BACHELOR

Analyse van antwoorden met behulp van een CAS

Ballemans, K.

Award date:
2013

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Bachelorproject

Analyse van Antwoorden met behulp van een CAS

Auteur:
Karlijn Ballemans
0632267

Begeleider:
Dr. Hans Cuypers

9 juli 2013

Samenvatting

In deze thesis bekijken we de analyse van antwoorden met behulp van een Computer Algebra Systeem (CAS). Bij het nakijken van een digitale toets kan er gebruik worden gemaakt van een CAS om een antwoord op correctheid te testen. Een antwoord kan op verschillende manieren correct zijn. In deze thesis hanteren we vier soorten correctheid: wiskundig correct wanneer het antwoord algebraïsch equivalent is aan het verwachte antwoord, pedagogisch correct wanneer het antwoord wiskundig correct is en de vereiste taken zijn uitgevoerd, esthetisch correct wanneer het antwoord zowel wiskundig als pedagogisch correct is en het op een conventionele manier voor de bepaalde categorie is opgeschreven en contextueel correct wanneer het antwoord zowel wiskundig, pedagogisch als esthetisch correct is en het in de meest toegankelijke vorm voor de betreffende opgaven is gegeven. We focussen ons op de vwo wiskunde B stof binnen het middelbaar onderwijs en beschouwen de categorieën wortels, polynomen, gebroken functies, goniometrische functies en logaritmen. Per categorie stellen we een aantal eisen op waar een antwoord aan moet voldoen om pedagogisch en esthetisch correct te zijn. De vorm waarin de antwoorden moeten staan om aan deze eisen te voldoen definiëren we als standaardvormen. In mathematica 8.0 hebben we per categorie een algoritme geïmplementeerd die de antwoorden test op wiskundige, pedagogische en esthetische correctheid. Deze algoritmes geven bij esthetisch correcte antwoorden de vorm waarin het antwoord staat als output. De algoritmes kunnen toegepast worden bij het nakijken van toetsen. Een docent kan van te voren bepalen welke standaardvorm contextueel correct is bij een bepaalde vraag, de algoritmes kunnen gebruikt worden om te testen of het antwoord daadwerkelijk in de gewenste vorm staat.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Alle studenten aan de Technische Universiteit van Eindhoven (TU/e) moeten aan het begin van hun eerste jaar een zogenoemde instaptoets wiskunde afleggen om hun niveau op dit gebied vast te stellen. Om de studenten een mogelijkheid te geven hiervoor te oefenen hebben medewerkers van de TU/e een oefenwebsite opgezet, WISTU/e[i]. Op WISTU/e kunnen leerlingen oefenen met verschillende opgaven en kunnen ze hun eigen niveau testen met behulp van de digitale test-je-kennis toetsen. Deze toetsen bestaan op het moment uitsluitend uit meerkeuze vragen. Een nadeel van meerkeuze vragen is dat leerlingen veel vragen goed kunnen beantwoorden door te gokken. Een ander nadeel is dat er beperkte mogelijkheden zijn voor de vraagstellingen wanneer er uitsluitend meerkeuze vragen worden gebruikt. Door het gebruik van open vragen is het niveau van de leerlingen beter te testen. Echter brengt het gebruik van open vragen weer andere nadelen met zich mee. Zo kan het voorkomen dat er meerdere antwoorden correct zijn of dat een antwoord in een bepaalde vorm vereist wordt.

De vraag die binnen deze thesis centraal staat is hoe we een antwoord kunnen testen op correctheid door middel van een Computer Algebra Systeem (CAS). Om deze vraag te beantwoorden stellen we eerst vast wat wij onder correctheid verstaan. De term correctheid kan meerdere betekenissen hebben, in deze thesis onderscheiden we vier soorten correctheid (zie sectie 3): wiskundig correct wanneer het antwoord algebraïsch equivalent is aan het verwachte antwoord, pedagogisch correct wanneer het antwoord wiskundig correct is en de vereiste taken zijn uitgevoerd, esthetisch correct wanneer het antwoord zowel wiskundig als pedagogisch correct is en het op een conventionele manier voor de bepaalde categorie is opgeschreven en contextueel correct wanneer het antwoord zowel wiskundig, pedagogisch als esthetisch correct is en het in de meest toegankelijke vorm voor de betreffende opgaven is gegeven. Door dit onderscheid te maken is het mogelijk om criteria op te stellen waar het juiste antwoord aan moet voldoen.

De eisen voor een pedagogisch, esthetisch en contextueel correct antwoord verschillen per categorie. De categorieën die binnen deze thesis worden behandeld bepalen we in sectie 4. Omdat we ons binnen dit project beperken tot de oefentoetsen van WISTU/e is het voldoende om slechts de vwo wiskunde B stof van het middelbaar onderwijs te bekijken. Door per onderwerp van het vwo wiskunde B middelbaar onderwijs de categoriëen antwoorden te bepalen stellen we het gebied waarbinnen we gaan werken vast. Binnen deze thesis behandelen we rationale getallen, algebraïsche getallen, rationale functies en transcendente functies. Hierbinnen beschouwen we de catogorieën breuken, wortels, polynomen, gebroken functies, goniometrische functies en Logaritmen.

Vervolgens bekijken we per categorie aan welke eisen een pedagogisch en correct antwoord moet voldoen. Een antwoord moet per vraag aan andere eisen voldoen om een contextueel antwoord op de betreffende vraag te zijn. Om de thesis algemeen te houden

[i] www.wistue.nl

bepalen we deze eisen niet. Wel onderzoeken we per categorie welke vormen het meest toegankelijk zijn en definiëren aan de hand hiervan verschillende standaardvormen (zie sectie 5). In sectie 6 onderzoeken we welke standaardvormen verschillende CAS hanteren.

Aan de hand van al het voorgaande hebben we per categorie een algoritme ontworpen om een antwoord uit de betreffende categorie op correctheid en standaardvorm te testen. De algoritmes vereisen twee expressies als input, een te testen antwoord en een wiskundig correct antwoord op de vraag. Eerst testen de algoritmes of de te testen expressie algebraïsch equivalent is met het wiskundig correcte antwoord, met andere woorden of het te testen antwoord wiskundig correct is. Wanneer de ingevoerde expressie een wiskundig correct antwoord betreft wordt er nagegaan in welke vorm de expressie staat. Op deze manier wordt het antwoord getest op pedagogische en esthetische correctheid. Wanneer het antwoord pedagogigsch of esthetisch niet correct is, geeft het algoritme dit als output met eventueel extra feedback. Als het antwoord esthetisch correct is, geeft het algoritme de standaardvorm waarin de te testen expressie zich bevindt als output. Zo kan een leraar nagaan of het antwoord zich in de vorm bevindt die vereist is voor contextuele correctheid bij de betreffende vraag. De algoritmes hebben we geïmplementeerd in Mathematica 8.0 en staan beschreven in sectie 7

2 Expressies en wiskundige objecten

Voor wat volgt is het essentieel om een onderscheid te maken tussen expressies/uitdrukkingen en wiskundige objecten. Met een expressie, of uitdrukking, duiden we een combinatie van wiskundige symbolen aan die opgebouwd is uit basiselementen met behulp van functies en operatoren. Deze expressies bekijken we als een taalfragment, dit houdt in dat de expressies ongeëvalueerd bekeken worden. Anderzijds bekijken we wiskundige objecten. Binnen deze thesis definiëren we een wiskundig object als alles wat in termen van de verzamelingenleer is uit te drukken. Het verschil tussen expressies en wiskundige objecten is dat we de objecten wel evalueren en aan de hand van hun waarde bekijken. Per verzameling gelden er voor operatoren en functies een aantal rekenregels, door middel van deze rekenregels kunnen expressies herschreven worden naar andere expressies. We zeggen dat een expressie een object representeert wanneer deze expressie door middel van rekenregels om te schrijven is naar dit object. In de verschillende categorieën zijn er een aantal combinaties van rekenregels die vaak worden gebruikt om expressies om te schrijven, deze combinaties van rekenregels definiëren we als herschrijfregels. Twee expressies zijn algebraïsch equivalent aan elkaar dan en slechts dan als beide expressies hetzelfde wiskundig object representeren. De volgende voorbeelden maken het verschil tussen expressies en objecten duidelijk:

Voorbeeld 2.1. Laat $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ het lichaam van algebraïsche getallen met de gebruikelijke operaties van optelling en vermenigvuldiging. Bekijk de twee verschillende expressies $a, b \in \mathbb{A}$ met $a = \sqrt{18}$ en $b = 3\sqrt{2}$. Als we expressie a als wiskundig object bekijken krijgen we:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Hieruit volgt dat expressie a hetzelfde wiskundig object representeert als expressie b.

Voorbeeld 2.2. Laat $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ de veeltermring over de reële getallen met de gebruikelijke operaties van optelling en vermenigvuldiging. Laat $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ twee expressies met $u(x) = 1+2x+x^2$ en $v(x) = x^2+2x+1$. De expressies $u(x)$ en $v(x)$ zijn verschillend. Echter de optelling in $\mathbb{R}[x]$ is commutatief waardoor de expressie $u(x) = 1 + 2x + x^2$ om te schrijven is naar expressie $v(x) = x^2 + 2x + 1$. Beiden expressies representeren dus hetzelfde wiskundig object.

Voorbeeld 2.3. Laat $(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}[x], +, \cdot)$ de veeltermring over de gehele getallen modulo 2. Bekijk de expressies $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}[x]$ met $u(x) = x^2 + 2x + 1$ en $v(x) = x^2 + 1$. Omdat we modulo 2 rekenen kunnen we de expressie $u(x) = x^2 + 2x + 1$ om schrijven naar expressie $v(x) = x^2 + 1$. Waaruit blijkt dat de expressies $u(x)$ en $v(x)$ hetzelfde wiskundig object representeren.

3 Correctheid

Bij het digitaal nakijken van een toets kan men de antwoorden op correctheid testen door middel van een CAS. Echter kunnen zich hier verschillende moeilijkheden bij voor doen, we illustreren dit door middel van het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3.1. Los op $\frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{5}{6}$.

Antwoord leerling a: $\frac{7}{30} + \frac{5}{6}$	Antwoord leerling c: $\frac{16}{15}$
Antwoord leerling b: $\frac{32}{30}$	Antwoord leerling d: $1\frac{1}{15}$

Bekijk eerst het antwoord van leerling a. Wanneer een CAS als input $\frac{2}{15}+\frac{1}{10}+\frac{5}{6} = \frac{7}{30}+\frac{5}{6}$ krijgt, zal deze in veel gevallen als output de waarde True geven. De twee uitdrukkingen zijn algebraïsch equivalent. Maar een docent zal het antwoord waarschijnlijk niet goedkeuren. Leerling a heeft namelijk niet alle taken uitgevoerd wat van hem/haar wordt verwacht, de leerling heeft niet alle breuken bij elkaar opgeteld. Het antwoord van leerling b is algebraïsch equivalent aan het juiste antwoord en leerling b heeft alle taken uitgevoerd. Toch is de kans groot dat leerling b niet het volle aantal punten scoort voor deze opgave. Het antwoord is niet op een conventionele manier voor breuken opgeschreven, de breuk is niet volledig vereenvoudigd. De antwoorden van leerling c en leerling d zijn algebraïsch equivalent aan het juiste antwoord, beide hebben ze de vereiste taken uitgevoerd en ze hebben de breuken vereenvoudigd. De antwoorden zijn op een conventionele manier opgeschreven, toch hebben leerling c en leerling d twee verschillende antwoorden.

Uit het voorbeeld volgt dat er verschillende manieren van correctheid zijn te onderscheiden. Bradford, Davenport en Sangwin [7] schrijven hier het volgende over:

> *"We might say that it is:*
> ***mathematically** correct, in that it is equal to the question posed;*

__pedagogically__ correct, in that the student has done the task required;
__aesthetically__ incorrect, in that there are more conventional ways of writing the answer."

Wanneer we weer terug gaan naar het voorbeeld kunnen we stellen dat het antwoord van leerling a *"mathematically correct"* is, immers de uitdrukkingen $\frac{7}{30} + \frac{5}{6}$ en $\frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{5}{6}$ zijn algebraïsch equivalent. Hetzelfde antwoord van leerling a is niet *"pedagogically correct"*, niet alle breuken zijn bij elkaar opgeteld waardoor de leerling niet de taken heeft uitgevoerd die gevraagd worden. Het antwoord van leerling b is algebraïsch equivalent aan $\frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{5}{6}$ en daardoor *"mathematically correct"*. Leerling b heeft ook alle taken uitgevoerd waardoor het antwoord ook *"pedagogically correct"* is. Omdat de breuk niet volledig vereenvoudigd is noemen we het antwoord *"aesthetically incorrect"*. Kijken we naar de antwoorden van leerling c en leerling d dan zien we dat beide antwoorden algebraïsch equivalent zijn aan $\frac{2}{15}+\frac{1}{10}+\frac{5}{6}$, bij beide antwoorden zijn alle taken uitgevoerd en ook beide manieren zijn conventioneel in het middelbaar onderwijs. Ze zijn dus beiden niet *"aesthetically incorrect"* maar toch kan het voorkomen dat bij een bepaalde vraag de ene vorm meer gewenst is dan de andere vorm. Om hier ook iets over te zeggen voegen we een extra definitie toe aan de definities gegeven door Bradford, Davenport en Sangwin, zo komen we tot de volgende definities voor correctheid.

Definitie 1. (Correctheid)

(i). Wiskundig correct: een antwoord noemen we wiskundig correct als het algebraïsch correct is aan het verwachte antwoord.

(ii). Pedagogisch correct: we zeggen dat een antwoord pedagogisch correct is als het wiskundig correct is en als alle vereiste taken zijn uitgevoerd.

(iii). Esthetisch correct: Het antwoord is Esthetisch correct als het zowel wiskundig als pedagogisch correct is en als de leerling het antwoord op een conventionele manier voor de betreffende categorie heeft weergegeven.

(iv). Contextueel correct: Een antwoord noemen we contextueel correct als het zowel wiskundig, pedagogisch en esthetisch correct is én in de meest toegankelijke vorm voor de betreffende opgave is gegeven.

Definitie 2. (Het juiste antwoord)
We noemen een antwoord het juiste antwoord dan en slechts dan als het contextueel correct is.

4 Onderzoeksgebied

De essentie van dit project is het evalueren van antwoorden van leerlingen op vragen van de toetsen van WISTU/e. Omdat het bij deze toetsen draait om het wiskunde niveau bij leerlingen met een vwo-diploma te testen hebben we ons gefocust op de onderwerpen die tot deze stof horen. Door de vijf toetsen op WISTU/e te analyseren hebben we deze onderwerpen bepaald. In tabel 1 zijn deze onderwerpen te vinden, voor elke toets is per onderwerp aangegeven hoeveel vragen er van dit onderwerp in de toets voorkomen. Elke toets bestaat uit 22 vragen, enkele vragen vallen onder meerdere onderwerpen.

	Toets 1	Toets 2	Toets 3	Toets 4	Toets 5
Rekenen met breuken	2	3	1	2	1
Machten en wortels	1	2	3	3	4
Rekenen met letters	4	3	3	2	2
Vergelijkingen en ongelijkheden	5	6	4	4	2
Exponenten en Logaritmen	2	1	4	4	6
Goniometrie	2	2	2	2	2
Differentiëren	3	4	2	4	3
Integreren	3	3	4	4	3

Tabel 1: Aantal vragen binnen een bepaald onderwerp per toets.

Binnen deze onderwerpen vallen bepaalde opgaven, waarbij een bepaald soort wiskundige objecten als antwoord hoort. Door vast te stellen in welke verzamelingen deze objecten vallen kunnen we het gebied definiëren voor verder onderzoek. Hiervoor hebben we studieboeken geraadpleegd die op bijna elke Nederlandse middelbare school voor het vwo onderwijs gebruikt worden, boeken van de methode Getal & Ruimte en Moderne wiskunde [1] [2] [3] [4] [5]. Per onderwerp bespreken we aan de hand van voorbeelden in welke verzameling de antwoorden binnen dit onderwerp vallen. De voorbeelden komen uit de toetsen van WISTU/e en de studieboeken van de methoden Getal & Ruimte en Moderne wiskunde. Per onderwerp kunnen er ook antwoorden uit andere categorieën mogelijk zijn, echter gaan we nu uit van het soort opgaven die we tegen komen in de studieboeken.

4.1 Rekenen met breuken

In deze sectie bespreken we een aantal voorbeelden met betrekking tot rekenen met breuken.

Voorbeeld 4.1. De uitdrukking $\frac{2}{15} - \frac{1}{10} + \frac{5}{6}$ is gelijk aan

a. $\frac{1}{20}$ c. $\frac{13}{15}$

b. $\frac{6}{11}$ d. $-\frac{4}{5}$

Voorbeeld 4.2. De breuk $\frac{\frac{2}{3}+6}{\frac{2}{3}+3}$ is gelijk aan

a. $\frac{7}{4}$ c. $\frac{8}{5}$

b. 2 d. $\frac{20}{11}$

Zowel in voorbeeld 4.1 en in 4.2 zijn breuken de antwoorden op de opgaven. Naast breuken kunnen er ook gehele getallen of decimale getallen als antwoord voorkomen. Alles omvattend zijn de antwoorden wiskundige objecten uit de verzameling rationale getallen.

4.2 Machten en wortels

Voorbeeld 4.3. De breuk $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{20}}{\sqrt{5}+\sqrt{45}}$ is te herleiden tot

a. $\frac{2}{3}$ c. $1\frac{2}{3}$

b. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ d. $\frac{3}{4}$

Voorbeeld 4.4. Het getal a is kleiner dan 0 en $b = -a^2$. Dan is a gelijk aan

a. $\sqrt{-b}$ c. $-\sqrt{-b}$

b. $-\sqrt{b}$ d. $\sqrt{b}$

Voorbeeld 4.5. De uitdrukking $(\sqrt{11} - \sqrt{7})^2 - (\sqrt{11} + \sqrt{7})^2$ is gelijk aan

a. 0 c. -14

b. $36 - 4\sqrt{77}$ d. $-4\sqrt{77}$

In voorbeeld 4.3 is het juiste antwoord een breuk. Bij de opgaven in voorbeeld 4.5 hoort een uitdrukking met een wortel als juist antwoord. In het algemeen zijn antwoorden op opgaven in dit onderwerp uitdrukkingen met wortels, breuken, decimale getallen en/of gehele getallen. De antwoorden vallen dus binnen de algebraïsche getallen.

