke methoden naar operatoren van lagere symmetrie. We zullen laten zien welke dynamische operator een tweedimensionaal elastisch medium met vierkantsyymetrie beschrijft. We zullen deze operator diagonaliseren en zo de bewegingsvergelijkingen ontkoppelen.
Het zal blijken dat de zo gevonden dynamische operatoren (voor elke eigenvektor een) niet rotatieinvariant zijn en dat hun spektra niet meer identiek zijn, in tegenstelling tot hetgeen gevonden is voor het isotrope elastische medium. Het zal noodzakelijk blijken in de plaats van k en l een ander stel parameters te kiezen om iets te kunnen zeggen over de nu te construeren kommutatorverzameling.

4.2 ELASTISCHE MEDIA

We beperken ons tot ideale elastische media. Dit houdt in dat voldaan moet zijn aan de wet van Hooke, die luidt:

$$S_{ij} = \sum_{k,l} c_{ijkl}\, e_{kl} \tag{2.1}$$

Hierin is S_{ij} de (symmetrische) spanningstensor,

c_{ijkl} de elasticiteitstensor met constante coëfficiënten,

en e_{kl} de "strain tensor".

Er geldt $e_{kl} = \frac{1}{2}\,(u_{k,l} + u_{l,k})$ (2.2)

Voor tweedimensionale elastische systemen is c_{ijkl} een tensor met negen lineair onafhakelijke componenten, symmetrisch in de indices (i,j) en (k,l).

Voor de dynamische operator geldt nu :

$$V_{ij} = \sum_j \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{k,l} c_{ijkl}\, \partial_{x_j} \partial_{x_l} \qquad (2.3)$$

Wanneer we nu media beschouwen die een zekere symmetrie bezitten, dan neemt het aantal lineair onafhankelijke componenten in de elasticiteitstensor af. Dit is het gemakkelijkst in te zien bij beschouwing van de energiedichtheid.

Deze luidt $\quad w = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} c_{ijkl}\, e_{ij} e_{kl} \qquad (2.4)$

We bekijken nu een medium dat symmetrisch is onder reflecties aan de x- en de y- as.

Als gedefinieerd is $\quad S_y\, f(x,y) = f(x,-y)$

dan moet $\quad S_y\, e_{xy} = -\, e_{xy} \qquad (2.5)$

Evenzo geldt voor $\quad S_x\, f(x,y) = f(x,-y)$:

$$S_x\, e_{xy} = -\, e_{xy} \qquad (2.6)$$

De energiedichtheid blijft slechts hetzelfde onder deze reflecties als geldt:

$$c_{xxxy} \longrightarrow -c_{xxxy}$$

$$\text{en} \quad c_{yyyx} \longrightarrow -c_{yyyx} \qquad (2.7)$$

Voor een reflectieinvariant medium echter blijven de coëfficiënten van de elasticiteitstensor hetzelfde onder reflecties.

Aan deze beide voorwaarden kan slechts voldaan worden door

$$c_{xxxy} = c_{xxyx} = c_{yyyx} = c_{yyxy} = 0 \qquad (2.8)$$

De elasticiteitstensor heeft nu nog slechts 9 - 4 = 5 lineair onafhankelijke coëfficiënten.

Voor een vierkantsymmetrisch medium moet verder gelden dat het medium symmetrisch is onder verwisseling van x en y . Dit heeft tot gevolg dat geldt

$$\begin{aligned} c_{xxyy} &= c_{yyxx} \\ c_{xyxy} &= c_{yxyx} \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Er blijven nu nog slechts <u>drie</u> lineair onafhankelijke coëfficiënten over.

Met het bovenstaande is nu na te gaan dat de dynamische operator van het vierkantsymmetrische elastische medium te schrijven is als

$$V = \begin{pmatrix} \alpha\partial_x^2 + \gamma\partial_y^2 & (\beta+\gamma)\partial_x\partial_y \\ (\beta+\gamma)\partial_x\partial_y & \alpha\partial_y^2 + \gamma\partial_x^2 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

α, β en γ zijn constant.

Voor een <u>isotroop</u> elastisch medium is tenslotte nog het bestaan van een lineaire relatie tussen α, β en γ te bewijzen, van de vorm

$$\alpha = \beta + 2\gamma \qquad (2.11)$$

Een isotroop medium heeft slechts <u>twee</u> lineair onafhankelijke coëfficiënten. Dit zijn de Lamé coëfficiënten λ en μ.
Voor een uitgebreidere behandeling van het bovenstaande zie

Feynman : The Feynman Lectures on Physics, (1964)
deel 2 pag. 39 - 4 e.v.

