

BACHELOR

Wachttijdbenaderingen bij verkeerskruisingen met twee wachtrijen

van Endhoven, E.

Award date:
2013

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Wachttijdbenaderingen bij verkeerskruisingen met twee wachtrijen

Bachelor eindproject

Door:

Edwin van Endhoven (717019)

Begeleider:

dr. J.A.C. Resing

*Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven*

18 augustus 2013

Inhoudsopgave

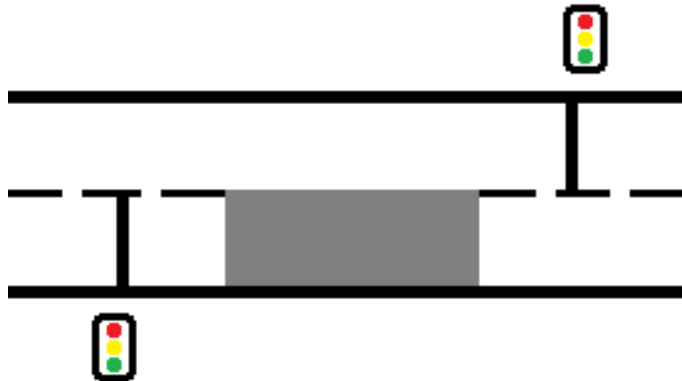
| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introductie | 2 |
| 2 | Beschrijving variabelen | 4 |
| 3 | Beschrijving strategieën | 4 |
| 4 | Blijf switchen | 6 |
| 4.1 | Light Traffic | 6 |
| 4.1.1 | $\mathbb{E}[W_i^{(M/G/1)}]$ | 6 |
| 4.1.2 | $\mathbb{E}[I_{i,res}]$ | 10 |
| 4.1.3 | Resultaat voor $\mathbb{E}[W_i^{LT}]$ | 15 |
| 4.2 | Heavy Traffic | 15 |
| 4.2.1 | Vloeistofmodel | 15 |
| 4.2.2 | Rijlengte bij het begin van een cyclus | 17 |
| 4.2.3 | Verwachte wachttijden | 18 |
| 4.3 | Interpolatie | 19 |
| 5 | Stay green | 20 |
| 5.1 | Light Traffic | 20 |
| 5.2 | Interpolatie | 24 |
| 6 | All red | 25 |
| 6.1 | Light Traffic | 25 |
| 6.2 | Interpolatie | 28 |
| 7 | Mainstream green | 29 |
| 7.1 | Light Traffic | 29 |
| 7.2 | Interpolatie Q_m | 33 |
| 8 | Simulaties | 35 |
| 8.1 | Vergelijking van de strategieën | 36 |
| 8.2 | Light Traffic | 44 |
| 8.2.1 | Blijf Switchen | 44 |
| 8.2.2 | Stay green | 45 |
| 8.2.3 | All red | 46 |
| 8.2.4 | Mainstream green | 47 |
| 8.3 | Heavy Traffic | 48 |
| 8.4 | Interpolatie | 49 |
| 8.4.1 | Blijf Switchen | 49 |
| 8.4.2 | Stay green | 50 |
| 8.4.3 | All red | 51 |
| 8.4.4 | Mainstream green | 51 |
| 9 | Conclusie | 53 |

1 Introductie

In dit project wordt ingegaan op de verwachte wachtrijslengte en wachttijd van voertuigen die een kruising met verkeerslichten passeren. Dit kan verschillende doelen hebben, bijvoorbeeld bekijken of een bepaalde afstelling van de verkeerslichten überhaupt wel voldoende doorstroming mogelijk maakt, of een vergelijking maken tussen verschillende afstellingen om een optimale doorstroming te bereiken.

We kijken, meer specifiek, naar een tweebaans weg waarop een obstakel geplaatst is. Hierdoor moet verkeer vanuit beide richtingen over één rijbaan het obstakel passeren. Om dit te reguleren staan verkeerslichten opgesteld aan beide zijden van het obstakel.

De afstelling van dit verkeerslicht moet aan enkele eisen voldoen:



Figuur 1: Schematische weergave wegversperring

- Verkeer kan maar van één kant tegelijk de versperring passeren, waardoor maximaal één van de twee lichten op groen kan staan op elk moment.
- Nadat een verkeerslicht voor één van de richtingen op rood springt, moet al het verkeer vanuit die richting nog wel de kans hebben de versperring te passeren. Nadat een licht op rood springt, kan het andere licht dus pas na een bepaalde periode op groen. Deze periode zal in dit verhaal de *switchovertijd* heten.

Er zit verder nog genoeg vrijheid in de afstelling van deze verkeerslichten. In dit project wordt onderzocht wat het effect is van verschillende afstellingen van de verkeerslichten op de verwachte wachttijd van de voertuigen. Hierbij wordt de verkeersintensiteit gevarieerd tussen een bijna leeg systeem (Light Traffic) en een systeem dat bijna verzadigd is (Heavy Traffic).

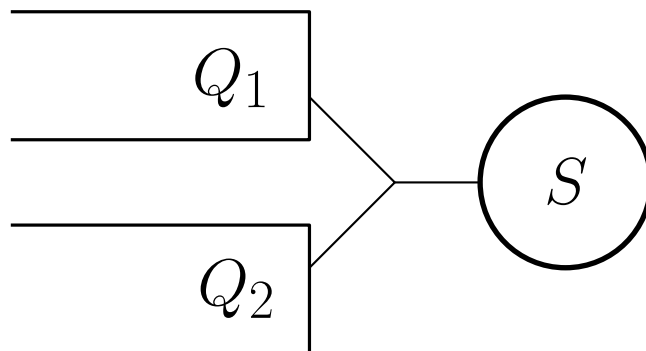
De aanname die we hierbij doen, is dat zowel de switchovertijd als de bedieningstijd deterministisch zijn. De *bedieningstijd* definiëren we als de tijd die een voertuig nodig heeft het groene licht te passeren. Dit lijkt onrealistisch, een vrachtwagen zal bijvoorbeeld langzamer

optrekken en is langer, dus zal meer tijd nodig hebben. Het blijkt echter dat het effect hiervan erg klein is, terwijl uitdrukkingen voor, bijvoorbeeld, de verwachte wachttijd er wel veel eenvoudiger van worden.

Verder zullen alle besproken afstellingen van de stoplichten, of strategieën, zoals ze in het verdere verhaal genoemd gaan worden, gebruik maken van *exhaustive service*. Dit houdt in dat als een van de lichten eenmaal op groen staat, deze niet op rood springt voordat de rij voor het verkeerslicht helemaal leeg is.

Het probleem is een uitbreiding op de bekende M/G/1 queue. Bij dit systeem komen klanten aan volgens een Poissonproces, en bedient één server deze klanten, waarbij de bedieningstijd per klant een willekeurige verdeling heeft. De totale tijd in het systeem van een voertuig is gelijk aan de som van de wachttijd en de bedieningstijd van dit voertuig. Deze variabelen hebben een vrij eenvoudige verdeling.

Het systeem dat hier besproken wordt werkt met één server die beide queues moet bedienen. Hierbij kan de server maar één rij tegelijk bedienen en heeft hij de switchovertijd nodig om te wisselen naar de andere rij. Dit systeem lijkt op een systeem met twee M/G/1 queues, waar de servers van deze queues soms een pauze nemen. Deze pauze noemen we de *intervisit time*, en bestaat de periode van de switchover naar de andere rij, de bediening van die rij, en de switch terug naar de besproken rij. Dit is als volgt schematisch weer te geven:



Figuur 2: Weergave model

Een server bedient hier twee queues. Hij kan maximaal één queue bedienen op ieder moment, en heeft een bepaalde tijd nodig om na het beëindigen van een bediening de andere queue te gaan bedienen.

Dit verslag begint met een korte beschrijving van de variabelen in hoofdstuk 2, waarna in hoofdstuk 3 de strategieën worden geïntroduceerd en kort wordt uitgelegd hoe ik naar de approximatie toe heb gewerkt. In de hoofdstukken 4, 5, 6 en 7 ga ik de approximaties bepalen voor alle strategieën, waarna in hoofdstuk 8 deze approximaties worden getoetst aan simulatieresultaten. Tot slot trek ik in hoofdstuk 9 de bijbehorende conclusies.

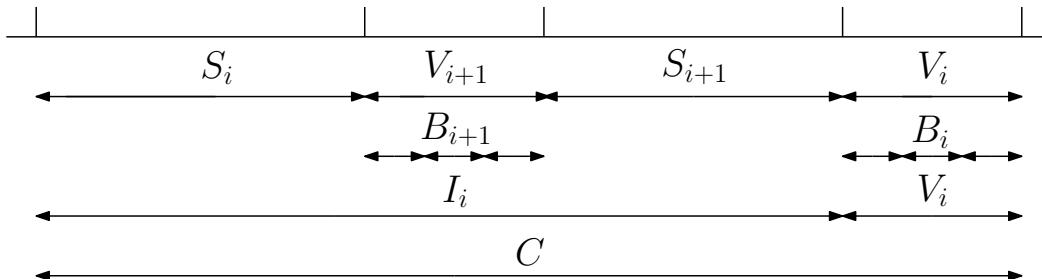
2 Beschrijving variabelen

Hieronder bevindt zich een lijst van variabelen die in dit rapport een rol spelen.

| Variabele | Beschrijving | Uitdrukking |
|----------------|--------------------------------------|-------------------|
| Q_i | Rij i | |
| B_i | Bediening in Q_i | |
| V_i | Periode van bediening in Q_i | |
| S_i | Switchover van Q_i naar Q_{i+1} | |
| I_i | Intervisit time Q_i | |
| C | Cyclus | |
| B | Bediening | |
| S | Totale switchover | $S_1 + S_2$ |
| S_{res} | Residuale totale switchover | |
| B_{res} | Residuale bediening | |
| $B_{i,res}$ | Residuele bediening in Q_i | |
| G_i | Groenperiode zonder verkeer in Q_i | |
| L | Roodperiode in leeg systeem | |
| W_i | Wachttijd van een voertuig in Q_i | |
| λ_i | Aankomstintensiteit Q_i | |
| A_i | Tussenaankomstperiode Q_i | |
| ρ_i | Mate van verzadiging in rij i | $\lambda_i * B$ |
| ρ | Mate van verzadiging | $\rho_1 + \rho_2$ |
| $\hat{\rho}_i$ | Fractie aankomsten in Q_i | ρ_i / ρ |

De coëfficiënten van de variabelen hierboven geven aan bij welke rij de variabele hoort. Omdat ik slechts naar twee rijen kijk en de notatie eenvoudig wil houden, wordt bij deze coëfficiënten altijd modulo 2 gerekend. Hierdoor geldt dat $Q_{2+1} = Q_1$.