4.3 Rekenen met letters

Voorbeeld 4.6. De uitdrukking $(a^{-2}+b^{-2})^{-1}$ is voor alle positieve getallen a en b gelijk aan

a. $\frac{1}{a^2+b^2}$ c. $\frac{1}{(a+b)^2}$

b. $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ d. $a^2 + b^2$

Voorbeeld 4.7. De uitdrukking $\frac{(ab)^{2/3}}{ab^{1/3}}$ is voor alle positieve a en b gelijk aan

a. $b^{1/3}$ c. $\frac{b^{1/3}}{a^{1/3}}$

b. $a^{1/3}b^{1/3}$ d. ab

Voorbeeld 4.8. De uitdrukking $(2a+b)^2 - (2a-b)^2$ is gelijk aan

a. 0 c. $4ab$
b. $2b^2$ d. $8ab$

4.4 Vergelijkingen en ongelijkheden

Voorbeeld 4.9. Bereken de oplossing van de volgende vergelijkingen:

a. $2x+5=6+5x$ c. $3(x+1)=8$
b. $-5(x-3)=3+2x$ d. $-2x-1=3-(x-5)$

Voorbeeld 4.10. Bereken de oplossingen van de volgende vergelijkingen:

a. $x^2+6x-8=0$ d. $3x^2+6x-1=0$
b. $2x^2-4x=3$ e. $10-x^2=x$
c. $x^2-12x-28=0$ f. $x^2+2x+1=0$

Voorbeeld 4.11. Voor het snijpunt (x,y) van de lijnen met vergelijking $3x+y=1$ respectievelijk $2x+2y=-1$ geldt dat x gelijk is aan

a. $\frac{3}{4}$ c. $\frac{5}{4}$
b. -$\frac{3}{4}$ d. $-\frac{5}{4}$

Voorbeeld 4.12. In een vierkant van 10 bij 10 cm wordt een gekleurd kruis getekend. Iedere arm van dit kruis is x cm lang.

a. Geef de formule van de breedte van de armen van het kruis.

b. $K(x)$ is de totale oppervlakte van de armen van het kruis. Geef het functievoorschrift van $K(x)$.

Bij elk van de sommen in de voorbeelden hoort een bepaald antwoord. In voorbeeld 4.9 zijn de antwoorden op de opgaven breuken. De vergelijkingen in voorbeeld 4.10 hebben hun oplossingen in de algebraïsche getallen liggen. En de verwachte antwoorden van voorbeeld 4.12 zijn polynomen van eerste en tweede graad. Binnen dit onderwerp zijn er dus antwoorden binnen de rationale getallen, de algebraïsche getallen en algebraïsche functies.

4.5 Exponenten en logaritmen

Voorbeeld 4.13. Schrijf de oplossingen als logaritmen:
a. $3^t=4$
b. $3^t=8$

Voorbeeld 4.14. Bereken de volgende logaritmen.

a. ${}^2\log(8)$ c. ${}^{\frac{1}{4}}\log(16)$
b. ${}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{32})$ d. ${}^5\log(1)$

Voorbeeld 4.15. De uitdrukking ${}^6\log(15)$ is gelijk aan

a. $\frac{\ln(15)}{\ln(6)}$ c. $\ln(9)$

b. $\ln(\frac{5}{2})$ d. $\frac{\ln(6)}{\ln(15)}$

De sommen in voorbeeld 4.13 hebben een logaritme van een natuurlijk getal als antwoord. Terwijl de sommen in voorbeeld 4.14 hun antwoorden binnen de reële getallen hebben liggen.

4.6 Goniometrie

Voorbeeld 4.16. De uitdrukking $\sin^2(x)$ is gelijk aan

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ c. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(2x)$

b. $\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

Voorbeeld 4.17. Voor alle x en y is $\cos(x + y)$ gelijk aan

a. $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ c. $\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

b. $\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ d. $\cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y)$

Voorbeeld 4.18. Voor de hoek α geldt dat $0 < \alpha < \Pi$ én $\tan(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dan is $\sin(\alpha)$ gelijk aan

a. -$\frac{1}{2}$ c. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

In voorbeeld 4.16 en voorbeeld 4.17 zijn de juiste antwoorden uitdrukkingen met goniometrische functies. In voorbeeld 4.18 valt het antwoord binnen de algebraïsche getallen. De antwoorden vallen dus binnen de algebraïsche getallen, of transcendente functies.

4.7 Differentiëren

Voorbeeld 4.19. Bereken de afgeleide.

a. $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ c. $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$

b. $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$ d. $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$

Voorbeeld 4.20. Differentieer.

$f(x) = \frac{1}{x^6}$ $h(x) = \frac{2x-1}{3x^2}$

$g(x) = \frac{x^2+3}{x^4}$ $j(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$

Voorbeeld 4.21. Differentieer.

a. $f(x) = \sin(x) - \cos(2x)$ c. $f(x) = \cos^2(x)$

b. $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + 2\sin(\frac{1}{2}x)$ d. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

In voorbeeld 4.19 zijn de antwoorden polynomen van verschillende graad. De afgeleiden van de functies in voorbeeld 4.20 zijn breuken met polynomen van verschillende graad als de teller en noemer. De functies in voorbeeld 4.21 leiden tot goniometrische functies. De antwoorden vallen dus binnen de algebraïsche, rationale en transcendente functies.

4.8 Integreren

Voorbeeld 4.22. Primitiveer.

a. $f(x) = 6x^2$ c. $f(x) = x^3 - 3x$ e. $f(x) = -4x^{-4}$

b. $f(x) = 2x^3 + 5x^4$ d. $f(x) = 3x^{-4}$ f. $f(x) = \frac{8}{x^3}$

Voorbeeld 4.23. Primitiveer:
$f(x) = \frac{x^4-2x}{2x^3}$, $g(x) = \frac{x^4-6}{2x^3}$, $h(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^4}$

Voorbeeld 4.24. Een primitieve van de functie $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ is

a. $-2\sin(x)\cos(x)$ c. $\frac{1}{2}\cos(2x)$

b. $-\frac{1}{2}\cos(2x)$ d. $-2\cos(2x)$

In voorbeeld 4.22 en voorbeeld 4.23 komen er zowel algebraïsche als rationale functies als antwoorden voor. Het voorbeeld 4.24 heeft een transcendente functie als antwoord.

4.9 Categorieën

Om alle onderwerpen te kunnen dekken zullen we wiskundige objecten bekijken binnen de volgende verzamelingen:

Verzameling	Categorie
Rationale getallen	Breuken
Algebraïsche getallen	Wortels
Rationale functies	Polynomen
	Gebroken functies
Transcendente functies	Goniometrische functies
	Logaritmen

5 Standaardvorm

In sectie 4 is beschreven binnen welke categorieën antwoorden vallen behorende bij probleemstellingen uit de voor ons relevante onderwerpen. In deze sectie wordt per categorie bekeken welke vormen conventioneel zijn binnen het middelbaar onderwijs.

5.1 Rationale getallen

In deze sectie bekijken we het lichaam $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ van rationale getallen met de gebruikelijke operaties van optelling en vermenigvuldiging.

5.1.1 Breuken

Herschrijfregels
Door gebruik te maken van de eigenschappen van een lichaam (zie bijlage A.2) kunnen expressies worden herschreven naar andere expressies, deze expressies blijven dan hetzelfde wiskundig object representeren. Cole en Swokowski beschrijven enkele eigenschappen van breuken in Precalculus (p7) [8]. Een aantal van deze eigenschappen worden veel gebruikt bij het rekenen met breuken, deze definiëren we als herschrijfregels voor breuken.

Definitie 3. (Herschrijfregels breuken)
Voor alle $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $b, d > 0$, $a < b$, $c < d$ en $ggd(a, b) = ggd(c, d) = 1$ geldt:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} \leftrightarrow \frac{a}{b}\text{[ii]} \tag{1}$$

$$\frac{a}{-b} \leftrightarrow \frac{-a}{b} \leftrightarrow -\frac{a}{b} \tag{2}$$

$$\frac{n \cdot b + a}{b} \leftrightarrow n + \frac{a}{b}\text{[iii]} \tag{3}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \leftrightarrow \frac{a + c}{b} \tag{4}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \tag{5}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{ac}{bd} \tag{6}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \tag{7}$$

Als herschrijfregel (1) nog toepasbaar is op een expressie in de richting '$\rightarrow$', dan is de breuk nog verder te vereenvoudigen. In het middelbaar onderwijs wordt er van de leerlingen verwacht dat ze de breuken volledig vereenvoudigen. Een expressie is esthetisch incorrect wanneer deze herschrijfregel nog toepasbaar is. Ook is het niet conventioneel binnen het middelbaar onderwijs om een negatieve noemer in de breuk te hebben staan. Er wordt dus verwacht dat de leerlingen herschrijfregel (2) toepassen in de richting '$\rightarrow$'. Per opgaven verschilt het in welke richting de leerling herschrijfregel (3) moet toepassen. Een antwoord is niet conventioneel wanneer de herschrijfregel in beide richtingen toepasbaar is. Wanneer herschrijfregel (4), (5), (6) of (7) nog toepasbaar is in de richtin '$\rightarrow$', heeft de leerling de vereiste taken van respectievelijk optelling, vermenigvuldiging en deling niet volledig uitgevoerd. Het antwoord is in deze situatie pedagogisch incorrect.

[ii] In de richting '$\rightarrow$' ook wel: vereenvoudigen van de breuk genoemd.
[iii] In de richting '$\rightarrow$' ook wel: gehelen buiten de breuk halen genoemd.

Standaardvormen
Door middel van de, in bovenstaande sectie genoemde, herschrijfregels kunnen wiskundige objecten door verschillende expressies worden weergegeven. Slechts enkele expressies zijn gewenst, we definiëren deze esthetisch correcte expressies als standaardvormen.

Definitie 4. (Standaardvormen breuken)

(i). Standaardvorm I: Expressie $\frac{t}{n}$ met $t, n \in \mathbb{Z}$ staat in standaardvorm I dan en slechts dan als $ggd(t, n) = 1$ en $n > 0$. Met andere woorden: herschrijfregel (1) is niet meer toepasbaar in de richting '$\rightarrow$' en de noemer is positief.[iv]

(ii). Standaardvorm II: Expressie $a + \frac{t}{n}$ met $a, t, n \in \mathbb{Z}$, staat in standaardvorm II dan en slechts dan als $a \geq 0$, $|t| < |n|$, $ggd(t, n) = 1$ en $n > 0$. Met andere woorden: herschrijfregels (1) en (3) zijn niet meer toepasbaar op de breuk $\frac{t}{n}$ in de richting '$\rightarrow$' en de noemer is positief.

5.2 Algebraïsche getallen

In deze sectie worden expressies binnen het lichaam $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ van algebraïsche getallen bekeken met de gebruikelijke operaties van optelling en vermenigvuldiging.

5.2.1 Wortels

Herschrijfregels
Door middel van de eigenschappen van een lichaam kunnen expressies in $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ herschreven worden naar expressies die hetzelfde wiskundig object representeren. Bepaalde eigenschappen worden veel gebruikt bij het rekenen met wortels, deze definiëren we als de herschrijfregels van de wortels [8].

Definitie 5. (Herschrijfregels wortels)
Voor alle $n, m \in \mathbb{N}$ en $a, b \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $\forall d \in \mathbb{N}$: $d^n \nmid a$ en $d^n \nmid b$ (m.a.w. a,b zijn n^{de}-machtsvrij) geldt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \leftrightarrow \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{8}$$

$$c_1 \sqrt[n]{a} + c_2 \sqrt[n]{a} \leftrightarrow (c_1 + c_2) \sqrt[n]{a} \tag{9}$$

$$\sqrt[n]{(a^n \cdot b)} \leftrightarrow a \sqrt[n]{b}^{[v]} \tag{10}$$

$$a^{\frac{m}{n}} =^{[vi]} \sqrt[n]{a^m} \tag{11}$$

[iv] Het kan bij deze standaardvorm voorkomen dat $|t| > |n|$.

[v] In de richting '$\rightarrow$' ook wel: vereenvoudigen van de wortel genoemd.

[vi] Met de '=' duiden we aan dat het hier niet om twee verschillende expressies gaat maar om twee dezelfde expressies met een notatieverschil. We beschouwen de expressies $a^{\frac{1}{n}}$ en $\sqrt[n]{a}$ dus als gelijk, De gebruiker hoeft deze herschrijfregel niet zelf toe te passen, het CAS schakelt achter de schermen tussen deze twee notaties.

Standaardvormen
Zoals eerder vermeld, kunnen Wiskundige objecten door middel van verschillende expressies weergegeven worden. In deze sectie zoeken we de meest toegankelijke vormen van de wortel.

Craats en Bosch schrijven in hun Basisboek Wiskunde [6] het volgende over de standaardvorm van de wortel:

> *"Elke wortel van een positief geheel getal kan geschreven worden als een geheel getal of als het product van een geheel getal en een onvereenvoudigbare wortel. Deze schrijfwijze heet de standaardvorm van de wortel"*

Met $\sqrt[n]{a}$ onvereenvoudigbaar dan en slechts dan als a geen n^{de}-macht behalve 1 als deler heeft.

In Getal & Ruimte vwo 1 (p120) [1] gebruiken Aalmoes, Admiraal et. al. dezelfde standaardvorm als Craats en Bosch. Ook zien we hier de volgende notatie: $a^{\frac{p}{q}}$ met $p, q \in \mathbb{N}$.

Zoals uit bovenstaande volgt is een expressie niet gewenst wanneer de herschrijfregels (8) of (9) nog toepasbaar zijn in de richting '$\rightarrow$'. Wanneer deze herschrijfregels nog toepasbaar zijn is de expressie pedagogisch incorrect. De conventionele expressies definiëren we als standaardvormen:

Definitie 6. (Standaardvormen wortels)

(i). Standaardvorm I: Expressie $\sqrt[n]{a^m}$ of $a^{\frac{m}{n}}$ met $a, m, n \in \mathbb{N}$ staat in standaardvorm I dan en slechts dan als $\sqrt[n]{a^m} \notin \mathbb{N}$.

(ii). Standaardvorm II: Expressie $c\sqrt[n]{a^m}$ of $c \cdot a^{\frac{m}{n}}$ met $c \in \mathbb{Q}$, $a, n, m \in \mathbb{N}$ staat in standaardvorm II dan en slechts dan als $\forall d \in \mathbb{N} : d^n \nmid a^m$. Met andere woorden: herschrijfregel (10) is niet meer toepasbaar op wortel $\sqrt[n]{a^m}$ in de richting '$\rightarrow$'.

Het is ook mogelijk om $a \in \mathbb{Z}$ te nemen. Men moet dan rekening houden dat de expressies niet altijd gedefinieerd zijn binnen de reële getallen. Wanneer we de expressie $a^{\frac{m}{n}}$ beschouwen met $a < 0$ en deze evalueren als $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ is deze uitdrukking gedefinieerd binnen $\mathbb{R}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dan en slechts dan als $a^m > 0$ er kunnen zich problemen voordoen wanneer we dezelfde expressie evalueren als $(a^{\frac{1}{n}})^m$ omdat $a^{\frac{1}{n}}$ niet gedefinieerd is voor even n binnen $\mathbb{R}$. Om dit soort problemen te vermijden nemen we binnen deze thesis $a \in \mathbb{N}$.

5.3 Rationale functies

5.3.1 Polynomen

In deze sectie bekijken we de ring $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ van polynomen over reële getallen met de gebruikelijke operaties van optelling en vermenigvuldiging.

Herschrijfregels
Wiskundige objecten binnen de ring $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ kunnen gerepresenteerd worden door verschillende expressies. Deze expressies kunnen allemaal in elkaar herschreven worden door middel van de eigenschappen van een ring (zie bijlage A.1). De omschrijvingen die het meest gebruikt worden bij het werken met polynomen worden hier gedefinieerd als herschrijfregels.

Definitie 7. (Herschrijfregels polynomen)
Voor alle $a_i, r_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, variabele x geldt:

$$a_1x + a_2x \leftrightarrow (a_1 + a_2)x \tag{12}$$

$$a_nx^n + ... + a_1x + a_0 \leftrightarrow (x - r_1) \cdot ... \cdot (x - r_n)^{[\text{vii}]} \tag{13}$$

$$a_nx^n + .. + a_1x + a_0 \leftrightarrow a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \tag{14}$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 \leftrightarrow \left(\sqrt{a_2}x + \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}^{[\text{viii}]} \tag{15}$$

Herschrijfregel (13) is alleen mogelijk in de richting '→' als $p(x)$ niet irreducibel. Met $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ irreducibel als de graad van $p(x)$ gelijk aan 1 of 0, of als de graad gelijk aan 2 en de discriminant kleiner dan 0. Voor $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ is $p(x)$ irreducibel dan en slechts dan als de graad van $p(x)$ gelijk aan 0 of 1.

Standaardvormen
In het artikel A Comparison of Equality in Computer Algebra and Correctness in Mathematical Pedagogy [7] gebruiken Bradford, Davenport en Sangwin de volgende vorm als standaardvorm voor polynomen:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0,$$

met $p(x)$ een polynoom van graad $n \in \mathbb{N}$.
Aalmoes, Admiraal, et. al. gaan in hun Getal & Ruimte vwo1 (p7) [1] uit van dezelfde vorm als standaardvorm. Naast deze vorm gebruiken ze ook de ontbinding in factoren als standaardvorm:

$$p(x) = (x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_m),$$

met a_i de wortels van $p(x)$ voor $i = 1, ..., m$, $m \in \mathbb{N}$, $p(x)$ niet irreducibel[ix].

Deze tweede standaardvorm is met name handig voor het vinden van de nulpunten van een polynoom, een voorbeeldopgave hiervan vinden we in Getal & Ruimte vwo NT/NG 4 (p6) [3]:

[vii] Met r_i, $i = 1, ..., n$ nulpunten van het polynoom $p(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$.
[viii] In de richting '→' ook wel kwadraat afsplitsen genoemd. Deze herschrijfregel wordt vaak toegepast om de nulpunten van een tweedegraads polynoom te vinden
[ix] Voor elk irreducibel polynoom $p(x)$ geldt $deg(p(x)) \leq 2$

Voorbeeld 5.1. Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px + 5$, bereken de nulpunten van $f_3(x)$.
Uitwerking
Er geldt: $f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 5$
Te berekenenen $f_3(x) = 0$.
We krijgen de vergelijking: $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 5 = 0$,
vermenigvuldigen met een factor 3 geeft: $x^2 + 12x + 20 = 0$,
ontbinden in factoren: $(x + 2)(x + 10) = 0$,
hieruit volgt $x = -2 \vee x = -10$,
dus de nulpunten zijn -2 en 10.

Ook kan deze vorm nuttig zijn bij het herleiden van breuken zoals we in het volgende voorbeeld zien uit Getal & Ruimte NG/NT 4 (p15) [3].