4.3 HET VIERKANTSYMMETRISCHE ELASTISCHE MEDIUM ; EIGENWAARDEN EN EIGENVEKTOREN

Ten opzichte van een basis van vlakke golfoplossingen van de vorm

$$\underline{u} = \binom{a_1(k,l)}{a_2(k,l)} \exp i\,(\underline{k}.\underline{x} - \omega t)$$

heeft de dynamische operator (2.10) de vorm

$$V = \begin{pmatrix} \alpha k^2 + \gamma l^2 & (\beta + \gamma)kl \\ (\beta + \gamma)kl & \alpha l^2 + \gamma k^2 \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

De eigenwaarden zijn nu

$$\omega_1^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)(k^2 + l^2) + \tfrac{1}{2}\left[(\alpha - \gamma)^2(k^2 - l^2)^2 + 4(\beta + \gamma)^2k^2l^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)(k^2 + l^2) - \tfrac{1}{2}\left[(\alpha - \gamma)^2(k^2 - l^2)^2 + 4(\beta + \gamma)^2k^2l^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(3.2) / (3.3)

De bijbehorende eigenvektoren $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ luiden :

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -(\beta + \gamma)kl \\ \alpha k^2 + \gamma l^2 - \omega_1^2 \end{pmatrix} \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -(\alpha k^2 + \gamma l^2 - \omega_1^2) \\ -(\beta + \gamma)kl \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Aan (3.2) en (3.3) is gemakkelijk te zien dat beide eigenwaarden in elk geval <u>achtvoudig ontaard</u> zijn:

Voor ω_1^2 en ω_2^2 geldt :

$$\begin{aligned} &\omega^2(k,l) = \omega^2(-k,l) = \omega^2(k,-l) = \omega^2(-k,-l) \\ &= \omega^2(l,k) = \omega^2(-l,k) = \omega^2(l,-k) = \omega^2(-l,-k) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Kommutatoren zijn nu in elk geval

$$C\ ,\ S_x\ ,\ S_y\ ,\ S_xS_y$$

$$\text{en verder} \quad I\ ,\ \partial_x\ ,\ \partial_y\ ,\ \partial_x\partial_y \qquad (3.6)$$

Voor elk van de beide ontkoppelde bewegingsvergelijkingen

$$\underline{u}_{1,tt} = \omega_1^2\, \underline{u}_1 = V\, \underline{u}_1$$
$$\text{en} \quad \underline{u}_{2,tt} = \omega_2^2\, \underline{u}_2 = V\, \underline{u}_2 \qquad (3.7)$$

kunnen we nu met (produkten van) kommutatoren uit (3.6) 64 klassen van kommutatoren konstrueren op dezelfde wijze als gedemonstreerd in paragraaf 3.2.

De zo gevonden kommutatoren kunnen geschreven worden als lineaire kombinaties van kommutatoren van de vorm

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

waarbij geldt

$$[\hat{A}, \omega_1^2] = [\hat{A}, \omega_2^2] = 0 \ , \qquad (3.9)$$

$\hat{A}$ is de Fouriergetransformeerde van een kommutator van het type (3.6).

Een andere kommutator, eveneens diagonaal, is de operator

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad [C, \omega_1^2] = [D, \omega_2^2] = 0 \qquad (3.10)$$

waarbij $\hat{C}$ en $\hat{D}$ de Fouriergetransformeerden van de <u>pseudorotaties</u> bij ω_1^2 en ω_2^2 voorstellen.

$\hat{C}$ wordt gevonden uit de transformatie

$$\delta k = \varepsilon\omega^2_{1,l}$$
$$\delta l = -\varepsilon\omega^2_{1,k} \qquad (3.11)$$

Er geldt namelijk

$$\delta\underline{u}_1 = \underline{u}_{1,k}\delta k + \underline{u}_{1,l}\delta l = \hat{C}\,\underline{u}_1 \qquad (3.12)$$

Op dezelfde wijze vinden we $\hat{D}$ uit de transformatie

$$\begin{aligned} \delta k &= \varepsilon\omega^2_{2,l} \\ \delta l &= -\varepsilon\omega^2_{2,k} \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Er geldt $\quad \delta\underline{u}_2 = \hat{D}\,\underline{u}_2 = \underline{u}_{2,k}\delta k + \underline{u}_{2,l}\delta l \qquad (3.14)$

De op deze wijze uit (3.2) en (3.3) te berekenen uitdrukkingen voor $\hat{C}$ en $\hat{D}$ zijn echter te ingewikkeld om een eenvoudige interpretatie mogelijk te maken.

4.4 PSEUDOROTATIES EN HERPARAMETRISERING

We kunnen nu trachten door overgang op een ander stel parameters tot inzichtelijker resultaten te komen.
Als nieuwe parameters kiezen we

$$\omega = \omega(k,l) \qquad \omega > 0$$
$$\phi = \arctan l/k \tag{4.1}$$

De parameter ϕ komt dus overeen met de richting waarin een golfmode met golfvektor $\underline{k}$ zich voortplant.