Hieronder is een schematische weergave van een cyclus te vinden waarin een deel van de begrippen verduidelijkt wordt.



Figuur 3: Weergave cyclus C

3 Beschrijving strategieën

Alle strategieën die behandeld gaan worden, maken gebruik van exhaustive service. Dit houdt in dat, als de server eenmaal een rij bedient, deze rij (minstens) bediend wordt tot de

rij helemaal leeg is. Als deze rij leeg is, en de andere rij is dit niet, dan wordt altijd geswitcht naar de andere rij. Het verschil in de strategieën zit hem in het gedrag van de server als beide rijen leeg zijn.

- *Blijf switchen*: de server blijft heen en weer switchen. Als de server arriveert bij een lege rij, switcht hij gelijk terug naar de andere rij.
- *Stay green*: als de bediende rij leeg is en de andere rij is dit ook, dan blijft het verkeerslicht op groen staan in de rij waar het laatst bediend is.
- *All red*: als beide rijen leeg zijn worden alle verkeerslichten op rood gezet.
- *Mainstream green*: als beide rijen leeg zijn wordt het verkeerslicht voor de rij met de hoogste aankomstintensiteit op groen gezet.

Marko Boon heeft in zijn proefschrift [1] uitdrukkingen gevonden voor de verwachte wachttijd als de strategie *Blijf switchen* wordt toegepast. Deze uitdrukkingen zijn afhankelijk van:

- De mate van verzadiging van het systeem, ofwel de verwachte fractie van de tijd dat het systeem auto's bedient. Dit wordt ook wel de verkeersintensiteit genoemd, en is aangegeven met ρ .
- De verkeersintensiteit per rij. Deze term heet ρ_1 voor rij 1 en ρ_2 voor rij 2. Er geldt $\rho_1 + \rho_2 = \rho$. De fractie van de totale verkeersstroom die in rij i aankomt noemen we $\hat{\rho}_i$, hiervoor geldt $\hat{\rho}_i = \rho_i / \rho$.
- De verwachtingswaarden en varianties van de bedieningstijden en switchovertijden in beide rijen.

Voor het bepalen van deze uitdrukkingen zijn de volgende stappen genomen:

- Er wordt gezocht naar een uitdrukking voor de verwachte wachttijd als er erg weinig verkeer is, de zogenaamde Light Traffic-situatie. Belangrijke aanname is dat bij aankomst rekening wordt gehouden met hoogstens één andere auto in het systeem. Hierdoor komen in de uitdrukking geen termen groter of gelijk aan $O(\rho^2)$ voor.
- Er wordt gezocht naar een uitdrukking voor de verwachte wachttijd als het systeem bijna verzadigd is, dus voor de limietsituatie $\rho \uparrow 1$. Deze situatie noemen we de Heavy Traffic-situatie.
- Met bovenstaande uitdrukkingen wordt een interpolatie ontwikkeld die voor alle waarden van ρ tussen 0 en 1 een approximatie van de verwachte wachttijd geeft.

Deze stappen worden in hoofdstuk 4 beschreven. In de hoofdstukken 5, 6 en 7 zijn deze stappen ook voor de strategieën Stay green, All red en Mainstream green genomen, om ook daarvoor passende approximaties te verkrijgen.

Een eerste conclusie over de Heavy Traffic situatie is reeds te trekken. Als het systeem tegen verzadiging aan zit, wisselt het systeem na het legen van de ene rij gelijk naar de andere rij, en is na het legen van die rij de eerste rij weer gevuld. Dit gebeurt bij alle strategieën die hierboven beschreven zijn, omdat deze allemaal gebruik maken van exhaustive service. Voor

hoge waarden van ρ is de situatie bij de vier genoemde strategieën dus soortgelijk, waardoor we ook de uitdrukking voor de verwachte wachttijd gelijk verwachten. Het geval Heavy Traffic ga ik hierdoor bij de strategie Blijf Switchen uitwerken, waarna ik bij de andere strategieën alleen het Light Traffic geval en de approximatie ga behandelen. Bij de simulaties zal duidelijk worden gemaakt dat deze aanname terecht is, en er dus één Heavy Traffic uitdrukking is voor alle vier de gevallen die behandeld worden.

4 Blijf switchen

Blijf switchen is de strategie waarbij het systeem, wanneer het niet bedient, constant switcht tussen de twee rijen. Nadat alle klanten in Q_i bediend zijn, switcht het systeem naar Q_{i+1} , waar het systeem gaat bedienen. Als Q_{i+1} leeg is switcht het systeem weer naar Q_i . Als een klant X arriveert in Q_i zal deze moeten wachten tot het systeem naar Q_i is gewicht, waarna de klanten worden bediend die reeds in Q_i wachtten toen X aankwam. Hierna is klant X aan de beurt. De switchovers zullen altijd moeten worden afgewacht, ook al is het systeem helemaal leeg en al lange tijd aan het switchen.

4.1 Light Traffic

Light Traffic is de situatie waarin de verkeersintensiteit ρ dicht bij 0 ligt, dus erg laag is. De kans dat het systeem een auto bedient bij aankomst van een nieuwe auto is hier ongeveer ρ . Doordat, bij Light Traffic, ρ erg laag is, kun je de kans op meer dan één auto in het systeem beschouwen als $O(\rho^2)$, en deze term negeren.

We willen een uitdrukking vinden voor de verwachte wachttijd onder Light Traffic condities, $\mathbb{E}[W_i^{(LT)}]$, welke termen bevat van orde tot en met $O(\rho)$. Bij de strategie “Blijf Switchen” is de Fuhrmann-Cooper-decompositie [3] een belangrijk ingrediënt. Hierdoor kun je onderscheid maken tussen de wachttijd van het voertuig in de visit time V_i en de wachttijd van het voertuig in de intervisit time I_i . Er geldt namelijk:

$$\mathbb{E}[W_i] = \mathbb{E}[W_i^{(M/G/1)}] + \mathbb{E}[I_{i,res}].$$

Nu is de te zoeken uitdrukking voor de verwachte wachttijd in Light Traffic gesplitst in twee stappen: een uitdrukking vinden voor de verwachte wachttijd in een eenvoudige $M/G/1$ -queue, en een voor de verwachte resterende intervisit time bij aankomst in Q_i :

$$\mathbb{E}[W_i^{(LT)}] = \mathbb{E}[W_i^{(M/G/1,LT)}] + \mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}].$$

4.1.1 $\mathbb{E}[W_i^{(M/G/1)}]$

Pollaczek-Khinchin formule

Voor het bepalen van $\mathbb{E}[W^{(M/G/1,LT)}]$ is de Pollaczek-Khinchin formule een belangrijk ingrediënt. Voordat ik hieruit de gezochte uitdrukking ga geven, ga ik deze formule eerst afleiden met behulp van [2]. In eerste instantie gaan we hiervoor zoeken naar een uitdrukking voor de kansverdeling van het aantal voertuigen dat een vertrekkend voertuig achterlaat in haar rij. Hierbij gaat het om een $M/G/1$ queue, dus een systeem van één queue waarin auto’s volgens een Poisson-proces met rate λ arriveren, en volgens een willekeurige verdeling met

verwachting $1/\mu$ bediend worden door een server.

We noemen L_k^d het aantal voertuigen dat wordt achtergelaten door de k 'de klant. De relatie tussen L_k^d en L_{k+1}^d wordt bepaald door het aantal klanten dat aankomt tussen het vertrek van de klanten k en $k+1$, wat we aangeven met de variabele A_{k+1} . Als $L_k^d > 0$ geldt:

$$L_{k+1}^d = L_k^d + A_{k+1} - 1,$$

omdat de nieuw gearriveerde voertuigen nu ook achtergelaten worden, samen met de bij het vertrek van k reeds aanwezige voertuigen. Uit de laatste groep is nu wel één voertuig verdwenen, namelijk klant $k+1$. Dit is natuurlijk niet zo als $L_k^d = 0$, dan geldt:

$$L_{k+1}^d = A_{k+1}.$$

De kansverdeling van dit systeem is, door deze twee gelijkheden, weer te geven als een Markovketen. Kies α_i als de kans dat er tussen het vertrek van twee klanten i voertuigen arriveren. Als L_k^d bekend is, kun je hiermee de kansverdeling van L_{k+1}^d bepalen. De transitiekansen zijn als volgt gedefiniëerd:

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(L_{k+1}^d = j | L_k^d = i).$$

Er geldt nu:

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{als } j < i - 1 \\ \alpha_{j-i+1} & \text{als } i > 0, j \geq i - 1 \\ \alpha_j & \text{als } i = 0 \end{cases}$$

Hierdoor ziet de matrix P er als volgt uit:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Stel t de periode tussen twee vertrekken. Het aantal gearriveerde voertuigen tijdens deze periode volgt dan een Poisson-verdeling met parameter λt . De periode tussen twee vertrekken volgt zelf de willekeurige verdeling van de bedieningstijd, welke kansdichtheid $f_B(t)$ volgt. Er geldt hierdoor:

$$\alpha_i = \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt, \quad i \geq 0.$$

We willen nu graag iets kunnen zeggen over de limietverdeling van L_k^d . Deze noteren we als $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$, en de stochast noemen we L^d . Deze stochast is als volgt gedefiniëerd:

$$d_i = P(L^d = i) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(L_k^d = i).$$

Voor limietverdelingen gelden limietvergelijkingen, deze zijn als volgt:

$$d_i = \sum_{k=0}^i d_{i+1-k} \alpha_k + d_0 \alpha_i, \quad i \geq 0.$$

Om deze vergelijking op te lossen gebruiken we kansgenererende functies, deze zijn als volgt gedefinieerd:

$$P_{L^d}(z) = \mathbb{E}[z^{L^d}] = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^i, \quad P_A(z) = \mathbb{E}[z^A] = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i, \quad z \leq 1.$$

$P_A(z)$ kun je herschrijven:

$$\begin{aligned} P_A(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt z^i \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^i}{i!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda(1-z)t} f_B(t) dt \\ &= \tilde{B}(\lambda(1-z)) \end{aligned}$$

waarbij $\tilde{B}(s)$ de Laplace-Stieltjes getransformeerde is van B , gedefinieerd als $\mathbb{E}[e^{-sB}]$. Vanaf nu geldt voor iedere continu verdeelde stochast X dat $\tilde{X}(s)$ haar Laplace-Stieltjes getransformeerde is, welke gedefinieerd is als $\mathbb{E}[e^{-sX}]$.