Voorbeeld 5.2. Vereenvoudig:
$$\frac{x^2 - 9}{x + 3}$$
Uitwerking
$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = x - 3$$
In Moderne wiskunde B1 deel 1 (p46-49) [4] gaan Bos, Bouw, et. al. ook in het algemeen uit van de volgende vorm als standaardvorm:
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$
met $a_i \in \mathbb{R}$ voor $i = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$.
Voor enkele toepassingen wordt er gevraagd om te ontbinden in factoren, bijvoorbeeld voor het vinden van nulpunten:

Voorbeeld 5.3. Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 7x + 6$.
a. Ontbind in factoren b. Geef de nulpunten
Uitwerking
a. $x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$
b. $x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 1$

In bovenstaande voorbeelden komt het niet voor dat herschrijfregel (12) nog toepasbaar is in de richting '$\rightarrow$'. Het optellen van alle gelijknamige termen hoort bij de taken die uitgevoerd moeten worden bij het geven van een polynoom. Als dit niet is gebeurd, is het antwoord pedagogisch niet correct. Er bestaan dus verschillende vormen waarbij herschrijfregel (12) niet meer toepasbaar is. De gebruikelijke vormen definiëren we als standaardvormen.

Definitie 8. (Standaardvormen polynomen)

(i). Standaardvorm I: een polynoom staat in standaardvorm I dan en slechts dan als het ontbonden is in irreducibele factoren.

(ii). Standaardvorm II: een polynoom staat in standaardvorm II dan en slechts dan als $p(x)$ van de vorm $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ met $a_i \in \mathbb{R}$ voor $i = 0, ..., n$ met $n \in \mathbb{N}$. Met andere woorden, de termen zijn geordend volgens negatieve lexicografische ordening[x].

(iii). Standaardvorm III: een polynoom staat in standaardvorm III dan en slechts dan als $p(x)$ van de vorm $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ met $a_i \in \mathbb{R}$ voor $i = 0, ..., n$ met $n \in \mathbb{N}$. Met andere woorden, de termen zijn volgens positieve lexicografische ordening[xi] geordend.

5.3.2 Gebroken functies

Binnen deze sectie bekijken we gebroken functies, elementen van de vorm $\frac{p(x)}{q(x)}$ met $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ polynomen van respectievelijk graad n en graad m met $n, m \in \mathbb{N}$.

Herschrijfregels
Beschouw een gebtoken functie $\frac{p(x)}{q(x)}$, dit is niets meer dan een breuk met een polynoom als teller en noemer. De herschrijfregels voor polynomen (zie def 7) kunnen dus afzonderlijk op $p(x)$ en $q(x)$ worden toegepast. Daarnaast gelden de herschrijfregels voor breuken (zie def 3). Zo komen we tot de volgende herschrijfregels.

Definitie 9. (Herschrijfregels gebroken functies)
Laat $p_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ polynomen met graad n_i, met $n_i \in \mathbb{N}$ voor $i = 1, ..., 4$. Er geldt:

$$\frac{p_1(x) \cdot p_3(x)}{p_2(x) \cdot p_3(x)} \leftrightarrow \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \tag{16}$$

$$\frac{p_1(x)}{-p_2(x)} \leftrightarrow \frac{-p_1(x)}{p_2(x)} \leftrightarrow -\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \tag{17}$$

$$\frac{p_1(x) \cdot p_2(x) + p_3(x)}{p_2(x)} \leftrightarrow p_1(x) + \frac{p_3(x)}{p_2(x)} \tag{18}$$

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} + \frac{p_3(x)}{p_4(x)} \leftrightarrow \frac{p_1(x) \cdot p_4(x) + p_2(x) \cdot p_3(x)}{p_2(x) \cdot p_4(x)} \tag{19}$$

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \cdot \frac{p_3(x)}{p_4(x)} \leftrightarrow \frac{p_1(x) \cdot p_3(x)}{p_2(x) \cdot p_4(x)} \tag{20}$$

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \div \frac{p_3(x)}{p_4(x)} \leftrightarrow \frac{p_1(x) \cdot p_4(x)}{p_2(x) \cdot p_3(x)} \tag{21}$$

Herschrijfregel (19) wordt in de richting '$\leftarrow$' ook wel breuksplitsen genoemd. Echter gaat men in dit proces vaak uit van de beginsituatie $\frac{p(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x)}$ en moeten de functies $p_1(x)$, $p_2(x)$ gevonden worden zodanig dat

$$\frac{p(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)}.$$

[x] Termen op volgorde van oplopende machten.
[xi] Termen op volgorde van aflopende machten.

Standaardvormen
Omdat op gebroken functies zowel de herschrijfregels voor breuken (zie def 3) als de herschrijfregels voor polynomen (zie def 7) toepasbaar zijn, is het mogelijk om de standaardvormen voor gebroken functies te definiëren aan de hand van de standaardfuncties van breuken en polynomen.

Definitie 10. (Standaardvormen gebroken functies)

(i). Standaardvorm I: de expressie $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ staat in standaardvorm I dan en slechts dan als $ggd[f_1(x), f_2(x)] = 1$ en zowel $f_1(x)$ als $f_2(x)$ staan in standaardvorm I van polynomen (zie def 8.i).

(ii). Standaardvorm II: de expressie $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ staat in standaardvorm II dan en slechts dan als $ggd[f_1(x), f_2(x)] = 1$ en zowel $f_1(x)$ als $f_2(x)$ staan in standaardvorm II van polynomen (zie def 8.ii).

(iii). Standaardvorm III: de expressie $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ staat in standaardvorm III dan en slechts dan als $ggd[f_1(x), f_2(x)] = 1$ en zowel $f_1(x)$ als $f_2(x)$ staan in standaardvorm III van polynomen (zie def 8.iii).

(iv). Standaardvorm IV: de expressie $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ staat in standaardvorm IV dan en slechts dan als $ggd[f_1(x), f_2(x)] = 1$ en $f_1(x)$ staat in standaardvorm II van polynomen (zie def 8.ii) en $f_2(x)$ staat in standaardvorm I van polynomen (zie def 8.i).

(v). Standaardvorm V: de expressie $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ staat in standaardvorm V dan en slechts dan als $ggd[f_1(x), f_2(x)] = 1$ en $f_1(x)$ staat in standaardvorm III van polynomen (zie def 8.iii) en $f_2(x)$ staat in standaardvorm I van polynomen (zie def 8.i).

Omdat de herschrijfregels en standaardvormen voor de gebroken functies af te leiden zijn van de herschrijfregels en standaardvormen voor breuken en polynomen, zijn de gebroken functies ook te testen door middel van de algoritmes voor breuken en polynomen. We schrijven dus geen apart algoritme voor de gebroken functies.

5.4 Transcendente functies

5.4.1 Goniometrische functies

In deze sectie bespreken we goniometrische functies. We zullen ons beperken tot uitdrukkingen met de sinus, cosinus en de tangens.

Herschrijfregels
In figuur 1 is een gedeelte van de formulekaart vwo wiskunde B afgebeeld. In deze afbeelding staan alle regels weergegeven met betrekking tot goniometrie die de gemiddelde scholier van het middelbaar onderwijs geacht wordt te kennen. De meest gebruikte rekenregels definiëren we als herschrijfregels:

Definitie 11. (Herschrijfregels goniometrische functies)
Voor alle $t, u \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \tag{22}$$

$$\tan(t) \leftrightarrow \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \tag{23}$$

$$\sin(-t) \leftrightarrow -\sin(t) \tag{24}$$

$$\cos(-t) \leftrightarrow \cos(t) \tag{25}$$

$$\sin(2t) \leftrightarrow 2\sin(t)\cos(t) \tag{26}$$

$$\cos(2t) \leftrightarrow \cos^2(t) - \sin^2(t) \leftrightarrow 2\cos^2(t) - 1 \leftrightarrow 1 - 2\sin^2(t) \tag{27}$$

$$\sin(t)\cos(u) \leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(t+u) + \frac{1}{2}\sin(t-u) \tag{28}$$

$$\cos(t)\cos(u) \leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(t+u) + \frac{1}{2}\cos(t-u) \tag{29}$$

$$\sin(t)\sin(u) \leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(t-u) - \frac{1}{2}\cos(t+u) \tag{30}$$

De herschrijfregels (23), (24) en (25) hoeft niet door de leerling toegepast te worden, het CAS schakelt achter de schermen tussen deze vormen.

Goniometrie

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$	$\sin(-t) = -\sin t$	$\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$	$\sin(\pi - t) = \sin t$
$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$	$\cos(-t) = \cos t$	$\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$	$\cos(\pi - t) = -\cos t$
$\sin 2t = 2\sin t\cos t$		$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$	
$\sin(t+u) = \sin t\cos u + \cos t\sin u$		$\sin t + \sin u = 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$	
$\sin(t-u) = \sin t\cos u - \cos t\sin u$		$\sin t - \sin u = 2\sin\frac{t-u}{2}\cos\frac{t+u}{2}$	
$\cos(t+u) = \cos t\cos u - \sin t\sin u$		$\cos t + \cos u = 2\cos\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$	
$\cos(t-u) = \cos t\cos u + \sin t\sin u$		$\cos t - \cos u = -2\sin\frac{t+u}{2}\sin\frac{t-u}{2}$	
$\sin\alpha = \sin\beta$ geeft $\alpha = \beta + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi - \beta + k\cdot 2\pi$			
$\cos\alpha = \cos\beta$ geeft $\alpha = \beta + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = -\beta + k\cdot 2\pi$			

Figuur 1: Formulekaart vwo wiskunde B: herschrijfregels goniometrie

Standaardvormen
In Getal & Ruimte vwo2 (p153-154) [2] wordt er zowel met radialen als graden gewerkt. De volgende voorbeeldopgaven komen uit Getal & Ruimte vwo NG/NT 4 (p106) [3]:

Voorbeeld 5.4. Herleid.

a $\sin(t) \cdot \cos(t - \frac{1}{2}\pi) - \cos(t) \cdot \sin(t - \frac{1}{2}\pi)$

b $[1 + \tan^2(3t)] \cdot \cos^2(3t)$

c $\sin(\frac{1}{2}\pi - 2t) \cdot \cos(\pi - 2t) + \sin(-2t) \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi - 2t)$

Uitwerking

a. $$\begin{aligned} \sin(t) \cdot \cos(t - \tfrac{1}{2}\pi) - \cos(t) \cdot \sin(t - \tfrac{1}{2}\pi) &= \sin(t) \cdot \sin(t) - \cos(t) \cdot - \cos(t) \\ &= \sin^2(t) + \cos^2(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} [1 + \tan^2(3t)] \cdot \cos^2(3t) &= [1 + \tfrac{\sin^2(3t)}{\cos^2(3t)}] \cdot \cos^2(3t) \\ &= \cos^2(3t) + \sin^2(3t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} \sin(\tfrac{1}{2}\pi - 2t) \cdot \cos(\pi - 2t) + \sin(-2t) \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\pi - 2t) &= \cos(2t) \cdot - \cos(2t) - \sin(2t) \cdot \sin(2t) \\ &= -(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

In bovenstaande opgaven is het duidelijk dat de herleide uitdrukking eenvoudiger is dan de oorspronkelijke uitdrukking. Dit is niet altijd het geval. Wanneer dit niet het geval is, vragen Aalmoes, Admiraal, et. al. voornamelijk om de volgende vorm: $a + b\sin(t)$ of $a + b\cos(t)$. Met $a, b \in \mathbb{R}$. Een uitdrukking in deze vorm is makkelijk te tekenen aan de hand van de standaardfuncties $\sin(t)$ en $\cos(t)$.

Soms bevat een uitdrukking machten of producten van goniometrische functies. Wanneer men een dergelijke uitdrukking wil integreren kan dat voor problemen zorgen. Het is dan eenvoudiger om de producten en machten van goniometrische functies om te schrijven in termen van goniometrische functies met gecombineerde argumenten.

We definiëren de volgende standaardvorm:

Definitie 12. (Standaardvorm goniometrische functies)

(i). Standaardvorm: een expressie binnen de goniometrie staat in standaardvorm dan en slechts dan als het in de volgende vorm staat $\sum_{k=0}^{K} a_k \cos(\alpha_k t) + b_k \sin(\beta_k t)$ met $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ voor $0 \leq k \leq K$, $K \in \mathbb{N}$ en $\alpha_0 \neq ... \neq \alpha_K$ en $\beta_0 \neq ... \neq \beta_K$.

In het middelbaar onderwijs komen binnen de goniometrie met name expressies voor die samen te stellen zijn door de basis operaties optellen en vermenigvuldigen toe te passen op de goniometrische functies $\sin(at)$, $\cos(bt)$ en $\tan(ct)$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$. Om breuken te voorkomen bekijken we in deze sectie enkel de uitdrukkingen waarbij elke tangens vermenigvuldigd wordt met een cosinus zodat de uitdrukking slechts de goniometrische functies sinus en cosinus bevat. Alles omvattend kunnen we deze expressies weergeven door $\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{m,n}\cos^m(b_{m,n}t)\sin^n(c_{m,n}t)$. Stelling 1 zegt dat deze expressie voor alle $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n} \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ om te schrijven is naar standaardvorm (Def. 12).

Stelling 1. Voor alle $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n} \in \mathbb{R}$, en voor alle $M, N \in \mathbb{N}$ is er een $K \in \mathbb{N}$, met $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ voor $k = 0, .., K$ met $\alpha_0 \neq ... \neq \alpha_K$ en $\beta_0 \neq ... \neq \beta_K$ zodanig dat:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{m,n}\cos^m(b_{m,n}t)\sin^n(c_{m,n}t) = \sum_{k=0}^{K} a_k\cos(\alpha_k t) + b_k\sin(\beta_k t)$$

Bewijs. Als $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\eta, \theta \in \mathbb{R}$: $\exists P \in \mathbb{N}$ en $c_p, d_p, \mu_p, \xi_p \in \mathbb{R}$ voor $p = 0, .., P$ zodanig dat:

$$\cos^m(\eta t)\sin^n(\theta t) = \sum_{p=0}^{P} c_p\cos(\mu_p t) + d_p\sin(\xi_p t),$$

dan $\exists K \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ voor $k = 0, .., K$ met $\alpha_0 \neq ... \neq \alpha_K$ en $\beta_0 \neq ... \neq \beta_K$ zodanig dat:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{m,n}\cos^m(b_{m,n}t)\sin^n(c_{m,n}t) = \sum_{k=0}^{K} a_k\cos(\alpha_k t) + b_k\sin(\beta_k t)$$

$\forall a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n} \in \mathbb{R}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Te bewijzen: $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\eta, \theta \in \mathbb{R}$: $\exists P \in \mathbb{N}$ en $c_p, d_p, \mu_p, \xi_p \in \mathbb{R}$ voor $p = 0, ..., P$ zodanig dat:

$$\cos^m(\eta t)\sin^n(\theta t) = \sum_{p=0}^{P} c_p\cos(\mu_p t) + d_p\sin(\xi_p t) \tag{31}$$

Basisgeval: Neem $n = m = 0$, we krijgen $\cos^0(\eta t)\sin^0(\theta t) = 1$. Neem:

$$c_p = \begin{cases} 1 & \text{als } p = 0 \\ 0 & \text{als } p \neq 0 \end{cases}, \qquad\qquad d_p = 0, \quad \forall p$$

en μ_p, ξ_p willekeurig.

Nu geldt voor $m = n = 0$: $\cos^m(\eta t)\sin^n(\theta t) = \sum_{p=0}^{P} c_p\cos(\mu_p t) + d_p\sin(\xi_p t)$ dus voldoet aan (31).

Inductiehypothese (IH): Neem aan dat (31) waar voor $m = \hat{m}$, $n = \hat{n}$ en $\eta, \theta \in \mathbb{R}$ willekeurig, dus $\exists c_p, d_p, \mu_p, \xi_p \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\cos^{\hat{m}}(\eta t)\sin^{\hat{n}}(\theta t) = \sum_{p=0}^{P} c_p\cos(\mu_p t) +$

$d_p \sin(\xi_p t)$, $\eta, \theta \in \mathbb{R}$.

Inductiestap (i): We laten zien dat onder IH (31) waar voor $m = \hat{m}+1$ en $n = \hat{n}$.

$$
\begin{aligned}
\cos^{\hat{m}+1}(\eta t)\sin^{\hat{n}}(\theta t) &= \cos^{\hat{m}}(\eta t)\sin^{\hat{n}}(\theta t)\cos(\eta t) \\
&= \Big(\textstyle\sum_{p=0}^{P} c_p\cos(\mu_p t) + d_p\sin(\xi_p t)\Big)\cos(\eta t) \\
&= \textstyle\sum_{p=0}^{P} c_p\cos(\mu_p t)\cos(\eta t) + d_p\sin(\xi_p t)\cos(\eta t) \\
&\quad \text{Er geldt } \cos(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}\cos(x+y) + \tfrac{1}{2}\cos(x-y) \text{ en} \\
&\quad \cos(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}\sin(x+y) - \tfrac{1}{2}\sin(x-y)\text{, dus:} \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{p=0}^{P} c_p\big(\cos(\mu_p t+\eta t)+\cos(\mu_p t-\eta t)\big)+d_p\big(\sin(\eta t+\xi_p t)-\sin(\eta t-\xi_p t)\big) \\
&= \textstyle\sum_{p=0}^{2P+1} \hat{c}_p\cos(\hat{\mu}_p t) + \hat{d}_p\sin(\hat{\xi}_p t)
\end{aligned}
$$

Met:

$$
\hat{c}_p = \frac{1}{2}c_p,\ \text{voor } 0 \le p \le 2P+1, \qquad \hat{d}_p = \begin{cases} \frac{1}{2}d_p, & \text{voor } 0 \le p \le P \\ -\frac{1}{2}d_{p-P-1}, & \text{voor } P+1 \le p \le 2P+1 \end{cases}
$$

$$
\hat{\mu}_p = \begin{cases} \mu_p + \eta, & \text{voor } 0 \le p \le P \\ \mu_{p-P-1} - \eta, & \text{voor } P+1 \le p \le 2P+1 \end{cases}, \quad \hat{\xi}_p = \begin{cases} \eta + \xi_p, & \text{voor } 0 \le p \le P \\ \eta - \xi_{p-P-1}, & \text{voor } P+1 \le p \le 2P+1 \end{cases}
$$

Dus als (31) geldt voor $\hat{m}, \hat{n}$ dan ook voor $\hat{m}+1, \hat{n}$.