De eigenvektoren
$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \underline{a}(k,l) \exp i\,(\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \\ \underline{u}_2 &= \underline{b}(k,l) \exp i\,(\underline{k}.\underline{x} - \omega t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

krijgen ten opzichte van deze nieuwe parameters de gedaante :

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \underline{a}(\omega,\phi) \exp i\,\lambda_1(\omega,\phi)\ (x\cos\phi + y\sin\phi) \\ \underline{u}_2 &= \underline{b}(\omega,\phi) \exp i\,\lambda_2(\omega,\phi)\ (x\cos\phi + y\sin\phi) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Er geldt :
$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(\omega,\phi)\cos\phi &= k \\ \lambda_1(\omega,\phi)\sin\phi &= l \end{aligned}\right\} \quad k^2 + l^2 = \lambda_1^2(\omega,\phi) \tag{4.4}$$

De functie $\lambda_1(\omega,\phi)$ komt dus overeen met de lengte van golfvektor $\underline{k}$ van een oplossing van de vorm (4.2). Hetzelfde geldt voor $\lambda_2(\omega,\phi)$.

In het algemeen kan voor systemen met een dynamische operator V die bestaat uit een symmetrische (2x2) matrix van tweede orde differentiaaloperatoren bewezen worden dat de eigenvektoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ en de functies $\lambda_1(\omega,\phi)$ en $\lambda_2(\omega,\phi)$ de volgende gedaante hebben :

$$\underline{a}(\omega,\phi) = \underline{a}(\phi) \qquad \lambda_1(\omega,\phi) = \omega\lambda_1'(\phi)$$
$$\underline{b}(\omega,\phi) = \underline{b}(\phi) \qquad \lambda_2(\omega,\phi) = \omega\lambda_2'(\phi) \qquad (4.5)$$

De eigenvektoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ zijn dus <u>onafhankelijk</u> van ω.
De functies $\lambda_1'(\phi)$ en $\lambda_2'(\phi)$ kunnen beschouwd worden als de <u>gereduceerde</u> lengte van golfvektor $\underline{k}$.

Om (4.5) te bewijzen moeten we de uitdrukkingen (4.3) invullen in de bewegingsvergelijking

$$\underline{u}_{tt} = -V\,\underline{u} \qquad (4.6)$$

Voor $\underline{u}_1$ vinden we zo

$$\omega^2\underline{u}_1 = -V\,\underline{u}_1 \qquad (4.7)$$

Dit kunnen we herleiden tot

$$\omega^2 a_1 = (\lambda_1')^2(g(\phi)a_1 + h(\phi)a_2) \qquad (4.8)$$

$$\omega^2 a_2 = (\lambda_1')^2(h(\phi)a_1 + j(\phi)a_2) \qquad (4.9)$$

De vorm van de functies $g(\phi)$, $j(\phi)$ en $h(\phi)$ wordt bepaald door de concrete gedaante van de operator V.

Zo geldt bijvoorbeeld

$$V_{12}(\underline{u}_1)_2 = V_{12}(\partial_x,\partial_y)\; a_2(\omega,\phi) \exp i\, \lambda_1(\omega,\phi)(x\cos\phi + y\sin\phi)$$
$$= -(\lambda_1)^2\, h(\phi)\; a_2(\omega,\phi) \exp i\, \lambda_1(\omega,\phi)(x\cos\phi + y\sin\phi)$$
$$(4.10)$$

waarbij V_{12} een tweede orde differentiaaloperator voorstelt.

Opdat deze vergelijkingen (4.8) en (4.9) in a_1 en a_2 een oplossing hebben, moet de determinant van de coëfficiëntenmatrix nul zijn :

Er moet gelden

$$\omega^4 - \omega^2\lambda_1^2 \; (g(\phi) + j(\phi)\;) + \lambda_1^4 \; (\; g(\phi)j(\phi) - h^2(\phi)\;) = 0 \qquad (4.11)$$

Hieruit blijkt dat moet gelden :

$$\lambda_1 = \omega \; f(\phi) = \omega\lambda_1'(\phi) \qquad (4.12)$$

waarbij $f(\phi)$ bepaald wordt door de functies $g(\phi)$, $j(\phi)$ en $h(\phi)$.

Vullen we deze algemene uitdrukking voor λ_1 in de vergelijkingen (4.8)/(4.9) in, dan zien we dat de factor ω^2 hierin wegvalt.
De componenten van $\underline{a}$ zijn dus <u>onafhankelijk</u> van ω.

Een soortgelijk argument geldt voor de eigenvektor $\underline{b}$ en de functie $\lambda_2(\omega,\phi)$.

Aangezien V een <u>symmetrische</u> (2x2) matrix is, zijn de eigenvektoren $\underline{a}(\phi)$ en $\underline{b}(\phi)$ <u>orthogonaal.</u> We kunnen ze dus schrijven als

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} -\sin\theta(\phi) \\ \cos\theta(\phi) \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} \cos\theta(\phi) \\ \sin\theta(\phi) \end{pmatrix} \qquad (4.13)$$

De eigenfuncties $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ in (4.3) krijgen nu de gedaante

$$\begin{cases} \underline{u}_1(\omega,\phi;x,y) = \begin{pmatrix} -\sin\theta(\phi) \\ \cos\theta(\phi) \end{pmatrix} \exp i\omega\lambda_1'(\phi) \;(x\cos\phi + y\sin\phi) & (4.14) \\[2ex] \underline{u}_2(\omega,\phi;x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta(\phi) \\ \sin\theta(\phi) \end{pmatrix} \exp i\omega\lambda_2'(\phi) \;(x\cos\phi + y\sin\phi) & (4.15) \end{cases}$$