Voor $P_{L^d}(z)$ geldt, door de limietverdelingen, dat:

$$\begin{aligned} P_{L^d}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} (d_i) z^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i d_{i+1-k} \alpha_k + d_0 \alpha_i \right) z^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i d_{i+1-k} \alpha_k z^i + \sum_{i=0}^{\infty} d_0 \alpha_i z^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i d_{i+1-k} \alpha_k z^i + d_0 P_A(z) \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} d_{i+1-k} z^{i+1-k} \alpha_k z^k + d_0 P_A(z) \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \sum_{i=k}^{\infty} d_{i+1-k} z^{i+1-k} + d_0 P_A(z) \\ &= z^{-1} P_A(z) (P_{L^d}(z) - d_0) + d_0 P_A(z) \end{aligned}$$

Enig omschrijfwerk geeft de volgende uitdrukking:

$$P_{L^d}(z) = \frac{d_0 P_A(z) (1 - z^{-1})}{1 - z^{-1} P_A(z)}.$$

De kans dat het systeem leeg is in haar limietverdeling is d_0 , maar volgens de PASTA-eigenschap (p. 11) is deze kans ook gelijk aan $(1 - \rho)$. Als dit systeem niet bedient is het namelijk altijd leeg. Hierdoor geldt $d_0 = 1 - \rho$. De laatste omschrijvingen geven de uiteindelijke uitdrukking voor $P_{L^d}(z)$:

$$P_{L^d}(z) = \frac{(1 - \rho)\tilde{B}(\lambda(1 - z))(1 - z)}{\tilde{B}(\lambda(1 - z)) - z}.$$

Nu gaan we kijken naar de verdeling van de sojourn time J , oftewel de totale tijd dat een klant zich in het systeem bevindt. Dit is de som van zijn wachttijd en zijn bedieningstijd. Er is een mooi verband tussen J en L^d . Alle auto's die achtergelaten worden na het vertrek van klant k , zijn aangekomen tussen de aankomst in het systeem en het vertrek uit het systeem van klant k . Deze periode is precies de sojourn time van deze klant.

Stel $f_J(t)$ de kansdichtheid van de sojourn time van een klant. Het aantal klanten dat in deze periode aankomt is afhankelijk van een Poisson-verdeling met parameter λt , waarbij t weer afhankelijk is van $f_J(t)$. Het aantal klanten is echter ook verdeeld volgens de kansverdeling $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$, vanwege het eerder genoemde verband. Er geldt dus:

$$d_n = \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_J(t) dt.$$

Zoals eerder in deze paragraaf is aangegeven, valt dit om te schrijven tot:

$$P_{L^d}(z) = \tilde{J}(\lambda(1 - z))$$

Substitutie in de bekende formule van $P_{L^d}(z)$ levert op:

$$\tilde{J}(\lambda(1 - z)) = \frac{(1 - \rho)\tilde{B}(\lambda(1 - z))(1 - z)}{\tilde{B}(\lambda(1 - z)) - z}.$$

wat door middel van de substitutie $s = \lambda - \lambda z$, dus $z = (\lambda - s)/\lambda$, op de volgende relatie uitkomt:

$$\tilde{J}(s) = \frac{(1 - \rho)\tilde{B}(s)s}{\lambda\tilde{B}(s) + s - \lambda}.$$

Uiteindelijk zoeken we een uitdrukking voor $\tilde{W}(s)$. Uiteraard geldt dat $J = W + B$, de sojourn time bestaat namelijk uit de wachttijd van de klant plus zijn bediening, en daardoor geldt ook $\tilde{J}(s) = \tilde{W}(s) * \tilde{B}(s)$. De uitdrukking die we zoeken is hierdoor:

$$\tilde{W}(s) = \tilde{J}(s)/\tilde{B}(s) = \frac{(1 - \rho)s}{\lambda\tilde{B}(s) + s - \lambda}.$$

Deze uitdrukking van $\tilde{W}(s)$ staat bekend als een vorm van de Pollaczek-Khinchin-formule. Ook de eerder genoemde uitdrukkingen van $\tilde{J}(s)$ en $P_{L^d}(z)$ zijn vormen van de Pollaczek-Khinchin-formule.

Met behulp van Taylor-expansies proberen we uit $\tilde{W}(s)$ een uitdrukking voor $\mathbb{E}[W]$ te vinden. Voor elke stochast X en haar Laplace-getransformeerde $\tilde{X}(s)$ geldt: $\tilde{X}^{(n)}(0) = (-1)^n \mathbb{E}[X^n]$. De definitie van de Taylor-expansie van $\tilde{X}(s)$ rond een punt u is:

$$\tilde{X}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{X}^{(n)}(u)}{n!} (s - u)^n.$$

De Taylor-expansie van $\tilde{B}(s)$ rond het punt 0 is dan als volgt:

$$\tilde{B}(s) = 1 - \mathbb{E}[B]s + \mathbb{E}[B^2] \frac{s^2}{2} + O(s^3).$$

Deze is in te vullen in de Pollaczek-Khinchin formule van $\tilde{W}(s)$, onthoud hierbij dat $\rho = \lambda\mathbb{E}[B]$:

$$\begin{aligned} \tilde{W}(s) &= \frac{(1-\rho)s}{\lambda\tilde{B}(s) + s - \lambda} = \frac{(1-\rho)s}{\lambda(1 - \mathbb{E}[B]s + \mathbb{E}[B^2] \frac{s^2}{2} + O(s^3)) + s - \lambda} \\ &= \frac{(1-\rho)s}{s(1 - \mathbb{E}[B]) + \lambda\mathbb{E}[B^2] \frac{s^2}{2} + O(s^3)} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2(1-\rho)}\mathbb{E}[B^2]s + O(s^2)} \\ &= 1 - \frac{\lambda}{2(1-\rho)}\mathbb{E}[B^2]s + O(s^2) = 1 - \frac{\mathbb{E}[B^2]}{2\mathbb{E}[B]} \frac{\rho}{(1-\rho)}s + O(s^2) \\ &= 1 - \mathbb{E}[B_{res}] \frac{\rho}{(1-\rho)}s + O(s^2) \end{aligned}$$

waarbij $\mathbb{E}[B_{res}]$ de residuele wachttijd is, ofwel de verwachte resterende duur van B als op een willekeurig punt in B wordt gekeken. Er geldt $\mathbb{E}[B_{res}] = \mathbb{E}[B^2]/2\mathbb{E}[B]$. Meer hierover is te vinden op p. 14. We stellen het bovenstaande gelijk aan de Taylor-expansie van $\tilde{W}(s)$ rond het punt 0, waarvoor geldt:

$$\tilde{W}(s) = 1 - \mathbb{E}[W]s + O(s^2).$$

Hierdoor geldt dat:

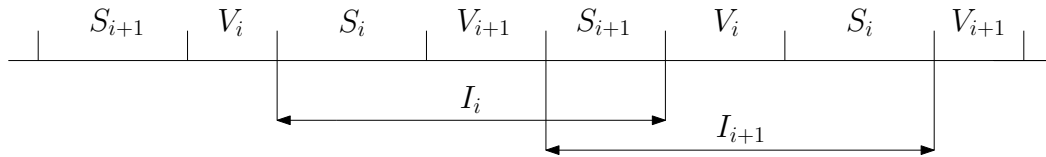
$$\mathbb{E}[W] = \frac{\rho}{(1-\rho)}\mathbb{E}[B_{res}] = \rho\mathbb{E}[B_{res}] + O(\rho^2).$$

Dit leidt tot de volgende uitdrukking voor $\mathbb{E}[W^{(M/G/1,LT)}]$, waarin de verkeersintensiteit natuurlijk ρ_i is:

$$\mathbb{E}[W^{(M/G/1,LT)}] = \rho_i\mathbb{E}[B_{i,res}] + O(\rho_i^2).$$

4.1.2 $\mathbb{E}[I_{i,res}]$

Voor het bepalen van de verwachte residuele intervisit time $\mathbb{E}[I_{i,res}]$ moeten we inzien dat I_i onder te verdelen is in visits en switchovers: $I_i = S_i + V_{i+1} + S_{i+1}$. Dit is als volgt weer te geven:



Figuur 4: Weergave Blijf Switchen

Een aankomst vindt plaats tijdens een switchover of een visit, hiertussen maken we dan ook onderscheid:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}] &= \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_i)\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_i] \\ &\quad + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_{i+1})\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT} | \text{aankomst tijdens } V_{i+1}] \\ &\quad + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_{i+1})\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i+1}] \end{aligned}$$

De drie termen kunnen gelezen worden als de kans dat een aankomst in een bepaald interval plaatsvindt, maal de verwachte wachttijd als de aankomst in dat interval plaatsvindt.