Inductiestap (ii): We laten zien dat onder IH (31) waar voor $m = \hat{m}$ en $n = \hat{n}+1$

$$
\begin{aligned}
\cos^{\hat{m}}(\eta t)\sin^{\hat{n}+1}(\theta t) &= \cos^{\hat{m}}(\eta t)\sin^{\hat{n}}(\theta t)\sin(\theta t) \\
&= \Big(\textstyle\sum_{p=0}^{P} c_p\cos(\mu_p t) + d_p\sin(\xi_p t)\Big)\sin(\theta t) \\
&= \textstyle\sum_{p=0}^{P} c_p\cos(\mu_p t)\sin(\theta t) + d_p\sin(\xi_p t)\sin(\theta t) \\
&\quad \text{Er geldt } \cos(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}\sin(x+y) - \tfrac{1}{2}\sin(x-y) \text{ en} \\
&\quad \sin(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}\cos(x-y) - \tfrac{1}{2}\cos(x+y)\text{, dus:} \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{p=0}^{P} c_p\big(\sin(\mu_p t+\theta t)-\sin(\mu_p t-\theta t)\big)+d_p\big(\cos(\xi_p t-\theta t)-\cos(\xi_p t+\theta t)\big) \\
&= \textstyle\sum_{p=0}^{2P+1} \hat{c}_p\cos(\hat{\mu}_p t) + \hat{d}_p\sin(\hat{\xi}_p t)
\end{aligned}
$$

Met:

$$
\hat{c}_p = \begin{cases} \frac{1}{2}c_p, & \text{voor } 0 \le p \le P \\ -\frac{1}{2}c_{p-P-1}, & \text{voor } P+1 \le p \le 2P+1 \end{cases}, \quad \hat{d}_p = \begin{cases} \frac{1}{2}d_p, & \text{voor } 0 \le p \le P \\ -\frac{1}{2}d_{p-P-1}, & \text{voor } P+1 \le p \le 2P+1 \end{cases}
$$

$$\hat{\mu}_p = \begin{cases} \mu_p + \theta, & \text{voor } 0 \leq p \leq P \\ \mu_{p-P-1} - \theta, & \text{voor } P+1 \leq p \leq 2P+1 \end{cases}, \quad \hat{\xi}_p = \begin{cases} \xi_p - \theta, & \text{voor } 0 \leq p \leq P \\ \xi_{p-P-1} + \theta, & \text{voor } P+1 \leq p \leq 2P+1 \end{cases}$$

Dus onder IH geldt (31) voor $\hat{m}, \hat{n}+1$.

Nu aangetoond: als (31) geldt voor $m = \hat{m}$, $n = \hat{n}$ dan ook voor $m = \hat{m}+1$, $n = \hat{n}$ en $m = \hat{m}$, $n = \hat{n}+1$. Vergelijking (31) geldt voor $m = n = 0$ dus $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\eta, \theta \in \mathbb{R}$: $\exists P \in \mathbb{N}$ en $c_p, d_p, \mu_p, \xi_p \in \mathbb{R}$ voor $p = 0, .., P$ zodanig dat:

$$\cos^m(\eta t)\sin^n(\theta t) = \sum_{p=0}^{P} c_p \cos(\mu_p t) + d_p \sin(\xi_p t)$$

Dus: $\exists K \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ voor $k = 0, .., K$ met $\alpha_0 \neq ... \neq \alpha_K$ en $\beta_0 \neq ... \neq \beta_K$ zodanig dat:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{m,n} \cos^m(b_{m,n}t)\sin^n(c_{m,n}t) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(\alpha_k t) + b_k \sin(\beta_k t)$$

$\forall a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n} \in \mathbb{R}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. $\square$

5.4.2 Logaritmen

In deze sectie bespreken we logaritmische functies.

Herschrijfregels
In figuur 2 zijn de rekenregels van machten en logaritmen weergegeven die in het middelbaar onderwijs gebruikt worden.

De volgende rekenregels definiëren we als herschrijfregels voor logaritmen.

Definitie 13. (Herschrijfregels logaritmen)
Voor alle $g, p \in \mathbb{N}$ en $a, b \in \mathbb{R}$ zodanig dat $a, b \geq 1$ geldt:

$$^g\log(a) \leftrightarrow \frac{^p\log(a)}{^p\log(g)} \tag{32}$$

$$^g\log(a) +^g \log(b) \leftrightarrow^g \log(a \cdot b) \tag{33}$$

$$^g\log(a) -^g \log(b) \leftrightarrow^g \log(\frac{a}{b}) \tag{34}$$

$$^g\log(a^p) \leftrightarrow p \cdot^g \log(a) \tag{35}$$

$$^e\log(a) \leftrightarrow \ln(a) \tag{36}$$

$$^{g}\log(g) = 1, \ ^{g}\log(1) = 0 \quad (37)$$

$$^{g}\log(\frac{1}{a}) = -^{g}\log(n) \quad (38)$$ [xii]

Machten en logaritmen

regel	**voorwaarde**
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a > 0$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a > 0$, $n > 0$
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a > 0$
$a^p : a^q = a^{p-q}$	$a > 0$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$a > 0$
$(ab)^p = a^p \cdot b^p$	$a > 0$, $b > 0$
$^{g}\log a = \frac{^{p}\log a}{^{p}\log g}$	$g > 0$, $g \neq 0$, $a > 0$, $p > 0$, $p \neq 1$
$^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$
$^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \frac{a}{b}$	$g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$
$^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$

Figuur 2: Formulekaart vwo wiskunde B: herschrijfregels machten en logaritmen

Standaardvormen

Aalmoes, Admiraal, et. al. gebruiken in Getal & Ruimte vwo2 (p74-82) [2] de volgende vorm als standaardvorm voor logaritmen:

$$^{a}\log(b)$$

Met $a, b \in \mathbb{R}$ Het hangt van de opgave af welke vorm er gewenst is, zo wordt er in het volgende voorbeeld gevraagd om de logaritmen als één logaritme te schrijven:

[xii] De gebruiker hoeft deze herschrijfregel niet zelf toe te passen, binnen het algoritme schakelt het CAS achter de schermen tussen deze twee notaties.

Voorbeeld 5.5. Schrijf als één logaritme.

a. $\log(12) + \log(3)$	c. ${}^3\log(5) + 2 \cdot {}^3\log(4)$
b. ${}^6\log(54) - {}^6\log(9)$	d. $2 \cdot {}^2\log(36) - 4 \cdot {}^2\log(3)$

Uitwerking
a. $\log(12) + \log(3) = \log(12 \cdot 3) = \log(36)$
b. ${}^6\log(54) - {}^6\log(9) = {}^6\log(\frac{54}{9}) = {}^6\log(6) = 1$
c. ${}^3\log(5) + 2 \cdot {}^3\log(4) = {}^3\log(5) + {}^3\log(4^2) = {}^3\log(5 \cdot 16) = {}^3\log(80)$
d. $2 \cdot {}^2\log(36) - 4 \cdot {}^2\log(3) = {}^2\log(36^2) - {}^2\log(3^4) = {}^2\log(\frac{1296}{81}) = {}^2\log(16) = 4$

In het volgende voorbeeld wordt er verwacht dat de leerling het logaritme omschrijft naar meerdere logaritmen:

Voorbeeld 5.6. Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(x)$ en $g(x) = {}^3\log(9x)$.
Door welke verticale verschuiving ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van f?

Uitwerking
${}^3\log(9x) = {}^3\log(x) + {}^3\log(9) = f(x) + 2$,
de grafiek g is dus uit f ontstaan door een verticale verschuiving van 2.

In bovenstaande voorbeelden komen twee verschillende vormen voor. Enerzijds de vorm ${}^a\log(b)$ $a \in \mathbb{N}$ en $b \in \mathbb{Q}$. En anderzijds ${}^a\log(b_0) + .. + {}^a\log(b_n)$ voor zekere $a \in \mathbb{N}$ en $b_i \in \mathbb{Q}$ $\forall i$. In praktisch alle opgaven die in het middelbaar onderwijs voorkomen wordt er per som een vast grondtal gebruikt. In deze thesis bekijken we alleen expressies die bestaan uit logaritmen met een vast grondtal. Zonder verlies van algemeenheid stellen we vanaf nu het grondtal $a = e$ zodat ${}^a\log(b) = ln(b)$, het natuurlijk logaritme. We definiëren de volgende standaardvormen.

Definitie 14. (Standaardvormen logaritmen)

(i). Standaardvorm I: een logaritmische functie staat in standaardvorm I dan en slechts dan als het in de volgende vorm staat: $\sum_{i=0}^{n} c_i \ln(p_i)$ met $c_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \in \mathbb{N}^+$, priem en verschillend voor alle $i = 0, ..., n$.

(ii). Standaardvorm II: een logaritmische functie staat in standaardvorm II dan en slechts dan als het in de volgende vorm staat: $\ln(a)$ met $a \in \mathbb{Q}$ en $a > 0$.

(iii). Standaardvorm III: een expressie staat in standaardvorm III dan en slechts dan als het in de volgende vorm staat: $c\ln(a)$ met $c \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Q}$ en $a > 0$ zodanig dat $\nexists w, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $w^n = a$.

Leerlingen in het middelbaar onderwijs krijgen slechts te maken met uitdrukkingen van de vorm: $a_0 \ln(b_0) + ... + a_n \ln(b_n)$. Volgens stelling 2 is deze vorm voor alle $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, ..., n$ om te schrijven naar standaardvorm I (Def. 14).

Stelling 2. Voor alle $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, .., k$, is er een $m \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{Z}$, $p_j \in \mathbb{N}^+$ met p_j priem en verschillend voor $j = 0, .., m$ zodanig dat $\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) = \sum_{j=0}^{m} c_j \ln(p_j)$.

Bewijs.
Te bewijzen: Voor alle $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, .., n$ is er een $m \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{Z}$, $p_j \in \mathbb{N}^+$ met p_j priem en verschillend voor $j = 0, .., m$ zodanig dat:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) = \sum_{j=0}^{m} c_j \ln(p_j) \tag{39}$$

Laat $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ met $b_i > 0$ voor $i = 0, ..., n$ willekeurig. Dan:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) &= \sum_{i=0}^{n} \ln(b_i^{a_i}) \\ &= \ln\Big(\prod_{i=0}^{n} b_i^{a_i}\Big) \end{aligned}$$

omdat $\mathbb{Q}$ gesloten onder vermenigvuldiging volgt dat $\prod_{i=0}^{n} b_i^{a_i} \in \mathbb{Q}$, verder $\prod_{i=0}^{n} b_i^{a_i} > 0$ dus $\exists x, y \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\prod_{i=0}^{n} b_i^{a_i} = \frac{x}{y}$. Nu:

$$\begin{aligned} \ln\Big(\prod_{i=0}^{n} b_i^{a_i}\Big) &= \ln(\frac{x}{y}) \\ &= \ln(x) - \ln(y) \\ &= \ln\Big(\prod_{k=0}^{K} \hat{p}_k^{\hat{d}_k}\Big) - \ln\Big(\prod_{l=0}^{L} \tilde{p}_l^{\tilde{d}_l}\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{K} \hat{d}_k \ln(\hat{p}_k) - \sum_{l=0}^{L} \tilde{d}_l \ln(\tilde{p}_l) \end{aligned}$$

Met $\prod_{k=0}^{K} \hat{p}_k^{\hat{d}_k}$ en $\prod_{l=0}^{L} \tilde{p}_l^{\tilde{d}_l}$ de priemontbinding van respectievelijk x en y. Nu geldt (39) met $m = K + L + 1$ en:

$$c_j = \begin{cases} \hat{d}_j, & \text{voor } 0 \leq j \leq K \\ -\tilde{d}_{j-K-1}, & \text{voor } K+1 \leq j \leq m \end{cases}, \qquad p_j = \begin{cases} \hat{p}_j, & \text{voor } 0 \leq j \leq K \\ \tilde{p}_{j-K-1}, & \text{voor } K+1 \leq j \leq m \end{cases}$$

□

Stelling 3 zegt dat een expressie van de vorm $\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, .., n$ om te schrijven is naar standaardvorm II (Def. 14.ii).

Stelling 3. Voor alle $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, .., n$ is er een $c \in \mathbb{Q}$, zodanig dat $\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) = \ln(c)$.

Bewijs. Laat $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, ..., n$ willekeurig dan:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) &= \sum_{i=0}^{n} \ln(b_i^{a_i}) \\ &= \ln\Big(\prod_{i=0}^{n} b_i^{a_i}\Big)\end{aligned}$$

omdat $\mathbb{Q}$ gesloten onder vermenigvuldiging volgt $\prod_{i=0}^{n} b_i^{a_i} \in \mathbb{Q}$. Dus voor alle $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, ..., n$ is er een $c \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) = \ln(c)$, namelijk $c = \prod_{i=0}^{n} b_i^{a_i}$. □

Stelling 4. Voor alle $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, ..., n$ is er een $c \in \mathbb{Z}$ en $a \in \mathbb{Q}$ met $a > 0$ en $\nexists w, n \in \mathbb{Z} : w^n = a$ zodanig dat: $\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) = c \ln(a)$.

Bewijs.
Te bewijzen: Voor alle $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, ..., n$ is er een $c \in \mathbb{Z}$ en $a \in \mathbb{Q}$ met $a > 0$ en $\nexists w, n \in \mathbb{Z} : w^n = a$ zodanig dat:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) = c \ln(a) \tag{40}$$

Laat $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Q}$ voor $i = 0, ..., n$ willekeurig volgens stelling 3 is er een $a \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $\sum_{i=0}^{n} a_i \ln(b_i) = \ln(a)$. We onderscheiden twee gevallen:

(i). Stel $\nexists w, n \in \mathbb{Z} : w^n = a$ dan geldt (40) met $c = 0$.

(ii). Stel $\exists w, n \in \mathbb{Z} : w^n = a$ dan krijgen we:

$$\begin{aligned}\ln(a) &= \ln(w^n) \\ &= n \ln(w)\end{aligned}$$

Nu geldt (40) met $c = n$ en $a = w$.

□

6 Antwoorden CAS

In sectie (5) hebben we de meest toegankelijke vormen van antwoorden besproken en gedefinieerd als standaardvormen. Binnen deze sectie bekijken we welke standaardvormen verschillende CAS als Mathematica, Sage en Maxima per categorie aanhouden. In tabel 2 staan in de eerste kolom een aantal voorbeeld vragen. In de tweede kolom staan de verwachte antwoorden, de antwoorden die in het middelbaar onderwijs als conventioneel worden gezien. In de derde, vierde en vijfde kolom staan de antwoorden zoals respectievelijk het CAS Mathematica, Sage en Maxima ze geeft.

Aan de hand van vraag 1 zien we dat zowel Mathematica als Sage en Maxima automatisch de breuken vereenvoudigen, maar de helen niet buiten de breuk halen. De breuken worden in standaardvorm I (Def. 4.i) weergegeven. Wanneer we naar de antwoorden op vraag 2 kijken zien we dat Mathematica, Sage en Maxima de wortels direct vereenvoudigen. De CAS houden voor wortels de standaardvorm II (Def. 6.ii) aan. Aan het antwoord op vraag 11 zien we dat Mathematica polynomen weergeeft in standaardvorm II (Def. 8.ii) terwijl Sage en Maxima standaardvorm III (Def. 8.iii) aanhouden, wat tevens ook de meest gebruikte vorm in het middelbaar onderwijs is. In regel 7 zien we dat Mathematica en Maxima de verdubbelingsregel automatisch toepassen, terwijl Sage de ingevoerde expressie ongeëvalueerd laat. Aan de vragen 8,9 en 10 is te zien dat Mathematica de logaritmische uitdrukkingen automatisch evalueert en weergeeft in standaardvorm II (Def. 14) terwijl Sage en Maxima de expressies ongeëvalueerd laten.

	Vraag	Antwoorden	Output Mathematica	Output Sage	Output Maxima
1.	$\frac{\frac{2}{3}+6}{\frac{2}{3}+3}$	$1\frac{9}{11}$ & $\frac{20}{11}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{20}{11}$
2.	$\sqrt{8}+\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$ & $\sqrt{8}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
3.	$(a^{-2}+b^{-2})^{-1}$	$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$	$\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$	$\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$	$\frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}}$
4.	$\frac{(ab)^{2/3}}{ab^{1/3}}$	$(\frac{b}{a})^{1/3}$	$\frac{ab^{2/3}}{a \cdot b^{1/3}}$	$\frac{b^{1/3}}{a^{1/3}}$	$\frac{b^{1/3}}{a^{1/2}}$
5.	$(2a+b)^2-(2a-b)^2$	$8ab$	$8ab$	$(2a+b)^2-(2a-b)^2$	$(b+2a)^2-(2a-b)^2$
6.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$	$\sin^2(x)$	$\sin^2(x)$	$-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}$
7.	$\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$	$\cos(x+y)$	$\cos(x+y)$	$-\sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y)$	$\cos(y+x)$
8.	$\log(12)+\log(3)$	$\log(36)$ & $2\log(6)$	$\log(36)$	$\log(3)+\log(12)$	$\log(12)+\log(3)$
9.	$\log(6)-\log(4)$	$\log(\frac{3}{2})$	$\log(\frac{3}{2})$	$-\log(4)+\log(6)$	$\log(6)-\log(4)$
10.	$3 \cdot \log(3)$	$\log(27)$	$\log(27)$	$3\log(3)$	$3\log(3)$
11.	$\frac{d}{dx}(5x^4-3x^3+2x)$	$20x^3-9x^2+2$	$2-9x^2+20x^3$	$20x^3-9x^2+2$	$20x^3-9x^2+2$
12.	$\frac{d}{dx}(\sin(x)-\cos(2x))$	$\cos(x)+2\sin(2x)$	$\cos(x)+2\sin(2x)$	$2\sin(2x)+\cos(x)$	$2\sin(2x)+\cos(x)$
13.	$\frac{d}{dx}\cos^2(x)$	$-\sin(2x)$	$-2\cos(x)\sin(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
14.	$\frac{d}{dx}\sin(x)\cos(x)$	$\cos(2x)$	$\cos^2(x)-\sin^2(x)$	$-\sin(x)^2 + \cos(x)^2$	$-\sin^2(x)+\cos^2(x)$
15.	$\int x^3-3xdx$	$\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$	$-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$	$\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}xr$	$\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}$
16.	$\int 2\sin(x)\cos(x)dx$	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$	$-\cos^2(x)$	$-\cos^2(x)$

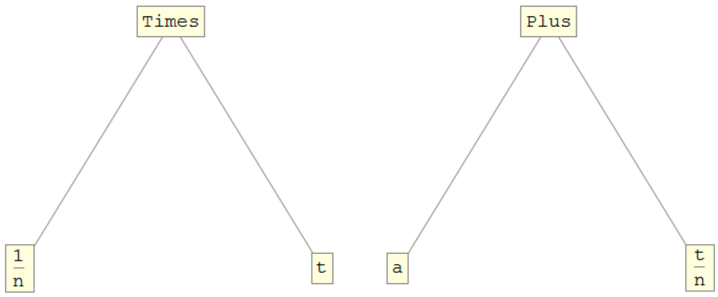
Tabel 2: Verwachte antwoorden tegenover de antwoorden van CAS Mathematica, Sage en Maxima

7 Algoritmes

Per categorie hebben we een algoritme geschreven. Deze algoritmes vereisen twee expressies als input, enerzijds een te testen antwoord op een bepaalde vraag en anderzijds een wiskundig correct antwoord op deze vraag. De algoritmes testen of het ingevoerde antwoord een wiskundig correct antwoord is op de vraag, als het antwoord wiskundig correct is gaat het algoritme na in welke vorm het antwoord is gegeven. In deze sectie staan deze algoritmes beschreven. In bijlage A.3 is een handleiding van de algoritmes te vinden waarin de algoritmes aan de hand van voorbeelden worden gedemonstreerd. In bijlage A.4 zijn de stroomdiagrammen van de algoritmes weergegeven.