Er geldt : $V\,\underline{u}_1(\omega,\phi;x,y) = \omega^2\underline{u}_1$ (4.16)

$$V\,\underline{u}_2(\omega,\phi;x,y) = \omega^2\underline{u}_2 \tag{4.17}$$

Vullen we nu in $V = \begin{pmatrix} \alpha\partial_x^2 + \gamma\partial_y^2 & (\beta+\gamma)\partial_x\partial_y \\ (\beta+\gamma)\partial_x\partial_y & \alpha\partial_y^2 + \gamma\partial_x^2 \end{pmatrix}$

dan gaat (4.16) over in

$$\begin{cases} -\sin\theta = (\lambda_1')^2\left[(\alpha\cos^2\phi + \gamma\sin^2\phi).-\sin\theta + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin2\phi\,\cos\theta\right] & (4.18) \\ \cos\theta = (\lambda_1')^2\left[-\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin2\phi\,\sin\theta + (\alpha\sin^2\phi + \gamma\cos^2\phi)\cos\theta\right] & (4.19) \end{cases}$$

(Deze vergelijkingen zijn analoog aan (4.8)/(4.9)).

Door nu (4.18) te vermenigvuldigen met $\cos\theta$ en (4.19) met $\sin\theta$ en beide bij elkaar op te tellen vinden we de volgende relatie tussen θ en ϕ:

$$\tan2\theta = \frac{(\beta+\gamma)}{\alpha-\gamma}\tan2\phi \tag{4.20}$$

Trekken we (4.18) en (4.19) na vermenigvuldiging met $\cos\theta$ resp. $\sin\theta$ van elkaar af, dan vinden we

$$\sin2\theta = (\lambda_1')^2\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin2\theta - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin2\phi\right] \tag{4.21}$$

wat herleid kan worden tot

$$(\alpha+\gamma)(\lambda_1')^2 = 2 + (\beta+\gamma)\frac{\sin2\phi}{\sin2\theta} \tag{4.22}$$

Uit (4.20) kan verder afgeleid worden dat geldt :

$$\sin 2\theta = \frac{\tan 2\phi}{(p^2 + \tan^2 2\phi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin 2\phi}{(p^2\cos^2 2\phi + \sin^2 2\phi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{met} \quad p = \frac{(\alpha-\gamma)}{(\beta+\gamma)} \tag{4.23}$$

Dit is weer te herleiden tot

$$\sin 2\theta = \frac{\sin 2\phi}{(a + b\cos 4\phi)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{met} \quad \begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}(p^2 + 1) \\ b &= \tfrac{1}{2}(p^2 - 1) \end{aligned} \tag{4.24}$$

(4.22) wordt nu dus

$$(\alpha+\gamma)(\lambda_1')^2 = 2 + (\beta+\gamma)(a + b\cos 4\phi)^{\frac{1}{2}} \tag{4.25}$$

Ofwel

$$(\lambda_1')^2 = \frac{2}{(\alpha+\gamma)} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}(a + b\cos 4\phi)^{\frac{1}{2}} \tag{4.26}$$

In principe zijn nu met (4.20) en (4.26) de functies $\lambda_1'(\phi)$ en $\theta(\phi)$ bekend, en daarmee (met (4.14) de eigenfunctie $\underline{u}_1$.

Op dezelfde wijze kunnen we te werk gaan in (4.17).
We vinden hier weer

$$\tan 2\theta = \frac{\beta+\gamma}{\alpha-\gamma}\tan 2\phi \tag{4.27}$$

en verder

$$(\lambda_2')^2 = \frac{2}{(\alpha+\gamma)} - \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}(a + b\cos 4\phi)^{\frac{1}{2}} \tag{4.28}$$

We kunnen nu nagaan hoe een pseudorotatie er uit ziet in deze nieuwe parameters :
Algemeen geldt voor infinitesimale transformaties :

$$\delta\underline{u}_1(\omega,\phi) = \underline{u}_{1,\omega}\delta\omega + \underline{u}_{1,\phi}\delta\phi$$
$$\delta\underline{u}_2(\omega,\phi) = \underline{u}_{2,\omega}\delta\omega + \underline{u}_{2,\phi}\delta\phi \qquad (4.29)$$

We beschouwen echter slechts transformaties die ω^2 invariant laten : $\delta\omega = 0$. Een pseudorotatie is dus een transformatie van de vorm

$$\delta\underline{u}_1 = \underline{u}_{1,\phi}\delta\phi$$
$$\delta\underline{u}_2 = \underline{u}_{2,\phi}\delta\phi \qquad \text{met} \quad \delta\phi := \varepsilon \qquad (4.30)$$