Aankomst tijdens V_{i+1}

De kans dat een aankomst plaatsvindt tijdens V_{i+1} is te bepalen door gebruik te maken van de PASTA-eigenschap. Voor alle processen waarbij voertuigen volgens een Poissonproces arriveren, geldt dat het moment van aankomst gezien kan worden als een willekeurig punt in de tijd. Hierdoor is de kans op aankomst tijdens V_{i+1} gelijk aan de fractie die V_{i+1} uitmaakt van I_i , gezien een willekeurig punt zich met deze kans in V_{i+1} bevindt. De afkorting PASTA staat voor Poisson Arrivals See Time Averages.

Hoewel dit misschien vrij triviaal lijkt, is dit niet het geval. Een voorbeeld hiervan is als volgt: een systeem met één rij en één server heeft een deterministische bedieningstijd van 2, en een deterministische tussenaankomsttijd van 5. In dit systeem komt de klant duidelijk aan in een leeg systeem: de laatst gearriveerde klant is immers alweer bediend bij aankomst. Toch is het systeem $2/5$ deel van de tijd aan het bedienen, en geldt PASTA dus niet.

In het vervolg van dit rapport ga ik nog een aanzienlijk aantal keer een kans op aankomst in een bepaalde periode uitrekenen. Hierbij gebruik ik vanaf nu altijd de PASTA-eigenschap.

De kans dat een aankomst plaatsvindt tijdens V_{i+1} is nu gelijk aan

$$\frac{\mathbb{E}[V_{i+1}]}{\mathbb{E}[I_i]}.$$

We weten dat het systeem een fractie ρ van de totale tijd aan het bedienen is, waardoor de verwachting ook is dat het systeem een fractie ρ van iedere cyclus bedient. Op dezelfde manier is te beredeneren dat het systeem een fractie ρ_i van de totale tijd in Q_i bedient, en een fractie ρ_{i+1} in Q_{i+1} . V_i en V_{i+1} komen beiden echter maar éénmaal per cyclus C voor. Hierdoor gelden:

$$\mathbb{E}[V_{i+1}] = \rho_{i+1}\mathbb{E}[C], \quad \mathbb{E}[I_i] = \mathbb{E}[C] - \rho_i\mathbb{E}[C] = (1 - \rho_i)\mathbb{E}[C],$$

waaruit te concluderen valt dat

$$\frac{\mathbb{E}[V_{i+1}]}{\mathbb{E}[I_i]} = \frac{\rho_{i+1}\mathbb{E}[C]}{(1 - \rho_i)\mathbb{E}[C]} = \rho_{i+1} + O(\rho^2),$$

omdat we alle $O(\rho^2)$ termen kunnen verwaarlozen. Doordat deze kans $O(\rho)$ is, kunnen alle $O(\rho)$ termen in $\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT}|aankomst\ tijdens\ V_{i+1}]$ genegeerd worden. Deze termen leveren namelijk $O(\rho^2)$ op in de uitdrukking voor $\mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}]$.

De residuele intervisit bestaat, bij aankomst in V_{i+1} , uit de residuele visit aan Q_{i+1} en de switchover van Q_{i+1} naar Q_i , dus

$$\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT}|aankomst\ tijdens\ V_{i+1}] = \mathbb{E}[V_{i+1,res}] + \mathbb{E}[S_{i+1}].$$

$\mathbb{E}[V_{i+1,res}]$ bestaat uit de residuele bedieningstijd van de auto die bediend wordt, $\mathbb{E}[B_{i+1,res}]$, en de bedieningstijden van de auto's die daarna nog worden geholpen tijdens V_{i+1} . Echter leveren deze klanten $O(\rho)$ termen op, en die kunnen we verwaarlozen. Hierdoor geldt:

$$\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT}|aankomst\ tijdens\ V_{i+1}] = \mathbb{E}[B_{i+1,res}] + \mathbb{E}[S_{i+1}] + O(\rho).$$

Aankomst tijdens S_{i+1}

De kans dat een aankomst plaatsvindt tijdens S_{i+1} is

$$\frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[I_i]} = \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{(1 - \rho_i)\mathbb{E}[C]}.$$

Doordat we weten dat het systeem een fractie ρ van een cyclus verwacht wordt te bedienen, is de verwachting dat het systeem een fractie $(1 - \rho)$ aan het switchen is. Hierdoor geldt $\mathbb{E}[S] = (1 - \rho)\mathbb{E}[C]$, en kunnen we het volgende concluderen:

$$\frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{(1 - \rho_i)\mathbb{E}[C]} = \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[S]} \frac{1 - \rho}{1 - \rho_i} = \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[S]} (1 - \rho + \rho_i) + O(\rho^2),$$

omdat we alle $O(\rho^2)$ termen kunnen verwaarlozen. In dit geval kunnen we niet, zoals het geval hierboven, de $O(\rho)$ termen verwaarlozen in de uitdrukking van $\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i+1}]$.

De residuele intervisit bestaat nu enkel uit de residuele switchover van Q_{i+1} naar Q_i , dus

$$\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i+1}] = \mathbb{E}[S_{i+1,res}].$$

Aankomst tijdens S_i

Analoog aan het geval S_{i+1} is de kans dat een aankomst plaatsvindt tijdens S_i

$$\frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[I_i]} = \frac{\mathbb{E}[S_i]}{(1 - \rho_i)\mathbb{E}[C]} = \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[S]} \frac{1 - \rho}{1 - \rho_i} = \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[S]} (1 - \rho + \rho_i) + O(\rho^2),$$

en ook hier moeten we dus $O(\rho)$ termen beschouwen in $\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_i]$.

De residuele intervisit bestaat uit de residuele switchover van Q_i naar Q_{i+1} , de switchover van Q_{i+1} naar Q_i en de visit aan Q_{i+1} , dus

$$\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_i] = \mathbb{E}[S_{i,res}] + \mathbb{E}[V_{i+1}] + \mathbb{E}[S_{i+1}].$$

V_{i+1} bestaat uit de bediening van alle klanten die in Q_{i+1} aangekomen zijn tijdens S_{i+1} , $S_{i,past}$ en $S_{i,res}$, ofwel de cyclus voorafgaand aan V_{i+1} . $S_{i,past}$ is hierbij het bij aankomst reeds gepasseerde gedeelte van S_i . Tijdens deze periode komt werk met rate ρ_{i+1} binnen, wat leidt tot de volgende uitdrukking voor de verwachte lengte van V_{i+1} :

$$\mathbb{E}[V_k | \text{aankomst tijdens } S_i] = \rho_{i+1}(\mathbb{E}[S_{i+1} + S_{i,past} + S_{i,res}]) + O(\rho^2).$$

Aankomsten tijdens V_i en V_{i+1} hoeven hier niet meegenomen te worden, omdat deze termen een $O(\rho^2)$ term opleveren, welke we kunnen verwaarlozen.

Voor de totale verwachte wachttijd bij aankomst tijdens S_i levert dit de volgende uitdrukking op:

$$\mathbb{E}[I_{i,res}^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_i] = (1 + \rho_{i+1})\mathbb{E}[S_{i,res}] + \rho_{i+1}\mathbb{E}[S_{i,past}] + (1 + \rho_{i+1})\mathbb{E}[S_{i+1}] + O(\rho^2).$$

Resultaat voor $\mathbb{E}[I_{i,res}]$

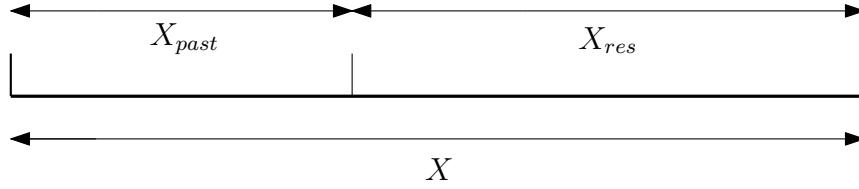
Nu is de totale uitdrukking als volgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}] = & \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[S]} (1 - \rho + \rho_i) * \left((1 + \rho_{i+1})\mathbb{E}[S_{i,res}] + \rho_{i+1}\mathbb{E}[S_{i,past}] + (1 + \rho_{i+1})\mathbb{E}[S_{i+1}] \right) \\ & + \rho_{i+1} \left(\mathbb{E}[B_{i+1,res}] + \mathbb{E}[S_{i+1}] \right) + \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[S]} (1 - \rho + \rho_i) * \mathbb{E}[S_{i+1,res}] + O(\rho^2). \end{aligned}$$

Hier staan nog enkele $O(\rho^2)$ termen in. Na uitwerken ziet de functie er als volgt uit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}] = & \rho_{i+1}\mathbb{E}[B_{i+1,res}] + \rho_{i+1}\mathbb{E}[S_{i+1}] + (1 - \rho_{i+1}) \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[S]} \mathbb{E}[S_{i+1,res}] \\ & + \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[S]} \mathbb{E}[S_{i,res}] + \rho_{i+1} \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[S]} \mathbb{E}[S_{i,past}] + \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[S]} \mathbb{E}[S_{i+1}] + O(\rho^2). \end{aligned}$$

We zoeken een andere schrijfwijze voor de residuele stochasten X_{res} . Als je de grootte van een stochast X ziet als een interval, is de residuale stochast te zien als lengte tussen een willekeurig punt op het interval en het eind van het interval.