7.1 Rationale getallen

7.1.1 Breuken



(a) $\frac{t}{n}$ (b) $a + \frac{t}{n}$

Figuur 3: Bomenweergave twee lagen van de twee standaardvormen van breuken

Dit algoritme is gemaakt om antwoorden op vragen met breuken als verwacht antwoord, te testen op correctheid en vorm. Het algoritme vereist twee expressies als input, expressie A en expressie C. Expressie A is het antwoord dat getest moet worden op correctheid. Omdat A een mogelijk antwoord is binnen de categorie breuken, geldt $A \in \mathbb{Q}$. Verder is expressie A een uitdrukking die samen te stellen is door de operaties optelling en vermenigvuldiging toe te passen op elementen uit de rationale getallen. De tweede input, expressie C is een wiskundig correct antwoord op de betreffende vraag en is nodig om expressie A op wiskundige correctheid te testen. Er geldt dus ook $C \in \mathbb{Q}$, verder wordt expressie C niet in een bepaalde (standaard-)vorm vereist. Immers expressie C wordt enkel gebruikt om expressie A op wiskundige correctheid te testen door na te gaan of expressie A algebraïsch equivalent is aan expressie C.

Het algoritme test eerst of expressie A een wiskundig correct antwoord is op de vraag door de algebraïsche equivalentie tussen expressie A en C te testen. Als A een wiskundig correct antwoord is op de betreffende vraag, gaat het algoritme na in welke vorm deze expressie zich bevindt. Het algoritme doorloopt de boom weergegeven in twee lagen van expressie A, zoals die gegeven wordt in Wolfram Mathematica 8.0 door het commando $TreeForm[A, 2]$. Laat *Root* de uitdrukking bovenaan deze boom en *Level*2 de uitdrukkingen bij de bladeren in laag 2 van deze boom. In figuur 3 zijn de bomen weergegeven van de twee standaardvormen, respectievelijk $\frac{t}{n}$ en $a + \frac{t}{n}$. Hieronder wordt het algoritme beschreven. In bijlage A.4 figuur 4 is het stroomdiagram van dit algoritme weergegeven.

1. Geldt $A == C$, m.a.w. zijn A en C Algebraïsch equivalent?
    - False: A representeert een ander wiskundig object dan C waaruit volgt dat A en C niet algebraïsch equivalent zijn en dus is A wiskundig niet correct. Output: wiskundig incorrect.
    - True: A is wiskundig correct, ga naar stap 2.
2. Geldt $Root == Times$?
    - False: hieruit volgt dat $\nexists t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $A = \frac{t}{n}$, ga naar stap 7.
    - True: het is mogelijk dat $\exists t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $A = \frac{t}{n}$, ga naar stap 3.
3. Bestaat Level2 uit Integer en Rationaal?
    - False: hieruit volgt dat $\nexists t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $A = \frac{t}{n}$ dus A is pedagogisch niet correct. Output: pedagogisch incorrect.
    - True: nu volgt dat $\exists t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $A = \frac{t}{n}$, ga naar stap 4.
4. Geldt $ggd(integer, noemer\ rationaal) == 1$?
    - False: hieruit volgt dat $ggd(t, n) \neq 1$ waaruit volgt dat de breuk $\frac{t}{n}$ nog verder vereenvoudigd kan worden. Output: Esthetisch incorrect, breuk niet volledig vereenvoudigd.
    - True: hieruit volgt dat $ggd(t, n) = 1$ dus A is volledig vereenvoudigd, ga naar stap 5.
5. Geldt $noemer\ rationaal > 0$?
    - False: de noemer van de breuk is negatief, deze dient positief te zijn. Output: Esthetisch incorrect, negatieve noemer.
    - True: de noemer van de breuk is positief, ga naar stap 6.
6. Geldt $|\text{integer}| < |\text{noemer rationaal}|$?
    - False: hieruit volgt dat $|t| > |n|$ dus de breuk bevindt zich in standaardvorm I. Output: Standaardvorm I.
    - True: hieruit volgt dat $|t| < |n|$ dus de breuk bevindt zich in standaardvorm II. Output: Standaardvom II.
7. Geldt Root == Plus?

- False: hieruit volgt dat $\nexists a, t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $A = a + \frac{t}{n}$ dus A is pedagogisch niet correct. Output: Pedagogisch incorrect.
- True: het is mogelijk dat $\exists a, t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $A = a + \frac{t}{n}$, ga naar stap 8.

8. Bestaat Level2 uit Integer en Rationaal?
   - False: hieruit volgt dat $\nexists a, t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $A = a + \frac{t}{n}$ dus A is pedagogisch niet correct. Output: Pedagogisch incorrect.
   - True: hieruit volgt dat $\exists a, t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $A = a + \frac{t}{n}$, ga naar stap 9.
9. Geldt $ggd(teller\ rationaal, noemer\ rationaal) == 1$?
   - False: hieruit volgt dat $ggd(t, n) \neq 1$ dus de breuk $\frac{t}{n}$ is niet volledig vereenvoudigd. Output: Esthetisch incorrect, breuk niet volledig vereenvoudigd.
   - True: hieruit volgt dat $ggd(t, n) = 1$ dus de breuk is volledig vereenvoudigd, ga naar stap 10.
10. Geldt $noemer\ rationaal > 0$?
    - False: de noemer van de breuk is negatief, deze dient positief te zijn. Output: Esthetisch incorrect, negatieve noemer.
    - True: de noemer van de breuk is positief, ga naar stap 11.
11. Geldt |teller rationaal| < |noemer rationaal|?
    - False: hieruit volgt dat A van de vorm $a + \frac{t}{n}$ met $|t| > |n|$ dus er kunnen nog gehelen buiten de breuk worden gehaald. Output: Esthetisch incorrect, niet alle helen zijn buiten de breuk gehaald.
    - True: hieruit volgt dat A van de vorm $a + \frac{t}{n}$ met $a \in \mathbb{N}$ en $|t| < |n|$ dus de breuk bevindt zich in standaardvorm II. Output: Standaardvom II.

In de handleiding (bijlage A.3) bespreken we het algoritme aan de hand van een aantal opgaven. Per vraag geven we een aantal mogelijke antwoorden. Deze antwoorden geven we als input aan het algoritme, in tabel 3 is de output van het algoritme per antwoord te zien.

De expressie bij vraag 1. input (i) is een correct antwoord op de vraag maar de leerling heeft de vereiste taken niet uitgevoerd. Er bevindt zich namelijk nog een optelling van twee breuken in de expressie. Het algoritme geeft dan ook "Pedagogisch incorrect" als output. Deze output zien we ook terug bij vraag 2 input (i) en vraag 3 input (i). Bij beide expressies zijn de vereiste taken niet uitgevoerd, enerzijds bevat de expressie nog een deling en anderzijds een vermenigvuldiging tussen twee breuken. Bij vraag 1 input (ii) en vraag 2 input (iii) geeft het algoritme de output "Esthetisch incorrect, breuk niet volledig vereenvoudigd". Bij de breuken in deze expressies is de grootste gemene deler van de teller en de noemer groter dan 1. De output behorende bij vraag 2 output (iv) is "Standaardvorm I". De expressie is in de vorm $\frac{t}{n}$ met $t, n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $ggd(t, n) = 1$ en $n > 0$. Het algoritme geeft bij de expressies van vraag 1 input (iii), vraag 2 input (v), vraag 3 input (iii) en vraag 3 input (iv) de output "Standaardvorm II". Bij vraag 2 input (ii) zien we als output "Wiskundig incorrect". Het antwoord is geen correct antwoord op de vraag. De expressie bij vraag 3 input (ii) bevat een negatieve noemer. Omdat beide standaardvormen een positieve noemer vereisen geeft het algoritme de output "Esthetisch incorrect, negatieve noemer".

	Vraag		Input	Output
1.	$\frac{3}{15} - \frac{1}{10} + \frac{5}{6}$	(i).	$\frac{3}{30} + \frac{25}{30}$	Pedagogisch incorrect
		(ii).	$\frac{28}{30}$	Esthetisch incorrect, breuk niet volledig vereenvoudigd
		(iii).	$\frac{14}{15}$	Standaardvorm II
2.	$\frac{\frac{2}{3}+6}{\frac{2}{3}+3}$	(i).	$\frac{20/3}{11/3}$	Pedagogisch incorrect
		(ii).	$\frac{20}{3} \cdot \frac{11}{3}$	Wiskundig incorrect
		(iii).	$\frac{60}{33}$	Esthetisch incorrect, Breuk niet volledig vereenvoudigd
		(iv).	$\frac{20}{11}$	Standaardvorm I
		(v).	$1\frac{9}{11}$	Standaardvorm II
3.	$\frac{2}{3} \div \frac{-3}{4}$	(i).	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{-3}$	Pedagogisch incorrect
		(ii).	$\frac{8}{-9}$	Esthetisch incorrect, negatieve Noemer
		(iii).	$\frac{-8}{9}$	Standaardvorm II
		(iv).	$-\frac{8}{9}$	Standaardvorm II

Tabel 3: Output algoritme breuken bij bepaalde input

7.2 Algebraïsche getallen

7.2.1 Wortels

Dit algoritme test antwoorden op vragen met wortels als verwacht antwoord, op correctheid en vorm. Het algoritme vereist twee expressies als input, expressie A en expressie C. Expressie A is het antwoord dat getest moet worden op correctheid. Omdat A een mogelijk antwoord is binnen de categorie wortels, geldt $A \in \mathbb{A}$. Verder is expressie A een uitdrukking die samen te stellen is door de operaties optelling en vermenigvuldiging toe te passen op elementen uit de algebraïsche getallen. De tweede input, expressie C is een wiskundig correct antwoord op de betreffende vraag en is nodig om expressie A op wiskundige correctheid te testen. Er geldt dus ook $C \in \mathbb{A}$, omdat expressie C enkel gebruikt wordt om expressie A op wiskundige correctheid te testen door de algebraïsche equivalentie tussen de expressies na te gaan, wordt expressie C niet in een bepaalde (standaard-)vorm vereist.

Eerst test het algoritme of expressie A een wiskundig correct antwoord is voor een bepaalde vraag, door de algebraïsche equivalentie tussen expressie A en C te testen. ook wordt er nagegaan in welke vorm de expressie zich bevindt. Het algoritme doorloopt de boom weergegeven in twee lagen van expressie A zoals die gegeven wordt in Wolfram Mathematica 8.0 door het commando $TreeForm[A, 2]$. Laat *Root* de uitdrukking bovenaan deze boom en $Level2$ de uitdrukkingen bij de bladeren in laag 2 van deze boom. Hieronder wordt een beschrijving van het algoritme gegeven. In bijlage A.4 figuur 5 is het stroomdiagram van dit algoritme weergegeven.

1. Geldt A==B?
    - False: de expressies A en C representeren niet eenzelfde wiskundig object waaruit volgt dat de twee expressies algebraïsch niet equivalent zijn, dus A is wiskundig incorrect. Output: Wiskundig incorrect.
    - True: de expressies A en C zijn algebraïsch equivalent, hieruit volgt dat A wiskundig correct is. Ga verder met stap 2.
2. Geldt *Root* == *Sqrt*?
    - False: hieruit volgt dat A niet van de vorm $A = \sqrt{a}$ is. Ga verder met stap 6.
    - True: hieruit volgt dat A van de volgende vorm is: $A = \sqrt{a}$. Ga naar stap 3.
3. Is Level 2 integer?
    - False: hieruit volgt dat A van de vorm $\sqrt{a}$ met $a \notin \mathbb{N}$. Output: Pedagogisch incorrect.
    - True: hieruit volgt $\exists a \in \mathbb{N}$ zodanig dat $A = \sqrt{a}$, ga naar stap 4.
4. Geldt Sqrt[Integer lvl 2]== Integer?

- False: hieruit volgt $\sqrt{a} \neq Integer$, ga naar stap 5.
- True: hieruit volgt $\sqrt{a} = Integer$, de wortel kan dus uitgewerkt worden. Output: Pedagogisch incorrect, wortel uitwerken.

5. Is Integer lvl2 kwadraat-vrij?
   - False: hieruit volgt $\exists d \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d^2|a$ met $A = \sqrt{a}$, dus expressie bevindt zich in standaardvorm I. Output: Standaardvorm I
   - True: hieruit volgt dat $\forall d \in \mathbb{N}$ geldt $d^2 \nmid a$ met $A = \sqrt{a}$, de expressie bevindt zich dus in standaardvorm II. Output: Standaardvorm II
6. Geldt $Roots == Power$?
   - False: hieruit volgt dat A niet van de vorm $a^{1/n}$ kan zijn, ga door naar stap 10.
   - True: Hieruit volgt dat $\exists a, b$ zodanig dat $A = a^b$, de waarden van a en b zijn nog onbekend. Ga naar stap 7.
7. Bevat Level 2: links integer, rechts rationaal?
   - False: hieruit volgt dat $\nexists a, m, n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $A = a^{\frac{m}{n}}$ dus A is pedagogisch niet correct. Output: pedagogisch incorrect.
   - True: hieruit volgt dat $\exists a, m, n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $A = a^{\frac{m}{n}}$. Ga naar stap 8.
8. Geldt $a^{\frac{m}{n}}$ == Integer?
   - False: expressie staat in de vorm $a^{\frac{m}{n}} \notin \mathbb{N}$. Ga door naar stap 9.
   - True: expressie staat in de vorm $a^{\frac{m}{n}} \in \mathbb{N}$. Output: Pedagogisch incorrect, wortel verder uitwerken.
9. Is a^m n^{de}-machtsvrij?
   - False: hieruit volgt dat $\exists d \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d^n|a^m$ met $A = a^{\frac{m}{n}}$, expressie A staat in standaardvorm I. Output: Standaardvorm I.
   - True: hieruit volgt dat $\forall d \in \mathbb{N}$ geldt $d^n \nmid a^m$ met $A = a^{\frac{m}{n}}$, expressie A staat in standaardvorm II. Output: Standaardvorm II.
10. Geldt $Roots == Times$?
    - False: hieruit volgt dat A niet van de vorm $a \cdot b^{\frac{m}{n}}$ is, we hebben al gezien dat A ook niet van de vorm $a^{\frac{m}{n}}$. Output "Pedagogisch incorrect".
    - True: het is mogelijk dat A van de vorm $a \cdot b^{\frac{m}{n}}$. Ga door naar stap 11.
11. Bestaat $Level2$ uit $a \in \mathbb{Q}$ en $b^{\frac{m}{n}}$ met $b, m, n \in \mathbb{N}$?
    - False: output "Pedagogisch incorrect".

- True: expressie is van de vorm $a \cdot b^{\frac{m}{n}}$ met $a \in \mathbb{Q}$ en $b, m, n \in \mathbb{N}$. Ga door naar stap 12.

12. Geldt $b^{\frac{m}{n}} ==$ Integer?

    - False: expressie is van de vorm $a \cdot b^{\frac{m}{n}}$ met $b^{\frac{m}{n}} \notin \mathbb{N}$. Ga door naar stap 13.
    - True: expressie is van de vom $a \cdot b^{\frac{m}{n}}$ met $b^{\frac{m}{n}} \in \mathbb{N}$. Output "Pedagogisch incorrect, wortel verder uitwerken".

13. Is b^m n^{de}-machtsvrij?

    - False: er is een $d \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d^n | b^m$. Output: "Pedagogisch incorrect, wortel kan nog verder vereenvoudigd worden.
    - True: expressie is van de vorm $a \cdot b^{\frac{m}{n}}$ met $d^n \nmid b^m \forall d \in \mathbb{N}$. Output: "Standaardvorm II".

In de handleiding (Bijlage A.3) bespreken we het algoritme aan de hand van een aantal opgaven. Per vraag geven we een aantal mogelijke antwoorden. Deze antwoorden geven we als input aan het algoritme, in tabel 4 is de output van het algoritme per antwoord te zien.

	Vraag		Input	Output
1.	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$	(i).	$\sqrt{40} \cdot \sqrt{2}$	Pedagogisch incorrect
		(ii).	$\sqrt{80}$	Standaardvorm I
		(iii).	$2\sqrt{20}$	Wortel kan nog verder vereenvoudigd worden
		(iv).	$4\sqrt{5}$	Standaardvorm II
2.	$4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$	(i).	$4^{\frac{2}{3}}$	Standaardvorm I
		(ii).	$16^{\frac{1}{3}}$	Standaarvorm I
		(iii).	$2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$	Standaardvorm II

Tabel 4: Output algoritme wortels bij bepaalde input

De expressie bij vraag 1. input (i) bevat een vermenigvuldiging van twee wortels. We zien hier dat de vereiste taken, het uitvermenigvuldigen van de wortels, niet volledig uitgevoerd zijn. Het algoritme geeft hier dan ook als output "Pedagogisch incorrect". De output bij vraag 1. input (ii) is "Standaardvorm I". De vermenigvuldigingen zijn uitgewerkt dus de vereiste taken zijn uitgevoerd. De expressie staat in de vorm $\sqrt{a}$ met $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$, daarnaast is er een $d \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d^2|a$ namelijk $d = 4$. De expressie staat dus in standaarvorm I. De expressie bij vraag 1. (iii) is van de vorm $c\sqrt{a}$ de wortel is dus al enigzins vereenvoudigd echter is het argument nog steeds deelbaar door een kwadraat, namelijk $d = 2$. Omdat de wortel deels vereenvoudigd is maar nog niet volledig geeft het algoritme als output "Wortel kan nog verder vereenvoudigd worden". Bij vraag 1. input (iv) zien we weer een expressie van de vorm $c\sqrt{a}$ echter is het argument dit keer wel volledig vereenvoudigd. Het algoritme geeft als output "Standaardvorm II". Bij vraag 2. staan de expressies bij input (i) en (ii) in de vorm $a^{\frac{m}{n}}$ met $a > 0$ en voor beide expressies is er een $d \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d^n|a^m$. Het algoritme geeft als output "Standaardvorm I". De expressie bij output (iii) staat in de vorm $c \cdot a^{\frac{m}{n}}$ zodanig dat $\nexists d \in \mathbb{N}$ met $d^n|a^m$. Het algoritme geeft als "Standaardvorm II".