Voor eigenvektoren van de algemene gedaante (4.14) vinden we nu :

$$\delta\underline{u}_1 = \varepsilon\Big\{\underline{a}_{,\phi}(\phi)\ \exp i\omega\ \lambda_1'(\phi)\ (x\cos\phi + y\sin\phi)$$
$$+i\Big[\omega\ \lambda'_{1,\phi}(\phi)\ (x\cos\phi + y\sin\phi)\ \underline{a}(\phi)\ \exp i\omega\ \lambda_1'(\phi)(x\cos\phi + y\sin\phi)$$
$$+\omega\ \lambda_1'(\phi)\ (-x\sin\phi + y\cos\phi)\ \underline{a}(\phi)\ \exp i\omega\ \lambda_1'(\phi)(x\cos\phi + y\sin\phi)\Big]\Big\}$$
$$= \varepsilon\ (A + B + C)\ \underline{u}_1. \qquad (4.31)$$

De analoge uitdrukking voor $\underline{u}_2$ schrijven we als

$$\underline{u}_2 = \varepsilon(A' + B' + C')\ \underline{u}_2 \qquad (4.32)$$

We kunnen nu nagaan hoe de operatoren A, B en C en A', B' en C' er in concreto uitzien.

1. De transformatie $\delta\underline{u}_1 = \varepsilon A\, \underline{u}_1$, $\delta\underline{u}_2 = \varepsilon\, A'\underline{u}_2$

Volgens (4.31) en (4.32) zijn $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ gedefinieerd als

$$\delta\underline{u}_1 = \varepsilon\, \underline{a}_{,\phi}(\phi)\ \exp i\omega\, \lambda_1'(\phi)\ (x\cos\phi + y\sin\phi) \qquad (4.33)$$

$$\delta\underline{u}_2 = \varepsilon\, \underline{b}_{,\phi}(\phi)\ \exp i\omega\, \lambda_2'(\phi)\ (x\cos\phi + y\sin\phi) \qquad (4.34)$$

met $\underline{a} = \begin{matrix} -\sin\theta(\phi) \\ \cos\theta(\phi) \end{matrix}$, $\underline{b} = \begin{matrix} \cos\theta(\phi) \\ \sin\theta(\phi) \end{matrix}$

Er geldt nu : $\underline{a}_{,\phi} = -\,\underline{b}\,\frac{d\theta}{d\phi}$, $\underline{b}_{,\phi} = \underline{a}\,\frac{d\theta}{d\phi}$ (4.35)

Uit (4.20) volgt :

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{1}{a + b\cos 4\phi} \quad \text{met} \quad \begin{matrix} a = \frac{1}{2}(P^2 + 1) \\ b = \frac{1}{2}(p^2 - 1) \end{matrix} \qquad (4.36)$$

We vinden dus :

$$\begin{cases} \delta\underline{u}_1 = -\varepsilon\,\frac{d\theta}{d\phi}\,\underline{b}(\phi)\ \exp i\omega\, \lambda_1'\ (x\cos\phi + y\sin\phi) & (4.37) \\ \delta\underline{u}_2 = \varepsilon\,\frac{d\theta}{d\phi}\,\underline{a}(\phi)\ \exp i\omega\, \lambda_2'\ (x\cos\phi + y\sin\phi) & (4.38) \end{cases}$$

Schrijven we nu $\eta = -\lambda_1'(\phi)\ /\ \lambda_2'(\phi)$, $\zeta = 1/\eta$,

dan kunnen (4.37) en (4.38) herleid worden tot

$$\delta\underline{u}_1 = -\varepsilon\,\frac{d\theta}{d\phi}\ \underline{b}(\phi)\ \exp i\omega\, \lambda_2'(\phi)\ \Big((1/\eta)x\cos\phi + (1/\eta)y\sin\phi\Big)$$

$$= \varepsilon\,\frac{d\theta}{d\phi}\ \underline{u}_2(\omega,\phi;\bar{x},\bar{y})$$

met $\bar{x} = (1/\eta)x$
$\bar{y} = (1/\eta)y$ (4.39)

en analoog

$$\delta\underline{u}_2 = \varepsilon\,\frac{d\theta}{d\phi}\,\underline{u}_1(\omega,\phi;\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) \quad \text{met} \quad \begin{matrix} \bar{\bar{x}} = \eta\, x \\ \bar{\bar{y}} = \eta\, y. \end{matrix}$$

De transformatie (4.33)/(4.34) kan dus herleid worden tot een rotatie van de eigenvektoren $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$, gecombineerd met een tweetal dilataties.

Voor een isotroop elastisch medium geldt : $\alpha = \beta + 2\gamma$
(4.20) gaat nu over in

$$\tan 2\phi = \frac{\beta+\gamma}{\alpha-\gamma} \tan 2\theta, \text{ ofwel } \phi = \theta \qquad (4.40)$$

Hier geldt dus $\frac{d\theta}{d\phi} = 1$.