Figuur 5: Schematische weergave X_{res}

De stochast die de totale lengte van X aangeeft bij aankomst noemen we \mathbf{X} . Als een klant aankomt tijdens een interval, is de kans groter dat deze in een langer interval aankomt dan in een kort interval. We zoeken de kansdichtheid $f_{\mathbf{X}}$, deze is hierdoor zowel afhankelijk van de frequentie waarop X een bepaalde grootte aanneemt, bepaald door f_X , als van de lengte x , en neemt daardoor de volgende vorm aan:

$$f_{\mathbf{X}}(x) = Cx f_X(x), \quad x \geq 0.$$

De integraal over x van deze kansverdeling moet natuurlijk 1 opleveren. Hierdoor moet gelden:

$$C^{-1} = \int_{x=0}^{\infty} x f_X(x) = \mathbb{E}[X]$$

en dus geldt

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{x f_X(x)}{\mathbb{E}[X]}, \quad x \geq 0.$$

We noemen \mathbf{X} de length-biased stochast van X . Een klant komt aan op een punt in het interval $(0, \mathbf{X})$. Onder aanname dat $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ geldt dat X_{res} uniform verdeeld is:

$$f_{X_{res}}(t) dt |_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} = \mathbb{P}(t \leq X_{res} \leq t + dt | \mathbf{X} = x) = \frac{dt}{x}, \quad t \leq x.$$

Deze kans afhankelijk maken van $f_{\mathbf{X}}$ levert hierdoor het volgende op:

$$f_{X_{res}}(t)dt = \int_{x=t}^{\infty} \frac{dt}{x} f_{\mathbf{X}}(x)dx = \int_{x=t}^{\infty} \frac{f_X(x)}{\mathbb{E}[X]} dx dt = \frac{1 - F_X(t)}{\mathbb{E}[X]} dt.$$

Hieruit concluderen we gelijk dat:

$$f_{X_{res}}(t) = \frac{1 - F_X(t)}{\mathbb{E}[X]}$$

Voor de verwachting van X_{res} geldt nu dat:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{res}] &= \int_{t=0}^{\infty} t f_{X_{res}}(t) dt = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{t=0}^{\infty} t(1 - F_X(t)) dt = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{t=0}^{\infty} t \int_{y=t}^{\infty} (f_X(y)) dy dt \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{y=0}^{\infty} f_X(y) \int_{t=0}^y t dt dy = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{2} y^2 f_X(y) dy = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2\mathbb{E}[X]}, \end{aligned}$$

Volgens een analoge aanpak is aan te tonen dat $\mathbb{E}[X_{past}] = \mathbb{E}[X_{res}]$.

Doordat voor elke stochast X geldt dat $\mathbb{E}[X_{past}] = \mathbb{E}[X_{res}]$ en $\mathbb{E}[X_{res}] = \mathbb{E}[X^2]/(2\mathbb{E}[X])$, is de uitdrukking voor $\mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}]$ om te schrijven tot:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}] &= \rho_{i+1} \mathbb{E}[B_{i+1,res}] + \rho_{i+1} \mathbb{E}[S_{i+1}] + \frac{1}{2\mathbb{E}[S]} \left[(1 + \rho_{i+1}) \mathbb{E}[S_i^2] \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\mathbb{E}[S]} \left[(1 - \rho_{i+1}) \mathbb{E}[S_{i+1}^2] \right] + \frac{1}{\mathbb{E}[S]} \mathbb{E}[S_i] \mathbb{E}[S_{i+1}] + O(\rho^2). \end{aligned}$$

Dit is, met enkele omschrijvingen, gelijk aan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}] &= \rho_{i+1} \mathbb{E}[B_{i+1,res}] + \rho_i \mathbb{E}[S] + (1 - \rho_{i+1}) \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}^2]}{2\mathbb{E}[S]} + (1 + \rho_{i+1}) \frac{\mathbb{E}[S_i^2]}{2\mathbb{E}[S]} \\ &\quad + (1 + \rho + \rho_i) \frac{\mathbb{E}[S_i] \mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[S]} + \rho_i \frac{(\mathbb{E}[S_i])^2}{\mathbb{E}[S]} + \rho \frac{(\mathbb{E}[S_{i+1}])^2}{\mathbb{E}[S]} + O(\rho^2). \end{aligned}$$

Doordat voor elke stochast X geldt dat $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$, is dit om te schrijven naar:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}] &= (1 + \rho + \rho_i) \mathbb{E}[S_{res}] + \rho \mathbb{E}[B_{res}] - \rho_i \mathbb{E}[B_{i,res}] \\ &\quad - \rho_i \mathbb{E}[S] - \frac{1}{\mathbb{E}[S]} \rho_i \text{Var}[S_i] - \frac{1}{\mathbb{E}[S]} \rho \text{Var}[S_{i+1}] + O(\rho^2). \end{aligned}$$

Hierbij gebruiken we ook wederom dat $\mathbb{E}[X_{res}] = \mathbb{E}[X^2]/(2\mathbb{E}[X])$. Dit schrijven we om naar de volgende uitdrukking, die tevens in [1] voorkomt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_{i,res}^{(LT)}] &= \mathbb{E}[S_{res}] + \rho \mathbb{E}[B_{res}] - \rho_i \mathbb{E}[B_{i,res}] \\ &\quad + (\rho - \rho_i)(\mathbb{E}[S] - \mathbb{E}[S_{res}]) - \frac{1}{\mathbb{E}[S]} (\rho - \rho_i) \text{Var}[S_i] + O(\rho^2). \end{aligned}$$

4.1.3 Resultaat voor $\mathbb{E}[W_i^{LT}]$

Bovenstaande resultaten leiden tot de volgende uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_i^{LT}]$:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT}] = \mathbb{E}[S_{res}] + \rho\mathbb{E}[B_{res}] + (\rho - \rho_i)(\mathbb{E}[S] - \mathbb{E}[S_{res}]) - \frac{1}{\mathbb{E}[S]}(\rho - \rho_i)\text{Var}[S_i] + O(\rho^2).$$

4.2 Heavy Traffic

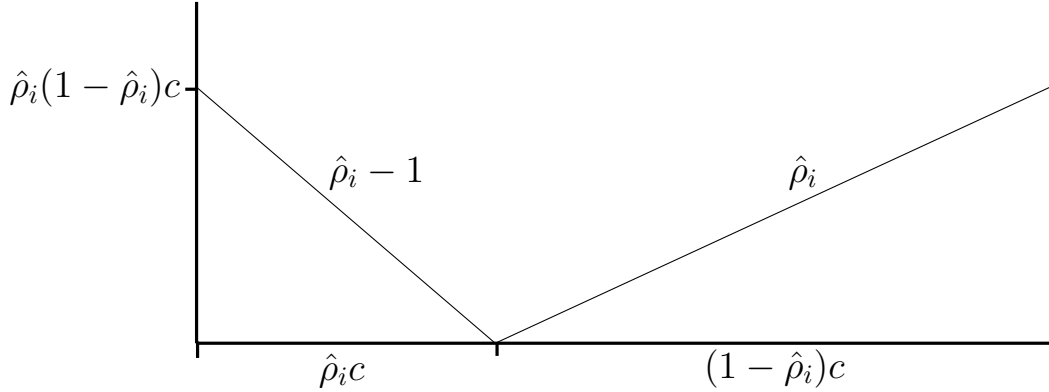
Heavy Traffic is de situatie waarin de verkeersintensiteit ρ erg hoog ligt. In het bijzonder gaat het hier over de limiet $\rho \uparrow 1$. Het systeem is hier bijna verzadigd en de verwachte wachttijden groeien in de limiet naar oneindige grootte. Om deze reden gaan we de verwachte wachttijd schalen, en voor deze geschaalde waarde een uitdrukking zoeken. Dit schalen gebeurt door de tussenaankomsttijden te variëren, en andere variabelen vast te kiezen.

Voor iedere variabele x die een functie is van ρ noteren we zijn waarde geëvalueerd bij $\rho = 1$ als \hat{x} . De stochast die de tussenaankomsttijd in Q_i bepaalt bij $\rho = 1$ noteren we als \hat{A}_i . Als men wil rekenen met lagere waarden van ρ moeten de tussenaankomsttijden worden geschaald, dit gebeurt door als stochast voor de tussenaankomsttijden in Q_i $A_i = \hat{A}_i/\rho$ te kiezen. De mate van verzadiging in Q_i wordt dan $\rho_i = \rho * \frac{\mathbb{E}[B_i]}{\mathbb{E}[\hat{A}_i]}$, de aankomstintensiteit in Q_i wordt $\lambda_i = 1/\mathbb{E}[A_i]$. We definiëren op dezelfde wijze $\hat{\lambda}_i = 1/\mathbb{E}[\hat{A}_i]$ en $\hat{\rho}_i = \rho_i/\rho$, de proportionele mate van verzadiging in Q_i . Dit kun je ook zien als de kans dat als er een auto arriveert, deze dat in Q_i doet.

4.2.1 Vloeistofmodel

De resultaten voor een systeem van een kruispunt met stoplichten onder Heavy Traffic aannames zijn behandeld in [1]. Hieruit blijkt dat we het verloop van een cyclus voor beide rijen kunnen beschrijven met behulp van een vloeistofmodel. Belangrijk hierbij is dat je, bij Heavy Traffic aannames, de totale workload in het systeem als constant kunt beschouwen omdat de aankomsten en vertrekken op een veel hoger tempo plaatsvinden dan de workload verandert. Hierdoor weet je dat, met deze aannames, de lengte van de wachtrij aan het begin en het eind van de cyclus gelijk is. Al het wachtende verkeer zit dan tenslotte in dezelfde rij.

We bekijken het verloop van de hoeveelheid werk in Q_i . We kiezen het begin van V_i als het begin van een cyclus, en definiëren c als de lengte van de cyclus. Doordat het systeem verzadigd is weet je dat V_i een fractie $\hat{\rho}_i$ van de cyclus inneemt en I_i een fractie $\hat{\rho}_{i+1} = 1 - \hat{\rho}_i$ van de cyclus inneemt. Doordat het systeem is verzadigd is het systeem tenslotte nooit leeg.



Figuur 6: Fluid Model

Tijdens V_i stroomt het werk weg met rate 1. Er komt echter ook met rate $\hat{\rho}_i$ nieuw werk aan in de rij, waardoor de totale hoeveelheid werk in Q_i met rate $1 - \hat{\rho}_i$ afneemt. Aan het eind van V_i is de rij, als vanzelfsprekend, leeg. Hieruit kun je ook bepalen dat de hoeveelheid werk aan het begin van V_i gelijk is aan $\hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c$. Tijdens I_i neemt de hoeveelheid werk toe met rate $\hat{\rho}_i$, totdat de hoeveelheid werk aan het eind van de cyclus weer gelijk is aan $\hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c$.