7.3 Rationale functies

7.3.1 Polynomen

Dit algoritme test antwoorden op vragen met reële polynomen als verwacht antwoord, op correctheid en vorm. Het algoritme vereist drie waarden als input, expressie $A(v)$, expressie $C(v)$ en variabele v. Expressie $A(v)$ is het antwoord dat getest moet worden op correctheid. Omdat $A(v)$ een mogelijk antwoord is binnen de categorie reëele polynomen, geldt $A(v) \in \mathbb{R}[v]$. Verder is expressie $A(v)$ een uitdrukking die samen te stellen is door de operaties optelling en vermenigvuldiging toe te passen op elementen uit de reële polynomen. De tweede input, expressie $C(v)$ is een wiskundig correct antwoord op de betreffende vraag en is nodig om expressie $A(v)$ op wiskundige correctheid te testen. Er geldt dus ook $C(v) \in \mathbb{R}[v]$, verder wordt expressie $C(v)$ niet in een bepaalde (standaard-)vorm vereist. Immers expressie $C[v]$ wordt enkel gebruikt om expressie $A[v]$ op wiskundige correctheid te testen door na te gaan of expressie $A[v]$ algebraïsch equivalent is aan expressie $C[v]$.

Om herschrijfregel (13) toe te passen zijn de irreducibele nulpunten van het polynoom nodig. Omdat het vinden van deze irreducibele nulpunten niet relevant is voor dit algoritme zullen we dit niet beschrijven in het algoritme, in plaats daarvan gebruiken we een CAS om de irreducibele nulpunten te vinden. Omdat alle polynomen die we gebruiken ook in opdrachten bestemd voor leerlingen met vwo-wiskunde niveau voorkomen kunnen we aannemen dat deze polynomen zodanig eenvoudig zijn dat een CAS in staat is de irreducibele nulpunten van deze polynomen te vinden.

Het algoritme test eerst of expressie $A(v)$ algebraïsch equivalent is met expressie $C(v)$, hiermee wordt expressie $A(v)$ op wiskundige correctheid getest. Als $A(v)$ een wiskundig correct antwoord is op de betreffende vraag, gaat het algoritme na in welke vorm deze expressie zich bevindt. Het algoritme doorloopt de boom weergegeven in twee lagen van expressie $A(v)$, zoals die gegeven wordt in Wolfram Mathematica 8.0 door het commando $TreeForm[A, 2]$. Laat *Root* de uitdrukking bovenaan deze boom en *Level*2 de uitdrukkingen bij de bladeren in laag 2 van deze boom. Hieronder is het algoritme beschreven, in bijlage A.4 figuur 6 is het stroomdiagram van dit algoritme weergegeven.

1. Geldt $A(x) == C(x)$?

- False: de expressies $A(x)$ en $C(x)$ zijn algebraïsch niet equivalent, dus $A(x)$ is wiskundig incorrect. Output: Wiskundig incorrect.
- True: de expressies $A(x)$ en $C(x)$ zijn algebraïsch equivalent, hieruit volgt dat $A(x)$ wiskundig correct is. Ga verder met stap 2.

2. Geldt $Roots == Times$?
   - False: ga naar stap 4.
   - True: het polynoom is een eenterm $a_n x^n$ of van de vorm $(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$. Ga naar stap 3.
3. Bestaat Level 2 uit de factors van het polynoom?
   - False: Output: pedagogisch incorrect, polynoom kan verder ontbonden worden in factoren.
   - True: Het polynoom is volledig ontbonden in factoren. Output: Standaardvorm I.
4. Geldt $Roots == Power$?
   - False: ga naar stap 6.
   - True: het polynoom is van de vorm $p(x)^n$, ga naar stap 5.
5. Is Level 2 een factor van het polynoom en een integer?
   - False: pedagogisch incorrect, machtsverheffing niet uitgewerkt. Output: "Polynoom kan verder gefactoriseerd worden".
   - True: het betreft een polynoom met één (eventueel meervoudig) nulpunt, ontbonden in factoren. Output: Standaardvorm I.
6. Geldt $Roots == Plus$?
   - False: output: pedagogisch incorrect.
   - True: het polynoom is van de vorm $a_1 x^{b_1} + \ldots + a_n x^{b_n}$ Ga naar stap 7.
7. Geldt $Bladeren == MonomialList$?
   - False: er kunnen nog termen bij elkaar opgeteld worden, output: pedagogisch incorrect.
   - True: het polynoom is van de vorm $a_1 x^{b_1} + \ldots + a_n x^{b_n}$ met b_i verschillend $\forall i$. Ga naar stap 8.
8. Geldt $Bladeren === MonomialListNeg.Lexicografisch$?
   - False: termen staan niet in negatieve lexicografische volgorde. Ga naar stap 9.

	Vraag		Input	Output
1.	$\frac{d}{dx}(5x^2 - 3x^3 + 2x)$	(i).	$10x - 9x^2 + 2$	Termen zijn ongeordend
		(ii).	$2 + 10x - 9x^2$	Standaardvorm II
		(iii).	$-9x^2 + 10x + 2$	Standaardvorm III
2.	$(1 + x)(1 + 2x + x^2)$	(i).	$x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1$	Esthetisch incorrect, er kunnen nog termen bij elkaar worden opgeteld.
		(ii).	$(x^2 + 2x + 1)(x + 1)$	Polynoom kan verder gefactoriseerd worden.
		(iii).	$(x + 1)^3$	Standaardvorm I
		(iv).	$1 + 3x + 3x^2 + x^3$	Standaardvorm II
		(v).	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	Standaardvorm III

Tabel 5: Output algoritme polynomen bij bepaalde input

- True: polynoom met termen in negative lexicografische volgorde. Output: Standaardvorm II.

9. Geldt $Bladeren === MonomialListLexicografisch$?
   - False: Output: termen ongeordend.
   - True: polynoom met termen in lexicografische volgorde. Output: Standaardvorm III.

In de handleiding (bijlage A.3) bespreken we het algoritme aan de hand van een aantal opgaven. Per vraag geven we een aantal mogelijke antwoorden. Deze antwoorden geven we als input aan het algoritme, in tabel 5 is de output van het algoritme per antwoord te zien. De termen in de expressie bij vraag 1. input (i) zijn niet zoals gebruikelijk geordend volgens een lexicografische of een negatieve lexicografische ordening, maar staan op een willekeurige volgorde. Het algoritme geeft de output “Termen zijn ongeordend”. De termen van de expressies bij vraag 1. input (ii) en bij vraag 2. input (iv) zijn geordend volgens een negatieve lexicografische ordening. Het algoritme geeft de output “Standaardvorm II”. Ook de termen van de expressies bij vraag 1. input (iii) en bij vraag 2. input (v) zijn geordend, maar dan volgens de lexicorafische ordening. Het algoritme geeft de output “Standaardvorm III”. De expressie bij vraag 2. input (i) bevat meerdere termen van dezelfde macht. Het algoritme geeft als output “Esthetisch incorect, er kunnen nog termen bij elkaar worden opgeteld”. De expressie bij vraag 2. input (ii) is van de vorm $p(x) \cdot q(x)$ echter zijn $p(x)$ en $q(x)$ niet irreducibel waardoor het polynoom niet volledig gefactoriseerd is. Het algoritme geeft als output "Polynoom kan verder gefactoriseerd woden". De expressie bij vraag 2. input (iii) staat in de vorm $p(x)^n$ met $p(x)$ ireducibel. Het algoritme geeft als output "Standaardvorm I".

7.4 Transcendente functies

7.4.1 Goniometrische functies

Dit algoritme test antwoorden op vragen met goniometrische uitdrukkingen als verwacht antwoord, op correctheid en vorm. Het algoritme vereist twee expressies als input, expressie $A(t)$ en expressie $C(t)$. Expressie $A(t)$ is het antwoord dat getest moet worden op correctheid. Omdat $A(t)$ een mogelijk antwoord is binnen de categorie goniometrie, is $A(t)$ een uitdrukking die samen te stellen is door de basis operaties optellen en vermenigvuldigen toe te passen op de goniometrische functies. De tweede input, expressie $C(t)$ is een wiskundig correct antwoord op de betreffende vraag en is nodig om expressie $A(t)$ op wiskundige correctheid te testen. Ook expressie $C(t)$ is dus uit te drukken in de goniometrische functies, verder wordt expressie $C(t)$ niet in een bepaalde (standaard-)vorm vereist. Immers expressie $C(t)$ wordt enkel gebruikt om expressie $A(t)$ op wiskundige correctheid te testen door na te gaan of expressie $A(t)$ algebraïsch equivalent is aan expressie $C(t)$.

Het algoritme test of $A(t)$ en $C(t)$ algebraïsch equivalent zijn. Als dit het geval is gaat het algoritme na of $A(t)$ in de standaardvorm staat, wanneer dit niet zo is bekijkt het algoritme welke herschrijfregel toegepast kan worden om deze standaardvorm te bereiken. Het algoritme staat hieronder beschreven, in bijlage A.4 figuur 7 is het stroomdiagram van dit algoritme weergegeven.

1. Geldt $A(t) == C(t)$?
   - False: de expressies $A(t)$ en $C(t)$ zijn algebraïsch niet equivalent, dus $A(t)$ is wiskundig incorrect. Output: Wiskundig incorrect.
   - True: de expressies $A(t)$ en $C(t)$ zijn algebraïsch equivalent, dit betekent dat $A(t)$ wiskundig correct is. Ga door naar stap 2.
2. Geldt $A(t) == TrigReduce(A(t))$?
   - False: de expressie $A(t)$ bevat nog machten en/of producten van goniometrische functies. Deze kunnen weggewerkt worden door het toepassen van de herschrijfregels. Ga door naar stap 3.
   - True: de expressie $A(t)$ bevat geen machten en/of producten van goniometrische functies meer, expressie $A(t)$ staat dus in standaardvorm. Output: Standaardvorm.
3. Bevat $A(t)$ een veelvoud van $\sin^2(t) + \cos^2(t)$?

- False: herschrijfregel 22 is niet toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Ga door naar stap 4.
- True: herschrijfregel 22 is toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Output: Vervang $\sin^2(t) + \cos^2(t)$ door 1.

4. Bevat $A(t)$ een veelvoud van $\sin(t)\cos(t)$?
   - False: herschrijfregel 26 is niet toepasbaar in de richting '$\leftarrow$'. Ga door naar stap 5.
   - True: herschrijfregel 26 is toepasbaar in de richting '$\leftarrow$'. Output: Vervang $\sin(t)\cos(t)$ door $\frac{1}{2}\sin(2t)$.
5. Bevat $A(t)$ een veelvoud van $\cos^2(t)$?
   - False: herschrijfregel 27: $2\cos^2(t) - 1 \rightarrow \cos(2t)$ is niet toepasbaar. Ga door naar stap 6.
   - Tre: herschrijfregel 27: $2\cos^2(t) - 1 \rightarrow \cos(2t)$ is toepasbaar. Output: Vervang $\cos^2(t)$ door $\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$.
6. Bevat $A(t)$ een veelvoud van $\sin^2(t)$?
   - False: herschrijfregel 27: $1 - 2\sin^2(t) \rightarrow \cos(2t)$ is niet toepasbaar. Ga door naar stap 7.
   - True: herschrijfregel 27: $1 - 2\sin^2(t) \rightarrow \cos(2t)$ is toepasbaar. Output: Vervang $\sin^2(t)$ door $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$.
7. Bevat $A(t)$ een veelvoud van $\sin(t)\cos(u)$?
   - False: herschrijfregel 28 is niet toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Ga door naar stap 8.
   - True: herschrijfregel 28 is toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Output: Vervang $\sin(t)\cos(u)$ door $\frac{1}{2}\sin(t+u) + \frac{1}{2}\sin(t-u)$.
8. Bevat $A(t)$ een veelvoud van $\cos(t)\cos(u)$?
   - False: herschrijfregel 29 is niet toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Ga door naar stap 9.
   - True: herschrijfregel 29 is toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Output: Vervang $\cos(t)\cos(u)$ door $\frac{1}{2}\cos(t+u) + \frac{1}{2}\cos(t-u)$.
9. Bevat $A(t)$ een veelvoud van $\sin(t)\sin(u)$?
   - False: herschrijfregel 30 is niet toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Ga door naar stap 10.
   - True: herschrijfregel 30 is toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Output: Vervang $\sin(t)\sin(u)$ door $\frac{1}{2}\cos(t-u) - \frac{1}{2}\cos(t+u)$.

10. Bevat de uitdrukking sinussen met het zelfde argument, en cosinussen?
    - False: expressie A is van de vorm $\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(\alpha_i) + b_i \sin(\beta_i)$ met $a_i \neq \alpha_i$ en $b_i \neq \beta_i$ voor alle $i = 0, ..., n$. Output: Standaardvorm.
    - True: expressie A is van de vorm $\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(\alpha_i) + b_i \sin(\beta_i)$ met $\exists i = 0, ..., n$ zodanig dat $a_i = \alpha_i$ of $b_i \beta_i$. Output: Esthetisch incorrect, termen kunnen nog bij elkaar worden opgeteld.

In de handleiding (bijlage A.3) bespreken we het algoritme aan de hand van een aantal opgaven. Per vraag geven we een aantal mogelijke antwoorden. Deze antwoorden geven we als input aan het algoritme, in tabel 6 is de output van het algoritme per antwoord te zien.

Bij vraag 1. input (i) bevat de expressie een term $\sin^2(t) + \cos^2(t)$ welke om te schrijven is volgens herschrijfregel (22). Het algoritme geeft als output: "Vervang $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ door 1". Input (ii) bij vraag 2. bevat een term $\sin(t)\cos(t)$ welke om te schrijven is volgens herschrijfregel (26). Het algoritme geeft de volgende output: "Vervang $\sin(x)\cos(x)$ door $\frac{1}{2}\sin(2x)$". De expressie bij vraag 1. input (iii) staat in de vorm $\sum_{k=0}^{K} a_k \cos(\alpha_k t) + b_k \sin(\beta_k t)$ met $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ voor $0 \leq k \leq K$, $K \in \mathbb{N}$ en $\alpha_0 \neq ... \neq \alpha_K$ en $\beta_0 \neq ... \neq \beta_K$. De expressie staat in standaardvorm, output: "Standaardvorm". Bij vraag 2. input (ii) zijn de termen $\sin^2(t)$ om te schrijven naar $\frac{1}{2}1 - \cos(2t)$ volgens herschrijfregel (27). Ouptut algoritme: Vervang $\sin^2(x)$ door $\frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Op de expressie bij vraag 2. input (ii) is herschrijfregel (28) toepasbaar in de richting '$\rightarrow$'. Output: "Vervang $\sin(x)\cos(y)$ door $\frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$". De expressie bij vraag 2. input (iii) bevat termen $\cos(3t)\cos(2t)$ welke volgens herschrijfregel (29) om te schrijven zijn naar $\frac{1}{2}(\cos 5t + \cos(t)$. Output: Vervang $\cos(x)\cos(y)$ door $\frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$. De expressie bij vraag 2. input (iv) bevat temen die bij elkaar opgeteld kunnen worden, output: "Esthetisch incorrect, termen kunnen bij elkaar worden opgeteld:". De expressie bij vraag 2. input (v) staat in de vorm $\sum_{k=0}^{K} a_k \cos(\alpha_k t) + b_k \sin(\beta_k t)$ met $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ voor $0 \leq k \leq K$, $K \in \mathbb{N}$ en $\alpha_0 \neq ... \neq \alpha_K$ en $\beta_0 \neq ... \neq \beta_K$. De expressie staat in standaardvorm, output: "Standaardvorm".

	Vraag		Input	Output
1.	Herleid $(\sin(t) - \cos(t))^2$	(i).	$\sin^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)$	Vervang $\sin(x)^2 + \cos(x)^2$ door 1.
		(ii).	$1 - 2\sin(t)\cos(t)$	Vervang $\sin(x)\cos(x)$ door $\frac{1}{2}\sin(2x)$.
		(iii).	$1 - \sin(2t)$	Standaardvorm
2.	Herleid $(\sin^2(t) + \cos(2t))(\sin(5t) + \cos(3t))$	(i).	$\sin^2(t)\sin(5t) + \sin^2(t)\cos(3t) + \cos(2t)\sin(5t) + \cos(2t)\cos(3t)$	Vervang $\sin^2(x)$ door $\frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
		(ii).	$\frac{1}{2}(\sin(5t) - \cos(2t)\sin(5t) + \cos(3t) - \cos(2t)\cos(3t)) + \cos(2t)\sin(5t) + \cos(2t)\cos(3t)$	Vervang $\sin(x)\cos(y)$ door $\frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$.
		(iii).	$\frac{1}{2}\sin(5t) - \frac{1}{4}(\sin(7t) + \sin(3t)) + \frac{1}{2}(\cos(3t) - \cos(2t)\cos(3t) + \sin(7t) + \sin(3t)) + \cos(2t)\cos(3t)$	Vervang $\cos(x)\cos(y)$ door $\frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.
		(iv).	$\frac{1}{2}\sin(5t) - \frac{1}{4}(\sin(7t) + \sin(3t)) + \frac{1}{2}\cos(3t) - \frac{1}{4}(\cos(5t) + \cos(t)) + \frac{1}{2}(\sin(7t) + \sin(3t) + \cos(5t) + \cos(t))$	Esthetisch incorrect, termen kunnen nog bij elkaar worden opgeteld
		(v).	$\frac{1}{2}\sin(5t) + \frac{1}{4}\sin(7t) + \frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{4}\cos(5t) + \frac{1}{4}\cos(t)$	Standaardvorm.

Tabel 6: Output algoritme Goniometrie bij bepaalde input

7.4.2 Logaritmen

Dit algoritme is gemaakt om antwoorden op vragen met uitdrukkingen met logaritmen als verwacht antwoord, te testen op correctheid en vorm. Het algoritme vereist twee expressies als input, expressie A en expressie C. Expressie A is het antwoord dat getest moet worden op correctheid. Omdat A een mogelijk antwoord is binnen de categorie breuken, is A een uitdrukking met logaritmen. Binnen deze thesis bekijken we slechts uitdrukkingen met logaritmen van de vorm $a_0 \ln(b_0) + ... + a_n \ln(b_n)$. Expressie A is dus van deze vorm. De tweede input, expressie C is een wiskundig correct antwoord op de betreffende vraag en is nodig om expressie A op wiskundige correctheid te testen. Er geldt dus ook dat C van de vorm $a_0 \ln(b_0) + ... + a_n \ln(b_n)$ is. Verder wordt expressie C niet in een bepaalde standaardvorm vereist. Immers expressie C wordt enkel gebruikt om expressie A op wiskundige correctheid te testen door na te gaan of expressie A algebraïsch equivalent is aan expressie C.