Verder geldt : $(\lambda_1')^2 = (\lambda_2')^2 =$ constant,

zoals blijkt uit (4.26) en (4.28), waarin nu

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}(p^2 + 1) = 1 \\ b &= 0 \end{aligned} \qquad (4.41)$$

De transformatie (4.33)/(4.34) gaat nu over in

$$\begin{cases} \delta\underline{u}_1 = -\varepsilon\, \underline{u}_2 \\ \delta\underline{u}_2 = \varepsilon\, \underline{u}_1 \end{cases} \qquad (4.42)$$

Dit is een infinitesimale rotatie, in overeenstemming met wat we reeds eerder hebben afgeleid.

2. De transformatie $\delta\underline{u}_1 = \varepsilon B\, \underline{u}_1$; $\delta\underline{u}_2 = \varepsilon B'\underline{u}_2$

Volgens (4.31) en (4.32) zijn $\delta\underline{u}_1$ en $\delta\underline{u}_2$ gedefinieerd als

$$\begin{cases} \delta\underline{u}_1 = i\varepsilon\, \omega\lambda'_{1,\phi}(x \cos\phi + y \sin\phi)\, \underline{u}_1 = \varepsilon\lambda'_{1,\phi} \dfrac{\partial \underline{u}_1}{\partial\lambda'_1} & (4.43) \\ \delta\underline{u}_2 = i\varepsilon\omega\, \lambda'_{2,\phi}(x \cos\phi + y \sin\phi)\, \underline{u}_2 = \varepsilon\lambda'_{2,\phi} \dfrac{\partial \underline{u}_2}{\partial\lambda'_2} & (4.44) \end{cases}$$

Er geldt $\underline{u}_1 + \delta\underline{u}_1 = \underline{u}_1 + \varepsilon\, \lambda_{1,\phi} \dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda_1}$ (4.45)

Schrijven we

$$\underline{u}_1 = \underline{a}(\phi) \exp i\omega \;\; \lambda_1'(\phi) \;\; (x \cos\phi + y \sin\phi)$$

$$= \underline{a}(\phi) \exp i\omega \;\; \lambda_1'(\phi).\mu(\phi;x,y) = \underline{u}_1(\lambda_1',\mu) \qquad (4.46)$$

dan zien we dat $\underline{u}_1 + \delta\underline{u}_1$

$$= \underline{u}_1 + \varepsilon\lambda_1'(\phi)_{,\phi} \frac{\partial u_1}{\partial \lambda_1'}$$

$$= \underline{u}_1(\lambda_1',\mu) + \varepsilon\, \lambda_1'(\phi)_{,\phi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda_1'}\right)$$

$$= \underline{u}_1\Big(\big(\lambda_1'(\phi) + \varepsilon\lambda'_{1,\phi}\big),\mu\Big)$$

$$\simeq \underline{u}_1(\lambda_1'(\phi + \varepsilon),\mu)$$

$$= \underline{a}(\phi) \exp i\omega\, \lambda_1'(\phi + \varepsilon)(x \cos\phi + y \sin\phi) \qquad (4.47)$$

Dit kunnen we herleiden tot

$$\underline{u}_1 + \delta\underline{u}_1 = \underline{a}(\phi) \exp i\omega\, \lambda_1'(\phi) \;\; (\bar{x} \cos\phi + \bar{y} \sin\phi)$$

$$= \underline{u}_1 \;(\omega,\phi;\bar{x},\bar{y})$$

$$\text{met} \quad \bar{x} = \xi x, \quad \bar{y} = \xi y, \quad \xi = \frac{\lambda_1'(\phi+\varepsilon)}{\lambda_1'(\phi)} \qquad (4.48)$$

Op analoge wijze kunnen we afleiden dat

$$\underline{u}_2 + \delta\underline{u}_2 = \underline{u}_2(\omega,\phi;\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) \quad \text{met}$$

$$\bar{\bar{x}} = \chi x, \quad \bar{\bar{y}} = \chi y, \quad \chi = \frac{\lambda_2'(\phi+\varepsilon)}{\lambda_2'(\phi).} \qquad (4.49)$$

De transformaties (4.43) en (4.44) zijn dus te herleiden tot <u>dilataties.</u>

Opmerking : Aangezien $\lambda_1'(\phi)$ en $\lambda_2'(\phi)$ in principe bekend zijn (zie (4.26) en (4.28) zouden we de transformaties (4.48) en (4.49) voor het vierkantsymmetrische medium expliciet kunnen bepalen. De concrete gedaante van $\lambda_1'(\phi)$ en $\lambda_2'(\phi)$ is echter van dien aard dat aan de resulterende formules weinig meer te zien is.

3. De transformatie $\delta \underline{u}_1 = \varepsilon C\, \underline{u}_1$; $\delta \underline{u}_2 = \varepsilon\, C' \underline{u}_2$

Deze kan geschreven worden als

$$\begin{cases} \delta \underline{u}_1 = \varepsilon\ (y\partial_x - x\partial_y)\underline{u}_1 \\ \delta \underline{u}_2 = \varepsilon\ (y\partial_x - x\partial_y)\underline{u}_2 \end{cases} \tag{4.50}$$

Dit is een infinitesimale rotatie van het (x-y) - stelsel.