Een gevolg hiervan is, zoals eerder vermeld, dat de workload in het systeem gelijk blijft. Werk stroomt namelijk uit met rate 1 en nieuw werk komt binnen met rate $\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2 = 1$.

Nu kijken we naar de verdeling van de wachttijd die bij binnenkomst in het systeem wordt opgelopen. Belangrijk hierbij is of de aankomst plaatsvindt tijdens V_i of tijdens I_i . Doordat V_i een fractie $\hat{\rho}_i$ van de cyclus inneemt komt het deeltje met kans $\hat{\rho}_i$ aan in V_i , en met kans $1 - \hat{\rho}_i$ in I_i .

$$W_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} W_i^{(V_i)} & \text{met kans } \hat{\rho}_i \\ W_i^{(I_i)} & \text{met kans } 1 - \hat{\rho}_i \end{cases}$$

Als een deeltje arriveert in V_i zal deze moeten wachten tot alle dan aanwezige aanwezige deeltjes het systeem hebben verlaten. Laat U_V de uniform verdeelde variabele zijn die de fractie van V_i aangeeft die voorbij is als het deeltje arriveert. Als $U_V = 0$ zit er $\hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c$ werk in het systeem, als $U_V = 1$ is het systeem leeg. Doordat de hoeveelheid deeltjes lineair afneemt en de deeltjes met rate 1 uit het systeem stromen, geldt voor de verdeling van de wachttijd:

$$W_i^{(V_i)} \stackrel{d}{=} (1 - U_V)\hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c$$

Hieruit blijkt dat $W_i^{(V_i)}$ uniform verdeeld is op het interval $[0, \hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c]$, wat ook uit te drukken is als $[0, \hat{\rho}_i I_i]$.

Als een deeltje arriveert in I_i zal deze eerst de residuele intervisit time af moeten wachten, en daarna het vertrek van alle deeltjes die bij de aankomst reeds in het systeem zaten. Laat U_I de uniform verdeelde variabele zijn die de fractie van I_i aangeeft die voorbij is als het deeltje arriveert. De residuele intervisit time is $(1 - U_I) * I_i$, wat gelijk is aan $(1 - U_I) * (1 - \hat{\rho}_i)c$. De hoeveelheid werk in het systeem is 0 bij $U_I = 0$ en $\hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c$ bij $U_I = 1$, en loopt lineair op.

Hierdoor is de hoeveelheid werk bij aankomst gelijk aan $U_I * \hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c$. Er geldt dus dat de wachttijd gelijk is aan $(1 - U_I) * (1 - \hat{\rho}_i)c + U_I * \hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c$, ofwel:

$$W_i^{(I_i)} \stackrel{d}{=} (U_I * \hat{\rho}_i + (1 - U_I))(1 - \hat{\rho}_i)c = ((1 - \hat{\rho}_i)(1 - U_I) + \hat{\rho}_i)(1 - \hat{\rho}_i)c$$

Hieruit blijkt dat $W_i^{(I_i)}$ uniform verdeeld is op het interval $[\hat{\rho}_i(1 - \hat{\rho}_i)c, (1 - \hat{\rho}_i)c]$, wat ook uit te drukken is als $[\hat{\rho}_i I_i, I_i]$.

Voor W_i geldt nu:

$$W_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} \text{uniform verdeeld op } [0, \hat{\rho}_i I_i] & \text{met kans } \hat{\rho}_i \\ \text{uniform verdeeld op } [\hat{\rho}_i I_i, I_i] & \text{met kans } 1 - \hat{\rho}_i \end{cases}$$

Hieruit blijkt dat W_i uniform verdeeld is op het interval $[0, I_i]$. Neem U de uniform verdeelde variabele die de fractie van de cyclus C_i aangeeft die voorbij is als het deeltje arriveert. Dan geldt dus:

$$W_i \stackrel{d}{=} U * I_i$$

4.2.2 Rijlengte bij het begin van een cyclus

In het bovenstaande is één variabele onbekend, namelijk de lengte van de cyclus c . Ook de hoeveelheid werk aan het begin van de cyclus is hier afhankelijk van. Voor de hoeveelheid werk aan het begin van een willekeurige cyclus zoeken we een verdeling, om van daaruit de andere benodigde variabelen af te leiden. Uit [4] blijkt dat de gezochte verdeling afgeleid wordt van een gamma-verdeling. Dit ga ik in het komende gedeelte uitleggen.

De hoeveelheid werk aan het begin van de cyclus, weergegeven als V , en daarmee de rijlengte en de lengte van de cyclus, stijgt naar ∞ wanneer ρ naar 1 stijgt. Daarom beschouwen we de geschaalde hoeveelheid werk $(1 - \rho)V_i$, die eindig blijft als $\rho \uparrow 1$. In [4] wordt een verdeling gevonden die door $(1 - \rho)V_i$ wordt gevolgd. Dit is een gammaverdeling.

De gammaverdeling ziet er als volgt uit:

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu t} \mu^\alpha t^{\alpha-1}, \quad t \geq 0, \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

waarbij α en μ parameters zijn.

Voor de gammaverdeling die wordt gevolgd door $(1 - \rho)V$, gelden de volgende parameters: $\alpha = 2\mathbb{E}[S]\delta/\sigma^2$ en $\mu = 2/\sigma^2$. Hierbij geldt $\delta = \hat{\rho}_1\hat{\rho}_2$ en $\sigma^2 = \mathbb{E}[B^2]/\mathbb{E}[B]$. Echter is de kans groter dat aankomst plaatsvindt in een cyclus die begon met veel werk in het systeem. Deze cyclus is namelijk lang en zodoende is de kans relatief groot in deze cyclus aan te komen. De stochast $(1 - \rho)\mathbf{V}$ die de hoeveelheid werk aan het begin van de cyclus bij aankomst aangeeft, is daarom Length-Biased ten opzichte van de stochast $(1 - \rho)V$. Dit houdt, ter herinnering, in dat:

$$f_{(1-\rho)\mathbf{V}}(x) = \frac{x f_{(1-\rho)V}(x)}{\mathbb{E}[(1 - \rho)V]}.$$

Voor een gamma-verdeelde stochast X geldt dat $\mathbb{E}[X] = \alpha/\mu$. De kansdichtheid van de length-biased gamma-verdeelde stochast \mathbf{X} leiden we als volgt af van zijn originele vorm:

$$f_{\mathbf{X}}(t) = f_X(t) * \frac{t}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu t} \mu^\alpha t^{\alpha-1} * \frac{t\mu}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} e^{-\mu t} \mu^{\alpha+1} t^\alpha$$

waarbij volgens partieel differentiëren geldt:

$$\alpha\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} \alpha t^{\alpha-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt$$

Uit dit blijkt dat de length-biased variable van een gamma-verdeelde stochast met parameters (α, μ) een gamma-verdeling volgt met parameters $(\alpha + 1, \mu)$. De stochast $(1 - \rho)\mathbf{V}$ is hierdoor verdeeld met parameters $\alpha = 2\mathbb{E}[S]\delta/\sigma^2 + 1$ en $\mu = 2/\sigma^2$.

De lengte van de cyclus C_i en die van de intervisit time I_i zijn direct af te leiden uit de hoeveelheid werk aan de begin van de cyclus. Uit het vloeistofmodel valt namelijk af te leiden dat $C_i = V/\delta$ en $I_i = (1 - \hat{\rho}_i)V/\delta$.

Voor een gamma-verdeelde stochast X met parameters (α, μ) en een constante a geldt dat aX gamma-verdeeld is met parameters $(\alpha, \mu/a)$. Hiermee kunnen verdelingen worden afgeleid voor de stochasten $(1 - \rho)\mathbf{C}_i$ en $(1 - \rho)\mathbf{I}_i$, respectievelijk de geschaalde length-biased cyclusbijlengte en de geschaalde length-biased intervisit time voor Q_i . $(1 - \rho)\mathbf{C}_i$ is gamma-verdeeld met parameters $\alpha = 2\mathbb{E}[S]\delta/\sigma^2 + 1$ en $\mu = 2\delta/\sigma^2$, en $(1 - \rho)\mathbf{I}_i$ is gamma-verdeeld met parameters $\alpha = 2\mathbb{E}[S]\delta/\sigma^2 + 1$ en $\mu = 2\delta/(\sigma^2(1 - \hat{\rho}_i))$.

Nu de geschaalde verdeling van de intervisit time $(1 - \rho)\mathbf{I}_i$ bekend is, is door het vloeistofmodel in te zien dat de geschaalde verdeling van de wachttijd $(1 - \rho)W_i$ het product is van $(1 - \rho)\mathbf{I}_i$ en een uniform verdeelde stochast U op het interval $[0, 1]$. Dit omdat de wachttijd uniform verdeeld is op het interval $[0, \mathbf{I}_i]$. Dus:

$$(1 - \rho)W_i \xrightarrow{d} U * (1 - \rho)\mathbf{I}_i, \quad \rho \uparrow 1$$

De stochasten $(1 - \rho)\mathbf{C}_i$ en $(1 - \rho)\mathbf{I}_i$ zijn in te vullen in het vloeistofmodel omdat er onafhankelijkheid is tussen deze stochasten en de uniform verdeelde stochasten die in het vloeistofmodel voorkomen.

4.2.3 Verwachte wachttijden

De verwachtingswaarde ω_i van $(1 - \rho)W_i$ als $\rho \uparrow 1$ is, door de zojuist genoemde onafhankelijkheid, gelijk aan het product van de verwachtingswaarden van U en $(1 - \rho)\mathbf{I}_i$ als $\rho \uparrow 1$. De verwachtingswaarde van $(1 - \rho)\mathbf{I}_i$ is $(1 - \hat{\rho}_i)(\sigma^2/(2\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) + \mathbb{E}[S])$, waardoor:

$$\omega_i = \mathbb{E}(U) * \mathbb{E}((1 - \rho)\mathbf{I}_i) = \frac{1}{2} * (1 - \hat{\rho}_i) \left(\frac{\sigma^2}{2\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2} + \mathbb{E}[S] \right) = (1 - \hat{\rho}_i) \left(\frac{\mathbb{E}[B_{res}]}{2\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2} + \frac{\mathbb{E}[S]}{2} \right).$$

Hieruit valt vrij eenvoudig de verwachtingswaarde voor de wachttijd onder Heavy Trafficcondities, $\mathbb{E}[W_i^{(HT)}]$, te bepalen:

$$\mathbb{E}[W_i^{(HT)}] = \frac{\omega_i}{1 - \rho} + o((1 - \rho)^{-1}), \quad \rho \uparrow 1.$$

4.3 Interpolatie

Met de resultaten van de verwachte wachttijden onder Light en Heavy Traffic-condities, is het nu zaak een approximatie te vinden die voor alle waarden van ρ goede benaderingen geeft voor de verwachte wachttijd.