Het algoritme test eerst of expressie A een wiskundig correct antwoord is op de vraag door de algebraïsche equivalentie tussen expressie A en C te testen. Als A een wiskundig correct antwoord is op de betreffende vraag, gaat het algoritme na in welke vorm deze expressie zich bevindt. Het algoritme doorloopt de boom weergegeven in twee lagen van expressie A, zoals die gegeven wordt in Wolfram Mathematica 8.0 door het commando $TreeForm[A, 2]$. Laat $Root$ de uitdrukking bovenaan deze boom en $Level2$ de uitdrukkingen bij de bladeren in laag 2 van deze boom. Hieronder wordt het algoritme beschreven, in bijlage A.4 figuur 8 is het stroomdiagram van dit algoritme weergegeven.

1. Geldt A == C?
   - False: de expressies A en C zijn algebraïsch niet equivalent, A is dus wiskundig incorrect. Output: Wiskundig incorrect.
   - True: de expressies A en C zijn algebraïsch equivalent, dit betekent dat A wiskundig correct is. Ga door naar stap 2.
2. Geldt $Roots ==$ ln?
   - False: ga door naar stap 4.
   - True: de uitdrukking is van de vorm $\ln(a)$ voor een zekere a. Ga door naar stap 3.
3. Geldt $a \in \mathbb{Q}$ met $a > 0$?
   - False: expressie staat in de vorm $\ln(a)$ met $a \notin \mathbb{Q}$ of $a \leq 0$. Output: Pedagogisch incorrect.
   - True: expressie staat in de vorm $\ln(a)$ met $a \in \mathbb{Q}$ en $a > 0$. Output Standaardvorm II.
4. Geldt $Roots == Times$?

- False: ga door naar stap 8.
- True: ga naar stap 5.

5. Bestaat level2 uit een integer en een ln?
   - False: Output: Pedagogisch incorect.
   - True: expressie is van de vorm: $c \ln(a)$ met $c \in \mathbb{Z}$. Ga naar stap 6.
6. Geldt er $a == priem$?
   - False: ga door naar stap 7.
   - True: expressie is van de vorm: $c \ln(a)$ met $c \in \mathbb{Z}$ en $a \in \mathbb{N}^+$ met a priem. Output: Standaardvorm I.
7. Is er een $w, n \in \mathbb{Z}$ zodat $w^n = a$?
   - False: expressie staat in de vorm: $c \ln(a)$ met $c \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$ zodat $\nexists w, n\mathbb{Z}$ met $w^n = a$. Output: Standaardvorm III.
   - True: expressie staat in de vorm $c \ln(a)$ met $c \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$ zodat $\exists w, n\mathbb{Z}$ met $w^n = a$, $c \ln(a)$ is nog om te schrijven naar $c \cdot n \ln(w)$. Output: Verder te vereenvoudigen.
8. Geldt $Roots == Plus$?
   - False: Output: Pedagogisch incorrect.
   - True: ga naar stap 9.
9. Bestaat Level2 uit logaritmes met priemgetallen als argumenten?
   - False: expressie staat in de vorm $\sum_{i=0}^{n} c_i \ln(a_i)$ met $\exists i = 0, ..., n$ zodat a_i niet priem. Output: Verder te vereenvoudigen.
   - True: expressie staat in de vorm $\sum_{i=0}^{n} c_i \ln(a_i)$ met a_i priem $\forall i = 0, ..., n$. Ga door naar stap 10.
10. Zijn al de argumenten van de logaritmes verschillend?
    - False: expressie staat in de vorm $\sum_{i=0}^{n} c_i \ln(a_i)$ met er is een $i = 0, ..., n$ en een $j = 0, ..., n$ zodanig dat $a_i = a_j$. Output: Logaritmes kunnen bij elkaar opgeteld worden.
    - True: expressie staat in de vorm $\sum_{i=0}^{n} c_i \ln(a_i)$ met a_i priem en allen verschillend voor alle $i = 0, ..., n$. Output: Standaardvorm I.

In de handleiding (bijlage A.3) bespreken we het algoritme aan de hand van een aantal opgaven. Per vraag geven we een aantal mogelijke antwoorden. Deze antwoorden geven we als input aan het algoritme, in tabel 7 is de output van het algoritme per antwoord te zien.

De expressies bij vraag 1. output (i) en vraag 2. output (i) staan beide in de vorm $c_0 \ln(a_0) + ... + c_n \ln(a_n)$ echter bevatten beide expressies een term $\ln(a)$ met a niet priem, namelijk de term $\ln(6)$. Deze is nog verder te vereenvoudigen naar $\ln(3) + \ln(2)$. Het algoritme geeft de output: "Verder te vereenvoudigen". Bij de expressies 1. input (ii) en 2. input (ii) kunnen er nog termen bij elkaar opgeteld worden. Output algoritme: "Logaritmen kunnen bij elkaar opgeteld worden". Expressie vraag 1. input (iii) is van de vorm $c_0 \ln(a_0) + c_1 \ln(a_1)$ met a_0 en a_1 twee verschillende priemgetallen. Output: "Standaardvorm I". De expressies vraag 1. input (iv) en vraag 2. input (iii) staan in de vorm $\ln(a)$. Output: "Standaardvorm II". Expressie vraag 1. input (v) staat in de vorm $c \ln(a)$ met $\nexists w, n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $w^n = a$ verder is a niet priem priem dus de expressie staat in standaardvorm III. Ouput "Standaardvorm III". De expressie bij vraag 2. input (iv) staat ook in de vorm $c \ln(a)$ echter kan er nog een tweede macht naar buiten worden gehaald zodat $2\ln(4) = 4\ln(2)$. Output "Verder te vereenvoudigen". Expressie vraag 2. input (v) staat ook in de vorm $c \ln(a)$ nu is a priem dus de expressie staat in standaardvorm I. Output: "Standaardvorm I".

	Vraag		Input	Output
1.	$\ln(12) + \ln(3)$	(i).	$\ln(6) + \ln(2) + \ln(3)$	Verder te vereenvoudigen
		(ii).	$\ln(2) + \ln(3) + \ln(2) + \ln(3)$	Logaritmen kunnen bij elkaar opgeteld worden
		(iii).	$2\ln(2) + 2\ln(3)$	Standaardvorm I
		(iv).	$\ln(36)$	Standaardvorm II
		(v).	$2\ln(6)$	Standaardvorm III
2.	$2\ln(36) - 4\ln(3)$	(i).	$4\ln(6) - 4\ln(3)$	Verder te vereenvoudigen
		(ii).	$4\ln(2) + 4\ln(3) - 4\ln(3)$	Logaritmen kunnen bij elkaar opgeteld worden
		(iii).	$\ln(16)$	Standaardvorm II
		(iv).	$2\ln(4)$	Verder te vereenvoudigen
		(v).	$4\ln(2)$	Standaardvorm I

Tabel 7: Output algoritme Logaritmen bij bepaalde input

8 Conclusie

In deze thesis hebben we onderzocht hoe we antwoorden met behulp van een CAS kunnen analyseren binnen de categorieën breuken, wortels, polynomen, gebroken functies, goniometrische functies en logaritmen. Een antwoord is het juiste antwoord op een vraag wanneer het wiskundig, pedagogisch, esthetisch en contextueel correct is. Het antwoord is wiskundig correct wanneer het antwoord algebraïsch equivalent is aan het verwachte antwoord, pedagogisch correct wanneer het antwoord wiskundig correct is en de vereiste taken zijn uitgevoerd, esthetisch correct wanneer het antwoord zowel wiskundig als pedagogisch correct is en het op een conventionele manier voor de bepaalde categorie is opgeschreven en contextueel correct wanneer het antwoord zowel wiskundig, pedagogisch als esthetisch correct is en het in de meest toegankelijke vorm voor de betreffende opgaven is gegeven. Per categorie zijn we nagegaan aan welke eisen een antwoord moet voldoen voor pedagogische en esthetische correctheid. De esthetisch correcte vormen hebben we als standaardvormen gedefinieerd voor de betreffende categorie. Om de antwoorden te analyseren hebben we per categorie een algoritme ontworpen en geïmplementeerd in mathematica 8.0. Deze algoritmes controleren het antwoord op wiskundige, pedagogische en esthetische correctheid. Waneer het antwoord pedagogisch of esthetisch incorrect is geeft het algoritme dit als output. Als het antwoord esthetisch correct is geeft het algoritme de vorm waarin het antwoord staat als output. De algoritmes kunnen toegepast worden bij het digitaal nakijken van toetsen. De docent kan vooraf per vraag vast stellen in welke standaardvorm(en) het antwoord gegeven moet/kan worden. De algoritmes kunnen dan gebruikt worden om te testen of het antwoord daadwerkelijk in de gewenste vorm staat.

Referenties

[1] Aalmoes, Admiraal, et. al.; *Getal & Ruimte vwo1*; Educatieve Partners Nederland; Eerste druk; 1998

[2] Aalmoes,Admiraal, et. al.; *Getal & Ruimte vwo2*; Educatieve Partners Nederland; Eerste druk; 1998

[3] Aalmoes, Admiraal, et. al.; *Getal & Ruimte vwo NG/NT 4* Educatieve Partners Nederland; Eerste druk; 2000

[4] Bos, Bouw, et. al.; *Moderne wiskunde vwo bovenbouw wiskunde B1 - deel 1*; Wolters-Noordhoff; 7e editie; 1998

[5] Bos, Bouw, et. al.; *Moderne wiskunde vwo bovenbouw wiskunde B1 - deel 4*; Wolters-Noordhoff; 7e editie; 1999

[6] Bosch, van de Craats; *Basisboek Wiskunde*; Pearson Education; Eerste druk; 2009, p21-25

[7] Bradford, Davenport, Sangwin; *A Comparison of Equality in Computer Algebra and Correctness in Mathematical Pedagogy*; Lecture Notes in Computer Science Volume 5625; 2009, p75-89

[8] Cole, Swokowski; *Precalculus: Functions and Graphs*; Books/Cole Publishing Company; 8e editie;

A Appendix

A.1 Ring

$(R, +, \cdot)$ met $R \neq \varnothing$ is een ring dan en slechts dan als de operaties $+, \cdot$ voldoen aan de volgende voorwaarden:

- $\forall a, b \in R : (a + b) \in R$ (Gesloten onder de optelling)
- $\forall a, b \in R : a + b = b + a$ (Commutativiteit van de optelling)
- $\forall a, b, c \in R : a + (b + c) = (a + b) + c$ (Associativiteit van de optelling)
- $\exists \underline{0} \in R$ zodanig dat $\forall a \in R : a + \underline{0} = \underline{0} + a = a$ (Neutraal element voor de optelling)
- $\forall a \in R \exists (-a) \in R$ zodanig dat $a + (-a) = (-a) + a = \underline{0}$ (Inverse element voor de optelling)
- $\forall a, b \in R : a \cdot b \in R$ (Gesloten onder de vermenigvuldiging)
- $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Associativiteit van de vermenigvuldiging)
- $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (Links-distributiviteit)
- $\forall a, b, c \in R : (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (Rechts-distributiviteit)

A.2 Lichaam

$(K, +, \cdot)$ met $K \neq \varnothing$ is een lichaam dan en slechts dan als de operaties $+, \cdot$ voldoen aan de volgende voorwaarden:

- $\forall a, b \in K : (a + b) \in K$ (Gesloten onder de optelling)
- $\forall a, b \in K : a + b = b + a$ (Commutativiteit van de optelling)
- $\forall a, b, c \in K : a + (b + c) = (a + b) + c$ (Associativiteit van de optelling)
- $\exists \underline{0} \in K$ zodanig dat $\forall a \in K : a + \underline{0} = \underline{0} + a = a$ (Neutraal element voor de optelling)
- $\forall a \in K\ \exists(-a) \in K$ zodanig dat $a + (-a) = (-a) + a = \underline{0}$ (Inverse element voor de optelling)
- $\forall a, b \in K : (a \cdot b) \in K$ (Gesloten onder de vermenigvuldiging)
- $\forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$ (Commutativiteit van de vermenigvuldiging)
- $\forall a, b, c \in K : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Associativiteit van de vermenigvuldiging)
- $\exists \underline{1} \in K$ zodanig dat $\forall a \in K : \underline{1} \cdot a = a \cdot \underline{1} = a$ (Neutraal element voor de vermenigvuldiging: eenheidselement)
- $\forall a \in K$ met $a \neq 0$ $\exists a^{-1} \in K$ zodanig dat $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \underline{1}$ (Invers element voor de vermenigvuldiging)
- $\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (Links-distributiviteit)
- $\forall a, b, c \in K : (a + b \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (Rechts-distributiviteit)

A.3 Handleiding Algoritmes

In[15]:=
```
SetDirectory["G:\\BEP\\testen"];
```

In[16]:=
```
Needs["AnalyseVanAntwoorden`"]
```

Handleiding Algoritmes “Analyse van Antwoorden”

In deze handleiding demonstreren we de werking van de algoritmes bij het project “Analyse van Antwoorden met behulp van een CAS”. De algoritmes zijn ontworpen om bepaalde antwoorden op zowel wiskundige, pedagogische en esthetische correctheid te testen. De algoritmes vereisen twee waarden als input, een te testen antwoord en een correct antwoord. Het te testen antwoord wordt op correctheid getest door de algebraïsche equivalentie tussen de twee input-waarden te testen. Als het antwoord wiskundig correct is gaat het algoritme na in welke vorm het antwoord zich bevindt om de pedagogische en esthetische correctheid na te gaan. Wanneer het antwoord wiskundig, pedagogisch of esthetisch niet correct is wordt dit als output gegeven. Wanneer het antwoord zowel wiskundig, pedagogisch als esthetisch correct is geeft het algoritme de vorm weer waarin het antwoord zich bevindt.Voor elke categorie hebben we een aantal standaardvormen gedefinieerd. In deze handleiding lichten we per categorie eerst kort de verschillende standaardvormen toe waarna we de algoritmes demonstreren aan de hand van voorbeeldopgaven. Bij elke voorbeeldopgave definiëren we een bepaald antwoord als juist antwoord. Voor de uitkomst van het algoritme maakt het niet uit welk antwoord we als juist antwoord definiëren zolang het maar een correct antwoord is. Naast het juiste antwoord geven we per voorbeeldopgave een aantal andere mogelijke antwoorden. Deze antwoorden worden vervolgens ten opzichte van het juiste antwoord getest met behulp van het algoritme voor de betreffende categorie.

Breuken

Inleiding

Dit algoritme test breuken, expressies van de vorm $\frac{t}{n}$ met t,n gehele getallen. Het algoritme heeft twee argumenten nodig, enerzijds de te testen expressie en anderzijds de correcte expressie. Het algoritme test of de twee expressies algebraïsch equivalent zijn. Als de expressies algebraïsch equivalent zijn wordt de te testen expressie op een aantal eigenschappen getest om de vorm van de expressie vast te stellen. Er zijn twee vormen die gewenst zijn, deze definiëren we als de twee standaardvormen.

Standaardvorm I

Een expressie bevindt zich in standaardvorm I wanneer deze van de vorm $\frac{t}{n}$ is zodanig dat de ggd(t,n)==1. Het kan dus voorkomen dat t>n. De gehelen worden niet buiten de breuk gehaald.

Standaardvorm II

Een expressie bevindt zich in standaardvorm II wanneer deze van de vorm a + $\frac{t}{n}$ is, zodanig dat a ≥ 0, ggd(t,n)=1 en t<n. De gehelen moeten dus buiten de breuk gehaald worden.

Demonstratie

In deze sectie bekijken we een aantal opgaven, per opgave geven we een aantal mogelijke antwoorden die we vervolgens testen met het algoritme.

Vraag 1.
Bereken 2/15 - 1/10 + 5/6.

Als juist antwoord definiëren we:

```
In[17]:= juistantwvr1br = HoldForm[14 / 15];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[18]:= antw1vr1br = HoldForm[3 / 30 + 25 / 30];

In[19]:= antw2vr1br = HoldForm[28 / 30];

In[20]:= antw3vr1br = HoldForm[14 / 15];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

```
In[21]:= Breuken[antw1vr1br, juistantwvr1br]

Out[21]= Pedagogisch Incorrect

In[22]:= Breuken[antw2vr1br, juistantwvr1br]

Out[22]= Esthetisch incorrect, breuk niet volledig vereenvoudigd

In[23]:= Breuken[antw3vr1br, juistantwvr1br]

Out[23]= Standaardvorm II
```

Vraag 2.
Bereken (2/3+6)/(2/3+3).

Als juist atnwoord definiëren we:

```
In[24]:= juistantwvr2br = HoldForm[1 + 9 / 11];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[25]:= antw1vr2br = HoldForm[(20 / 3) / (11 / 3)];

In[26]:= antw2vr2br = HoldForm[(20 / 3) * (11 / 3)];

In[27]:= antw3vr2br = HoldForm[60 / 33];

In[28]:= antw4vr2br = HoldForm[20 / 11];

In[29]:= antw5vr2br = HoldForm[1 + 9 / 11];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

```
In[30]:= Breuken[antw1vr2br, juistantwvr2br]

Out[30]= Pedagogisch Incorrect

In[31]:= Breuken[antw2vr2br, juistantwvr2br]

Out[31]= Wiskundig Incorrect

In[32]:= Breuken[antw3vr2br, juistantwvr2br]

Out[32]= Esthetisch incorrect, breuk niet volledig vereenvoudigd

In[33]:= Breuken[antw4vr2br, juistantwvr2br]

Out[33]= Standaardvorm I

In[34]:= Breuken[antw5vr2br, juistantwvr2br]

Out[34]= Standaardvorm II
```

Vraag 3.
Bereken 2/3 : (-3)/4.

Als juist antwoord definiëren we:

In[35]:=
```
juistantwvr3br = HoldForm[-8 / 9];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

In[36]:=
```
antw1vr3br = HoldForm[(2 / 3) * (4 / -3)];
```

In[37]:=
```
antw2vr3br = HoldForm[8 / -9];
```

In[38]:=
```
antw3vr3br = HoldForm[(-8) / 9];
```

In[39]:=
```
antw4vr3br = HoldForm[-8 / 9];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

In[40]:=
```
Breuken[antw1vr3br, juistantwvr3br]
```

Out[40]= Pedagogisch Incorrect

In[41]:=
```
Breuken[antw2vr3br, juistantwvr3br]
```

Out[41]= Esthetisch incorrect, negatieve Noemer

In[42]:=
```
Breuken[antw3vr3br, juistantwvr3br]
```

Out[42]= Standaardvorm II

In[43]:=
```
Breuken[antw4vr3br, juistantwvr3br]
```

Out[43]= Standaardvorm II

Wortels

Inleiding

In dit algoritme bekijken we wortels van de vorm $a\sqrt{b}$ met a,b rationaal. Als a of b een breuk, dan moet deze volledig vereenvoudigd zijn. Wortels kunnen in verschillende vormen voorkomen, we definiëren twee van deze vormen als standaardvormen. Het algoritme heeft twee argumenten nodig, enerzijds de te testen expressie en anderzijds de correcte expressie. Het algoritme test of de twee expressies algebraïsch equivalent zijn. Als de expressies algebraïsch equivalent zijn wordt de te testen expressie op een aantal eigenschappen getest om de vorm van de expressie vast te stellen.