Samenvattend :

Ten opzichte van de parameters ω en ϕ kunnen we de eigenvektoren van V schrijven als

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta(\phi) \\ \cos\theta(\phi) \end{pmatrix} \exp i\omega\ \ \lambda_1'\ (\phi)\ \ (x \cos\phi + y \sin\phi) \tag{4.51}$$

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta(\phi) \\ \sin\theta(\phi) \end{pmatrix} \exp i\omega\ \ \lambda_2'(\phi)\ \ (x \cos\phi + y \sin\phi) \tag{4.52}$$

Hierin zijn $\lambda_1'(\phi)$ en$\lambda_2'(\phi)$ de gereduceerde lengten van de golfvektor $\underline{k}$.

Een pseudorotatie is nu een transformatie van de vorm

$$\delta \underline{u}_1 = \underline{u}_{1,\phi}\delta\phi = \varepsilon(A + B + C)\ \underline{u}_1 \tag{4.53}$$

$$\delta \underline{u}_2 = \underline{u}_{2,\phi}\delta\phi = \varepsilon(A'+B'+ C')\ \underline{u}_2 \tag{4.54}$$

Dit komt neer op een transformatie $\phi \to \phi + \varepsilon$

We kunnen nu de verschillende onderdelen van deze transformatie als volgt interpreteren :

1. $$\begin{cases} \delta\underline{u}_1 = \varepsilon A\,\underline{u}_1 = -\varepsilon \dfrac{d\theta}{d\phi}\,\underline{u}_2(\omega,\phi;\bar{x},\bar{y}) \\ \delta\underline{u}_2 = \varepsilon A'\underline{u}_2 = \varepsilon \dfrac{d\theta}{d\phi}\,\underline{u}_1(\omega,\phi;\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) \end{cases}$$

$$\text{met} \begin{cases} \bar{x} = (1/\eta)x \\ \bar{y} = (1/\eta)y \end{cases} ; \begin{cases} \bar{\bar{x}} = \eta x \\ \bar{\bar{y}} = \eta y \end{cases} ; \eta = \frac{\lambda_1'(\phi)}{\lambda_2'(\phi)} \quad . \qquad (4.55)$$

Deze transformatie komt overeen met een infinitesimale vektoriële rotatie van de eigenvektoren $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$, gecombineerd met een tweetal dilataties, die samenhangen met het feit dat de (gereduceerde) lengten van $\lambda_1'(\phi)$ en $\lambda_2'(\phi)$ van de golfvektoren $\underline{k}$ van beide eigenfuncties $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ niet aan elkaar gelijk zijn. Voor een isotroop elastisch medium geldt : $\lambda_1'(\phi) = \lambda_2'(\phi)$, en de transformatie gaat over in een infinitesimale vektoriële rotatie.

2. $$\begin{cases} \delta\underline{u}_1 = \varepsilon B\,\underline{u}_1 = \varepsilon\,\underline{u}_1(\omega,\phi;\tilde{x},\tilde{y}) \\ \delta\underline{u}_2 = \varepsilon B'\underline{u}_2 = \varepsilon\,\underline{u}_2(\omega,\phi;\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}}) \end{cases} \qquad (4.56)$$

$$\text{met} \begin{cases} \tilde{x} = \xi x \\ \tilde{y} = \xi y \end{cases} ; \begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \chi x \\ \tilde{\tilde{y}} = \chi y \end{cases} ; \quad \xi = \frac{\lambda_1'(\phi+\varepsilon)}{\lambda_1'(\phi)} \quad ; \quad \chi = \frac{\lambda_2'(\phi+\varepsilon)}{\lambda_2'(\phi)}$$

Deze transformatie komt overeen met een tweetal dilataties. Deze hangen samen met het feit dat de gereduceerde lengte van de golfvektor $\underline{k}$ van beide eigenvektoren afhankelijk is van de voortplantingsrichting .

Voor een isotroop elastisch medium waar $\lambda_1'(\phi) = \lambda_2'(\phi)$ = constant gaat deze transformatie over in $\delta\underline{u}_1 = \delta\underline{u}_2 = 0$.

3. $$\begin{cases} \underline{u}_1 = C\,\underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 = C'\underline{u}_2 \end{cases}$$

Dit is een infinitesimale rotatie van het coördinatenstelsel.

4.5 ZILCHACHTIGE BEWEGINGSCONSTANTEN

De tot nu toe in dit hoofdstuk in paragraaf (4.3) en (4.4) behandelde kommutatoren zijn diagonale operatoren. De bijbehorende bewegingsconstanten zijn homogeen kwadratisch in $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$.
We zullen tenslotte twee eenvoudige kommutatoren definiëren die aanleiding geven tot het bestaan van bilineaire bewegingsconstanten. Analoge kommutatoren en bewegingsconstanten voor het isotrope elastische medium zijn reeds behandeld in paragraaf (3.6).
De in de voorgaande paragraaf behandelde herparametrisering meekt een en ander bijzonder eenvoudig.