We proberen een approximatie te vinden met behulp van interpolatie, die er als volgt uitziet:

$$\mathbb{E}[W_{i,app}] = \frac{K_{0,i} + K_{1,i}\rho + K_{2,i}\rho^2}{1 - \rho}$$

Hierbij zijn de parameters $K_{0,i}$, $K_{1,i}$ en $K_{2,i}$ afhankelijk van de strategie die toegepast wordt en de parameters van het systeem, zoals B , S , $\hat{\rho}_1$ en $\hat{\rho}_2$. Nu gaan we uitdrukkingen bepalen voor $K_{0,i}$, $K_{1,i}$ en $K_{2,i}$.

$K_{0,i}$

Stel $\rho = 0$. Invullen in $\mathbb{E}[W_{i,app}]$ leert ons dat

$$\mathbb{E}[W_{i,app}]|_{\rho=0} = K_{0,i}.$$

Omdat $\rho = 0$ een situatie is die volledig onder Light Traffic-condities valt, geldt:

$$\mathbb{E}[W_{i,app}]|_{\rho=0} = \mathbb{E}[W_i^{(LT)}]|_{\rho=0} = \mathbb{E}[S_{res}],$$

waaruit we concluderen dat

$$K_{0,i} = \mathbb{E}[S_{res}]$$

$K_{1,i}$

Voor het bepalen van $K_{1,i}$ is de uitdrukking van $\frac{d}{d\rho}\mathbb{E}[W_{i,app}]$ benodigd. Er geldt:

$$\frac{K_{0,i} + K_{1,i}\rho + K_{2,i}\rho^2}{1 - \rho} = (K_{0,i} + K_{1,i}\rho + K_{2,i}\rho^2)(1 + \rho + \rho^2 + O(\rho^3))$$

waardoor

$$\mathbb{E}[W_{i,app}] = K_{0,i} + (K_{0,i} + K_{1,i})\rho + (K_{0,i} + K_{1,i} + K_{2,i})\rho^2 + O(\rho^3)$$

en

$$\frac{d}{d\rho}\mathbb{E}[W_{i,app}] = (K_{0,i} + K_{1,i}) + 2(K_{0,i} + K_{1,i} + K_{2,i})\rho + O(\rho^2).$$

Deze uitdrukking stellen we gelijk aan $\frac{d}{d\rho}\mathbb{E}[W_i^{(LT)}]$, welke er als volgt uitziet:

$$\frac{d}{d\rho}\mathbb{E}[W_i^{(LT)}] = (1 + \hat{\rho}_i)\mathbb{E}[S_{res}] + \mathbb{E}[B_{res}] - \hat{\rho}_i\mathbb{E}[S] - \frac{1}{\mathbb{E}[S]} \left(\hat{\rho}_i \text{Var}[S_i] + \text{Var}[S_{i+1}] \right) + O(\rho).$$

Gelijkstellen en $\rho = 0$ invullen geeft:

$$(K_{0,i} + K_{1,i}) = (1 + \hat{\rho}_i)\mathbb{E}[S_{res}] + \mathbb{E}[B_{res}] - \hat{\rho}_i\mathbb{E}[S] - \frac{1}{\mathbb{E}[S]} \left(\hat{\rho}_i \text{Var}[S_i] + \text{Var}[S_{i+1}] \right).$$

Hier kunnen we, omdat $K_{0,i} = \mathbb{E}[S_{res}]$, de waarde van $K_{1,i}$ uit afleiden.

$$K_{1,i} = \hat{\rho}_i(\mathbb{E}[S_{res}] - \mathbb{E}[S]) + \mathbb{E}[B_{res}] - \frac{1}{\mathbb{E}[S]} \left(\hat{\rho}_i \text{Var}[S_i] + \text{Var}[S_{i+1}] \right).$$

$K_{2,i}$

We kiezen $K_{2,i}$ zo dat de approximatie in de limiet $\rho \uparrow 1$ realistisch is. Omdat dit duidelijk over Heavy Traffic-condities gaat, stellen we de volgende gelijkheid:

$$\mathbb{E}[W_{i,app}]|_{\rho=1} = \mathbb{E}[W_i^{(HT)}]|_{\rho=1}.$$

Deze gelijkheid is niet bruikbaar, doordat de limiet van $\mathbb{E}[W_i^{(HT)}]$ bij $\rho \uparrow 1$ oneindig is. Wel bruikbaar is de volgende gelijkheid:

$$\left(\mathbb{E}[W_{i,app}](1 - \rho)\right)|_{\rho=1} = \left(\mathbb{E}[W_i^{(HT)}](1 - \rho)\right)|_{\rho=1}.$$

Deze gelijkheid kunnen we ook als volgt schrijven:

$$K_{0,i} + K_{1,i} + K_{2,i} = \omega_i, \text{ dus } K_{2,i} = \omega_i - K_{0,i} - K_{1,i}$$

$K_{2,i}$ is hieruit te bepalen:

$$K_{2,i} = (1 - \hat{\rho}_i) \left(\frac{\mathbb{E}[B_{res}]}{2\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2} + \frac{\mathbb{E}[S]}{2} \right) - \hat{\rho}_i (\mathbb{E}[S_{res}] - \mathbb{E}[S]) - \mathbb{E}[B_{res}] + \frac{1}{\mathbb{E}[S]} \left(\hat{\rho}_i \text{Var}[S_i] + \text{Var}[S_{i+1}] \right) - \mathbb{E}[S_{res}]$$

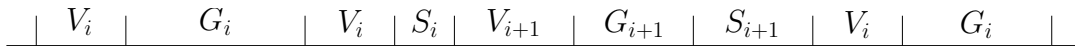
Resultaat

Uit bovenstaande bepalingen voor $K_{0,i}$, $K_{1,i}$ en $K_{2,i}$ volgt een approximatie voor de verwachte wachttijd voor alle waarden van ρ tussen 0 en 1, in het geval de strategie ‘‘Blijf Switchen’’ wordt toegepast. In het hoofdstuk 8 vergelijken we deze approximatie met simulatieresultaten.

5 Stay green

5.1 Light Traffic

Stay green is de strategie waarbij het systeem, als het na de bediening van een klant leeg is, groen licht blijft geven aan de richting waar de laatste auto vandaan is gekomen. Het licht blijft dus, na het legen van Q_i , op groen staan voor Q_i als Q_{i+1} leeg is. Pas als het systeem in een situatie komt waarin het licht in Q_i op groen staat, er geen verkeer in Q_i is en wel verkeer in Q_{i+1} , switcht het systeem over naar Q_{i+1} . Hieronder een voorbeeld van een tijdsverloop zoals dat bij Stay green mogelijk is:



Figuur 7: Weergave Stay green

Aankomst van een auto in Q_i kan plaatsvinden tijdens zes verschillende perioden. Bijzonder is dat we onderscheid maken tussen twee soorten groen licht bij beide rijen: er vinden bedieningen plaats of er vinden geen bedieningen plaats. Dit laatste kan alleen als het systeem helemaal leeg is. Deze zes perioden worden bekeken:

- V_i , de bediening van auto’s in Q_i .

- V_{i+1} , de bediening van auto's in Q_{i+1} .
- S_i , de switchover van Q_i naar Q_{i+1} .
- S_{i+1} , de switchover van Q_{i+1} naar Q_i .
- G_i , de periode dat het licht op groen staat in Q_i , maar het systeem leeg is.
- G_{i+1} , de periode dat het licht op groen staat in Q_{i+1} , maar het systeem leeg is.

De uitdrukking $\mathbb{E}[W_i^{LT}]$ ziet er nu als volgt uit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_i^{(LT)}] = & \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_i)\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_i] \\
& + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_{i+1})\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_{i+1}] \\
& + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_i)\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_i] \\
& + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_{i+1})\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_{i+1}] \\
& + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } G_i)\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } G_i] \\
& + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } G_{i+1})\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } G_{i+1}]
\end{aligned}$$

Aankomst tijdens V_i

De kans dat het systeem een auto in Q_i aan het bedienen is, is gelijk aan de verkeersintensiteit in Q_i . Dit betekent dus dat:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_i) = \rho_i.$$

Vanwege het feit dat bovenstaande term $O(\rho)$ is, hoeven we in de uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_i]$ geen rekening meer te houden met $O(\rho)$ termen. Er hoeft dus geen rekening gehouden te worden met andere auto's dan de auto die bij aankomst werd bediend.

Als de bediening van deze auto voorbij is, kan de aangekomen auto direct worden bediend. Er hoeft dus puur gewacht te worden op de residuele bedieningstijd van de al aanwezige auto. Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_i] = \mathbb{E}[B_{i,res}].$$

Aankomst tijdens V_{i+1}

De kans dat het systeem een auto in Q_{i+1} aan het bedienen is, is gelijk aan de verkeersintensiteit in Q_{i+1} . Dit betekent dus dat:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_{i+1}) = \rho_{i+1}.$$

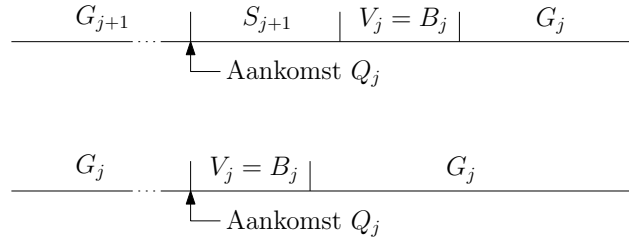
Vanwege het feit dat bovenstaande term $O(\rho)$ is, hoeven we in de uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_{i+1}]$ geen rekening meer te houden met $O(\rho)$ termen. Er hoeft dus geen rekening gehouden te worden met andere auto's dan de auto die bij aankomst werd bediend.