Standaardvorm I

Expressie w = $a^{\frac{1}{n}}$ met reële a, natuurlijke n staat in standaardvorm I dan en slechts dan als a,n>0. Alle termen staan onder de wortel, factoren worden dus niet uit de wortel gehaald.

Standaardvorm II

Expressie w= $a\, b^{\frac{1}{n}}$, met rationele a, reële b en natuurlijke n, staat in standaardvorm II dan en slechts dan als a,b,n>0 en er geen d is zodanig dat $d^n \mid b$. De factoren worden dus buiten de wortel gehaald.

Demonstratie

In deze sectie bekijken we een aantal opgaven, per opgave geven we een aantal mogelijke antwoorden die we vervolgens testen met het algoritme.

Vraag 1.
Bereken $\sqrt{5} * \sqrt{8} * \sqrt{2}$.

Als juist antwoord definiëren we:

In[44]:=
```
juistantwvr1wo = HoldForm[4 Sqrt[5]];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[45]:= antw1vr1wo = HoldForm[Sqrt[40] * Sqrt[2]];
In[46]:= antw2vr1wo = HoldForm[Sqrt[80]];
In[47]:= antw3vr1wo = HoldForm[2 Sqrt[20]];
In[48]:= antw4vr1wo = HoldForm[4 Sqrt[5]];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

```
In[49]:= Wortels[antw1vr1wo, juistantwvr1wo]
Out[49]= Pedagogisch incorrect, wortel kan verder vereenvoudigd worden
In[50]:= Wortels[antw2vr1wo, juistantwvr1wo]
Out[50]= Standaardvorm I
In[51]:= Wortels[antw3vr1wo, juistantwvr1wo]
Out[51]= Pedagogisch incorrect, wortel kan verder vereenvoudigd worden
In[52]:= Wortels[antw4vr1wo, juistantwvr1wo]
Out[52]= Standaardvorm II
```

Vraag 2.

Bereken $4^{1/3}\ 2^{2/3}$.

Als juist antwoord definiëren we:

```
In[53]:= juistantwvr2wo = HoldForm[2 * 2^(1 / 3)];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[54]:= antw1vr2wo = HoldForm[4^(2 / 3)];
In[55]:= antw2vr2wo = HoldForm[16^(1 / 3)];
In[56]:= antw3vr2wo = HoldForm[2 * 2^(1 / 3)];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

```
In[57]:= Wortels[antw1vr2wo, juistantwvr2wo]
Out[57]= Standaardvorm I
In[58]:= Wortels[antw2vr2wo, juistantwvr2wo]
Out[58]= Standaardvorm I
In[59]:= Wortels[antw3vr2wo, juistantwvr2wo]
Out[59]= Standaardvorm II
```

Polynomen

Inleiding

Dit algoritme test reële polynomen, wiskundige objecten die te schrijven zijn als: a_0+a_1x+...+a_nx^n met n een natuurlijk getal en a_i uit de reële getallen. Het algoritme heeft drie argumenten nodig, de te testen expressie, de correcte expressie en de variabele. Het algoritme test of de twee expressies algebraïsch equivalent zijn. Als de expressies algebraïsch equivalent zijn wordt de te testen expressie op een aantal eigenschappen getest om de vorm van de expressie vast te stellen. Er zijn drie vormen die gewenst zijn, deze definiëren we als de drie standaardvormen.

Standaardvorm I

Een polynoom p(x) bevindt zich in standaardvorm I wanneer deze van de vorm (x+r_1)*...*(x+r_m) met r_1,...,r_m nulpunten van p(x).

Standaardvorm II

Een polynoom p(x) staat in standaardvorm II als de expressie van de volgende vorm p(x) = a_0+a_1x+...+a_nx^n met a_i reëel voor i=0,...,n met n uit de natuurlijke getallen. Met andere woorden, de termen zijn geordend volgens negatieve lexicografische ordening.

Standaardvorm III

Een polynoom p(x) staat in standaardvorm III als de expressie van de vorm p(x) = a_nx^n+a_(n-1)x^{n+1}+...+a_0 met a_i reël voor i=0,..,n met n uit de natuurlijke getallen. Met andere woorden, de termen zijn volgens positieve lexicografische ordeing geordend.

Demonstratie

In deze sectie bekijken we een aantal opgaven, per opgave geven we een aantal mogelijke antwoorden die we vervolgens testen met het algoritme.

Vraag 1.
Bereken de afgeleiden van $5\,x^2 - 3\,x^3$+2 x.

Als juist antwoord definiëren we:

```
In[60]:= juistantwvr1po = HoldForm[-9 x^2 + 10 x + 2];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[61]:= antw1vr1po = HoldForm[10 x - 9 x^2 + 2];

In[62]:= antw2vr1po = HoldForm[2 + 10 x - 9 x^2];

In[63]:= antw3vr1po = HoldForm[-9 x^2 + 10 x + 2];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

```
In[64]:= Polynomen[antw1vr1po, juistantwvr1po, x]

Out[64]= Termen zijn ongeordend

In[65]:= Polynomen[antw2vr1po, juistantwvr1po, x]

Out[65]= Standaardvorm II

In[66]:= Polynomen[antw3vr1po, juistantwvr1po, x]

Out[66]= Standaardvorm III
```

Vraag 2.
Bereken $(1+x)\left(1+2\,x+x^2\right)$.

Als juist antwoord definiëren we:

```
In[67]:= juistantwvr2po = HoldForm[x^3 + 3 x^2 + 3 x + 1];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[68]:= antw1vr2po = HoldForm[x^3 + x^2 + 2 x^2 + 2 x + x + 1];

In[69]:= antw2vr2po = HoldForm[(x^2 + 2 x + 1) (x + 1)];

In[70]:= antw3vr2po = HoldForm[(x + 1)^3];
```

In[71]:=
```
antw4vr2po = HoldForm[1 + 3 x + 3 x^2 + x^3];
```

In[72]:=
```
antw5vr2po = HoldForm[x^3 + 3 x^2 + 3 x + 1];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

In[73]:=
```
Polynomen[antw1vr2po, juistantwvr2po, x]
```

Out[73]= Esthetisch incorrect, er kunnen nog termen bij elkaar worden opgeteld.

In[74]:=
```
Polynomen[antw2vr2po, juistantwvr2po, x]
```

Out[74]= Esthetisch incorrect, polynoom kan verder gefactoriseerd worden

In[75]:=
```
Polynomen[antw3vr2po, juistantwvr2po, x]
```

Out[75]= Standaardvorm I

In[76]:=
```
Polynomen[antw4vr2po, juistantwvr2po, x]
```

Out[76]= Standaardvorm II

In[77]:=
```
Polynomen[antw5vr2po, juistantwvr2po, x]
```

Out[77]= Standaardvorm III

Goniometrische Functies

Dit algoritme test uitdrukkingen die samen te stellen zijn door de basis operaties optellen en vermenigvuldigen toe te passen op de goniometrsiche functies sin(at), cos(bt) en tan(ct) met a,b,c reëel. We eisen hierbij dat elke tangens vermenigvuldigd is met een cosinus zodanig dat de uitdrukking uiteindelijk te schrijven is als een expressie bestaande uit de sinus en de cosinus en de operaties vermingvuldiging en optelling. Het algoritme vereist twee expressies als input, enerzijnds het te testen antwoord en anderzijds het juiste atnwoord. De expressies worden op algebraïsche equivalentie getest waarna er na wordt gegaan of de te testen expressie in de standaardvorm staat. Wanneer deze niet in de standaardvorm staat gaat het algoritme na welke herschrijfregel nog toe te passen is en geeft deze regel als output.

▪ Standaardvorm

Een expressie binnen de goniometrie staat in standaardvorm als het in de volgende vorm staat a_0-Cos[b_0]+c_0Sin[d_0]+...+a_nCos[b_n]+c_nSin[d_n] met a_k,b_k,c_k reëel voor k=0,...,n en zowel b_k als d_k verschillend voor alle k.

▪ Demonstratie

In deze sectie bekijken we een aantal opgaven, per opgave geven we een aantal mogelijke antwoorden die we vervolgens testen met het algoritme.

Vraag 1.
Herleid $(\mathrm{Sin}[t] - \mathrm{Cos}[t])^2$.

Als juist antwoord definiëren we:

In[78]:=
```
juistantwvr1go = HoldForm[1 - Sin[2 t]];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

In[79]:=
```
antw1vr1go = HoldForm[Sin[t]^2 - 2 Sin[t] Cos[t] + Cos[t]^2];
```

In[80]:=
```
antw2vr1go = HoldForm[1 - 2 Sin[t] Cos[t]];
```

In[81]:=
```
antw3vr1go = HoldForm[1 - Sin[2 t]];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

```
In[82]:= Goniometrie[antw1vr1go, juistantwvr1go]
Out[82]= Vervang Sin[x]^2+Cos[x]^2 door 1
In[83]:= Goniometrie[antw2vr1go, juistantwvr1go]
Out[83]= Vervang Sin[x]Cos[x] door 1/2Sin[2x]
In[84]:= Goniometrie[antw3vr1go, juistantwvr1go]
Out[84]= Standaardvorm
```

Vraag 2.

Herleid $\left(\mathrm{Sin}[t]^2 + \mathrm{Cos}[2\,t]\right)\,(\mathrm{Sin}[5\,t] + \mathrm{Cos}[3\,t])$.

Als juist antwoord definiëren we:

```
In[85]:= juistantwvr2go = HoldForm[
           1 / 2 Sin[5 t] + 1 / 4 Sin[7 t] + 1 / 4 Sin[3 t] + 1 / 2 Cos[3 t] + 1 / 4 Cos[5 t] + 1 / 4 Cos[t]];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[86]:= antw1vr2go =
          HoldForm[Sin[t]^2 Sin[5 t] + Sin[t]^2 Cos[3 t] + Cos[2 t] Sin[5 t] + Cos[2 t] Cos[3 t]];
In[87]:= antw2vr2go = HoldForm[1 / 2 Sin[5 t] - 1 / 2 Cos[2 t] Sin[5 t] +
            1 / 2 Cos[3 t] - 1 / 2 Cos[2 t] Cos[3 t] + Cos[2 t] Sin[5 t] + Cos[2 t] Cos[3 t]];
In[88]:= antw3vr2go = HoldForm[1 / 2 Sin[5 t] - 1 / 4 Sin[7 t] - 1 / 4 Sin[3 t] + 1 / 2 Cos[3 t] -
            1 / 2 Cos[2 t] Cos[3 t] + 1 / 2 Sin[7 t] + 1 / 2 Sin[3 t] + Cos[2 t] Cos[3 t]];
In[89]:= antw4vr2go = HoldForm[1 / 2 Sin[5 t] - 1 / 4 Sin[7 t] - 1 / 4 Sin[3 t] + 1 / 2 Cos[3 t] -
            1 / 4 Cos[5 t] - 1 / 4 Cos[t] + 1 / 2 Sin[7 t] + 1 / 2 Sin[3 t] + 1 / 2 Cos[5 t] + 1 / 2 Cos[t]];
In[90]:= antw5vr2go = HoldForm[
           1 / 2 Sin[5 t] + 1 / 4 Sin[7 t] + 1 / 4 Sin[3 t] + 1 / 2 Cos[3 t] + 1 / 4 Cos[5 t] + 1 / 4 Cos[t]];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

```
In[91]:= Goniometrie[antw1vr2go, juistantwvr2go]
Out[91]= Vervang Sin[x]^2 door 1/2-1/2Cos[2x]
In[92]:= Goniometrie[antw2vr2go, juistantwvr2go]
Out[92]= Vervang Sin[x]Cos[y] door 1/2Sin[x+y]+1/2Sin[x-y]
In[93]:= Goniometrie[antw3vr2go, juistantwvr2go]
Out[93]= Vervang Cos[x]Cos[y] door 1/2Cos[x+y]+1/2Cos[x-y]
In[94]:= Goniometrie[antw4vr2go, juistantwvr2go]
Out[94]= Esthetisch incorrect, termen kunnen nog bij elkaar worden opgeteld
In[95]:= Goniometrie[antw5vr2go, juistantwvr2go]
Out[95]= Standaardvorm
```

Logaritmische Functies

Dit algoritme test uitdrukkingen die samen te stellen zijn door de basis operatie optellen toe te passen op logaritmische functies van de vorm a*Log(b) We eisen hierbij dat de grondtallen van de logaritmen per expressie gelijk zijn. Zonder verlies van algemeenheid nemen we het getal e als grondtal zodat we het natuurlijk logaritme krijgen. Het algoritme vereist twee expressies als input, enerzijnds het te testen antwoord en anderzijds het juiste atnwoord. De expressies worden op algebraïsche equivalentie getest, als de expressies algebraïsch equivalent zijn wordt de te testen expressie op een aantal eigenschappen getest om de vorm van de expressie vast te stellen. Er zijn drie vormen die gewenst zijn, deze definiëren we als de drie standaardvormen.

Standaardvorm I

Een logaritmische functie staat in standaardvorm I als het van de volgende vorm is c_0Ln[p_0]+...+c_nLn[p_n] met c_0,...,c_n geheel, p_0,...,p_n priem en allen verschillend.

Standaardvorm II

Een logaritmische functie staat in standaardvorm II als het van de volgende vorm is Ln(a) met a rationaal en groter dan 0.

Standaardvorm III

Een logaritmische functie staat in standaardvorm III als het van de volgende vorm is cLn(a) met c geheel, a rationaal groter dan 0 geen macht van n voor n willekeurig uit de natuurlijke getallen.

Demonstratie

In deze sectie bekijken we een aantal opgaven, per opgave geven we een aantal mogelijke antwoorden die we vervolgens testen met het algoritme.

Vraag 1.
Bereken Ln[12]+Ln[3] .

Als juist antwoord definiëren we:

```
In[96]:= juistantwvr1lo = HoldForm[2 Log[6]];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[97]:= antw1vr1lo = HoldForm[Log[6] + Log[2] + Log[3]];

In[98]:= antw2vr1lo = HoldForm[Log[2] + Log[3] + Log[2] + Log[3]];

In[99]:= antw3vr1lo = HoldForm[2 Log[2] + 2 Log[3]];

In[100]:= antw4vr1lo = HoldForm[Log[36]];

In[101]:= antw5vr1lo = HoldForm[2 Log[6]];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

```
In[102]:= Logaritmen[antw1vr1lo, juistantwvr1lo]

Out[102]= Verder te vereenvoudigen

In[103]:= Logaritmen[antw2vr1lo, juistantwvr1lo]

Out[103]= Logaritmen kunnen bij elkaar opgeteld worden

In[104]:= Logaritmen[antw3vr1lo, juistantwvr1lo]

Out[104]= Standaardvorm I

In[105]:= Logaritmen[antw4vr1lo, juistantwvr1lo]

Out[105]= Standaardvorm II

In[106]:= Logaritmen[antw5vr1lo, juistantwvr1lo]

Out[106]= Standaardvorm III
```


Vraag 2.

Bereken 2Ln(36)-4Ln(3).

Als juist antwoord definiëren we:

```
In[107]:= juistantwvr2lo = HoldForm[4 Log[2]];
```

Enkele andere mogelijke antwoorden:

```
In[108]:= antw1vr2lo = HoldForm[4 Log[6] - 4 Log[3]];

In[109]:= antw2vr2lo = HoldForm[4 Log[2] + 4 Log[3] - 4 Log[3]];

In[110]:= antw3vr2lo = HoldForm[Log[16]];

In[111]:= antw4vr2lo = HoldForm[2 Log[4]];

In[112]:= antw5vr2lo = HoldForm[4 Log[2]];
```

We testen deze antwoorden ten opzichte van het juiste antwoord:

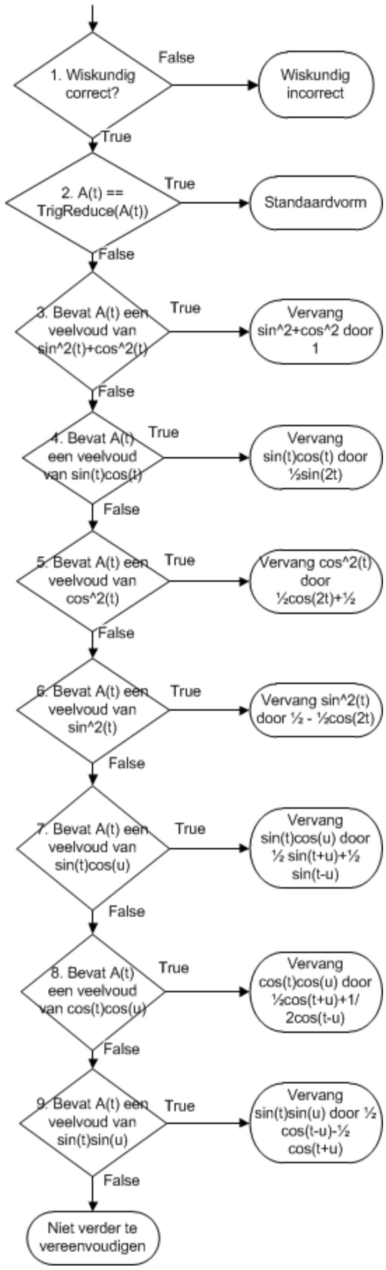
```
In[113]:= Logaritmen[antw1vr2lo, juistantwvr2lo]

Out[113]= Verder te vereenvoudigen

In[114]:= Logaritmen[antw2vr2lo, juistantwvr2lo]

Out[114]= Logaritmen kunnen bij elkaar opgeteld worden

In[115]:= Logaritmen[antw3vr2lo, juistantwvr2lo]

Out[115]= Standaardvorm II

In[116]:= Logaritmen[antw4vr2lo, juistantwvr2lo]

Out[116]= Verder te vereenvoudigen

In[117]:= Logaritmen[antw5vr2lo, juistantwvr2lo]

Out[117]= Standaardvorm I
```

A.4 Stroomdiagrammen Algoritmes

Figuur 4: Stroomdiagram Algoritme Breuken

Figuur 5: Stroomdiagram Algoritme Wortels

Figuur 6: Stroomdiagram Algoritme Polynomen



Figuur 7: Stroomdiagram Algoritme Goniometrie

Figuur 8: Stroomdiagram Algoritme Logaritmen