We beschouwen nogmaals de eigenvektoren

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = \underline{a}(\phi)\ \exp\ i\omega\ \lambda_1'(\phi)\ (x\cos\phi + y\sin\phi) \\ \underline{u}_2 = \underline{b}(\phi)\ \exp\ i\omega\ \lambda_2'(\phi)\ (x\cos\phi + y\sin\phi) \end{cases} \tag{5.1}$$

Voor deze eigenvektoren geldt

$$\begin{aligned} V\,\underline{u}_1 &= \omega^2\underline{u}_1 \\ V\,\underline{u}_2 &= \omega^2\underline{u}_2\ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

De parameters zijn ϕ en ω.

Dit stelsel eigenvektoren is orthonormaal , d.w.z. er geldt :

$$\begin{aligned} &\int dx\,dy\ \ \underline{u}_\alpha\ (\omega,\phi;x,y)\ \underline{u}_\beta\ (\omega';\phi';x,y) \\ &= \ \delta_{\alpha\beta}\,\delta(\omega'-\omega)\ \delta(\phi'-\phi) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Een formele oplossing van de bewegingsvergelijking kunnen we nu schrijven als

$$\underline{u}(\underline{x},t) = \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\phi \left[a(\omega,\phi,t)\, \underline{u}_1(\omega,\phi;x,y) + b(\omega,\phi,t)\, \underline{u}_2(\omega,\phi;x,y) \right] \tag{5.4}$$

Uit de bewegingsvergelijking $\underline{u}_{tt} = -V\,\underline{u}$ (5.5)

samen met (5.3) volgt

$$\begin{cases} a_{,tt} = -\omega^2 a \\ b_{,tt} = -\omega^2 b \end{cases} \tag{5.6}$$

We definiëren nu twee operatoren Z_1 en Z_2 als volgt :

$$\begin{cases} Z_1\underline{u}_1(\omega,\phi;x,y) = \underline{u}_2(\omega,\phi;x,y) \\ Z_1\underline{u}_2(\omega,\phi;x,y) = -\underline{u}_1(\omega,\phi;x,y) \end{cases} . \tag{5.7}$$

en

$$\begin{cases} Z_2\underline{u}_1(\omega,\phi;x,y) = \underline{u}_2(\omega,\phi;x,y) \\ Z_2\underline{u}_2(\omega,\phi;x,y) = \underline{u}_1(\omega,\phi;x,y) \end{cases} \tag{5.8}$$

Met (5.3) en (5.4) vinden we nu :

$$\int dx\,dy\ (\underline{u}_t \cdot Z_1\underline{u}) = \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\phi\ (ab_t - ba_t) \tag{5.9}$$

Met behulp van (5.6) levert dit :

$$\partial_t \int dx\,dy\ (\underline{u}_t \cdot Z_1\underline{u}) = 0. \tag{5.10}$$

Dus $(\underline{u}_t \cdot Z_1\underline{u})$, een <u>bilineaire</u> uitdrukking in $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$, is dichtheid van een bewegingsconstante.

Op analoge wijze vinden we met Z_2 :

$$\partial_t \int dx\,dy\ (\underline{u}_t \cdot Z_2\underline{u}_t + \underline{u} \cdot Z_2 V\,\underline{u}) = 0. \tag{5.11}$$

Ook dit is een bilineaire uitdrukking in $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$.

5. CONCLUSIE

De in het voorgaande gedemonstreerde methoden zijn in principe ook van toepassing op driedimensionale elastische media. Ook hier kunnen we de dynamische operator diagonaliseren. Voor het isotrope elastische medium gaat dit vrij eenvoudig. We vinden

$$V = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\,\nabla^2 & & \\ & \mu\,\nabla^2 & \\ & & \mu\,\nabla^2 \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

De bijbehorende eigenfuncties bestaan uit

longitudinale golven, met eigenwaarde $(\lambda + 2\mu)(k^2 + l^2 + m^2)$

en transversale golven, met eigenwaarde $\mu(k^2 + l^2 + m^2)$

Van de operator (5.1) kan in principe vrij eenvoudig de kommutatorverzameling worden bepaald, uitgaande van de kommutatorverzameling van $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Als voorbeeld voor elastische media van lagere symmetrie kunnen we denken aan een kubisch symmetrisch elastisch medium. Dit is een elastisch medium waarvan de elasticiteitstensor symmetrie vertoont voor spiegelingen aan de x-, y- en z- as en voor verwisselingen van x en y en van x en z. Het diagonaliseren van de dynamische operator van een dergelijk systeem brengt echter nogal wat rekentechnische problemen met zich mee.

6. LITERATUUR

(1) P van der Varst :

Bewegingsvergelijkingen, Variatieprincipes en Behoudswetten, THE diktaat nr. 3.303 (1976)

(2) L. Mooren :

Group theoretical methods in classical mechanics, proefschrift THE, februari 1979

(3) B. Pots :

Behoudswetten van een ideaal elastisch medium, stageverslag THE, maart 1973

(4) L.J.F. Broer :

On the Zilch of plane waves, Physica 38, 341 - 348 (1968).