Als de bediening van deze auto voorbij is, zal het systeem eerst nog van Q_{i+1} naar Q_i moeten switchen. Er moet dus gewacht worden op de residuele bedieningstijd van de aanwezige auto, en de switchover naar de andere rij. Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } V_{i+1}] = \mathbb{E}[B_{i+1, res}] + \mathbb{E}[S_{i+1}].$$

Aankomst tijdens S_{i+1}

De kans dat een aankomst plaatsvindt tijdens de switchover van Q_{i+1} naar Q_i , is iets lastiger te bepalen. Er hoeft, volgens de Light Traffic aannames, maar met één auto in het systeem rekening gehouden te worden. Als deze auto arriveert in Q_j zijn er twee situaties mogelijk: deze auto arriveert in de situatie G_j of de situatie G_{j+1} . Voor elke andere situatie moet rekening gehouden worden met een tweede auto, welke we buiten beschouwing laten. De twee situaties zijn als volgt af te beelden:



Figuur 8: Weergave Stay green

Aankomst tijdens S_{i+1} komt dus alleen voor als de al aanwezige auto in Q_i arriveerde, terwijl het systeem zich in situatie G_{i+1} bevond. We weten de kans op aankomst in V_i (namelijk ρ_i). De kans dat het systeem zich eerst in G_{i+1} bevond is gelijk aan de kans dat de laatste bediening plaatsvond in Q_{i+1} , deze is gelijk aan $\hat{\rho}_{i+1}$. Hieruit halen we de kans dat een aankomst plaatsvindt tijdens V_i , aangenomen dat het systeem zich eerst in G_{i+1} bevond: $\hat{\rho}_{i+1}\rho_i$.

Uit hetzelfde plaatje kun je opmaken dat S_{i+1} een factor $\mathbb{E}[S_{i+1}]/\mathbb{E}[B_i]$ groter is dan V_i . Dit kun je beweren doordat beide uitdrukkingen deterministisch zijn. Door het gebruik van PASTA kunnen we hieruit opmaken dat de kans op aankomst in S_{i+1} een factor $\mathbb{E}[S_{i+1}]/\mathbb{E}[B_i]$ groter is dan de kans op aankomst in V_i , aangenomen dat de aankomst van de in V_i bediende auto in G_{i+1} plaatsvond. Er geldt dus:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_{i+1}) = \hat{\rho}_{i+1} * \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]} \rho_i.$$

Ook hier hoeft bij $\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i+1}]$ geen rekening meer te worden gehouden met $O(\rho)$ termen.

Na aankomst moet eerst uiteraard worden gewacht tot S_{i+1} voorbij is. Daarna moet nog worden gewacht op de auto die reeds in het systeem zat. Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i+1}] = \mathbb{E}[S_{i+1, res}] + \mathbb{E}[B_i].$$

Aankomst tijdens S_i

De kans dat een aankomst plaatsvindt tijdens de switchover van Q_i naar Q_{i+1} is op dezelfde manier te bepalen als de kans op S_{i+1} . De switchover vindt alleen plaats als er een auto in Q_{i+1} is gearriveerd en de laatste bediening in Q_i plaatsvond. Dus:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_i) = \hat{\rho}_i * \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]} \rho_{i+1}.$$

Eerst moet gewacht worden tot S_i voorbij is. Daarna wordt de auto in Q_{i+1} bediend, waarna het systeem terug moet switchen naar Q_i . Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_i] = \mathbb{E}[S_{i,res}] + \mathbb{E}[B_{i+1}] + \mathbb{E}[S_{i+1}].$$

Aankomst tijdens G_{i+1}

De kans dat een aankomst plaatsvindt tijdens G_i of G_{i+1} is te bepalen door de kansen op de andere situaties van 1 af te trekken. De kans dat het verkeerslicht vervolgens in Q_{i+1} op groen staat bepaal je door te vermenigvuldigen met de kans dat de laatste bediening in Q_{i+1} plaatsvond, welke $\hat{\rho}_{i+1}$ is. Dus:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } G_{i+1}) = \hat{\rho}_{i+1}(1 - \rho - \hat{\rho}_{i+1} * \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]} \rho_i - \hat{\rho}_i * \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]} \rho_{i+1}).$$

Bij aankomst gaat het systeem direct switchen naar Q_i , waarna de bediening gelijk plaatsvindt. Hoewel we hier wel rekening moeten houden met $O(\rho)$ termen, zijn deze in de uitdrukking van $\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } G_{i+1}]$ niet aanwezig. De auto's die na de aankomst van de behandelde auto aankomen hebben namelijk geen invloed meer op de wachttijd van deze auto. Dus

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } G_{i+1}] = \mathbb{E}[S_{i+1}]$$

Aankomst tijdens G_i

De kans dat een aankomst in G_i plaatsvindt is, analoog aan het geval G_{i+1} , gelijk aan:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } G_i) = \hat{\rho}_i(1 - \rho - \hat{\rho}_{i+1} * \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]} \rho_i - \hat{\rho}_i * \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]} \rho_{i+1}).$$

Bij aankomst kan de auto direct doorrijden. Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } G_i] = 0$$

Uitdrukking

We kiezen $\delta = \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2$. De uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_i^{LT}]$ in het geval Stay green ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_i^{LT}] = & \rho \mathbb{E}[B_{res}] + \rho_{i+1} \mathbb{E}[S_i] + \rho \delta \mathbb{E}[S] + \rho \delta \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]} \mathbb{E}[S_{i+1,res}] \\ & + \rho \delta \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]} (\mathbb{E}[S_{i,res}] + \mathbb{E}[S_{i+1}]) + \hat{\rho}_{i+1} \mathbb{E}[S_{i+1}] \\ & - \rho_{i+1} \delta \left(\frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]} + \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]} \right) \mathbb{E}[S_{i+1}]. \end{aligned}$$

5.2 Interpolatie

We proberen een approximatie te vinden met behulp van de in hoofdstuk 4 gevonden approximatiemethode. Deze ziet er als volgt uit:

$$\mathbb{E}[W_{i,app}] = \frac{K_{0,i} + K_{1,i}\rho + K_{2,i}\rho^2}{1 - \rho}.$$

De manier waarop $K_{0,i}$, $K_{1,i}$ en $K_{2,i}$ van de LT- en HT-uitdrukking afhangen zijn in hoofdstuk 4 reeds behandeld. Ik ga dus alleen nog deze gevonden uitdrukkingen invullen.

$K_{0,i}$

Er geldt

$$K_{0,i} = \mathbb{E}[W_{i,app}]|_{\rho=0} = \mathbb{E}[W_i^{(LT)}]|_{\rho=0} = \hat{\rho}_{i+1}\mathbb{E}[S_{i+1}],$$

waaruit we concluderen dat

$$K_{0,i} = \hat{\rho}_{i+1}\mathbb{E}[S_{i+1}].$$

$K_{1,i}$

Er geldt

$$K_{1,i} = \frac{d}{d\rho}\mathbb{E}[W_{i,app}]|_{\rho=0} - K_{0,i}.$$

Hieruit halen we dat:

$$\begin{aligned} K_{1,i} = & \mathbb{E}[B_{res}] + \delta\mathbb{E}[S] + \delta\frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]}\mathbb{E}[S_{i+1,res}] \\ & + \delta\frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]}\left(\mathbb{E}[S_{i,res}] + \mathbb{E}[S_{i+1}]\right) + \hat{\rho}_{i+1}\delta\left(\frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]} + \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]}\right)\mathbb{E}[S_{i+1}] - \hat{\rho}_{i+1}\mathbb{E}[S_{i+1}]. \end{aligned}$$

$K_{2,i}$

Er geldt

$$K_{2,i} = \omega_i - K_{0,i} - K_{1,i}.$$

Hieruit concluderen we dat:

$$\begin{aligned} K_{2,i} = & (1 - \hat{\rho}_i)\left(\frac{\mathbb{E}[B_{res}]}{2\delta} + \frac{\mathbb{E}[S]}{2}\right) - \mathbb{E}[B_{res}] - \hat{\rho}_{i+1}\mathbb{E}[S_i] - \delta\mathbb{E}[S] - \delta\frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]}\mathbb{E}[S_{i+1,res}] \\ & - \delta\frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]}\left(\mathbb{E}[S_{i,res}] + \mathbb{E}[S_{i+1}]\right) - \hat{\rho}_{i+1}\delta\left(\frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_i]} + \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]}\right)\mathbb{E}[S_{i+1}] \end{aligned}$$

Resultaat

Uit bovenstaande bepalingen voor $K_{0,i}$, $K_{1,i}$ en $K_{2,i}$ volgt een approximatie voor de verwachte wachttijd voor alle waarden van ρ tussen 0 en 1, in het geval de strategie ‘‘Stay green’’ wordt toegepast. In het hoofdstuk 8 vergelijken we deze approximatie met simulatieresultaten.

6 All red

6.1 Light Traffic

All red is de strategie waarbij, als het systeem leeg is, het systeem switcht naar een situatie waarin beide lichten op rood staan. Na een bediening in Q_i waarbij het systeem leeg achterblijft, gaat het systeem switchen naar een lege toestand L . Deze switchover $S_{i,L}$ volgt dezelfde verdeling als S_i . Als een klant in Q_j arriveert tijdens deze switchover, maakt het systeem de switch af en gaat het daarna bedienen in Q_j . In het geval $Q_j = Q_i$ wordt de switchover afgemaakt, ondanks dat de klant in praktijk zonder problemen bediend kan worden.

Als het systeem zich in situatie L bevindt, en er komt een auto aan in Q_i , gaat het systeem direct Q_i bedienen.

Aankomst is mogelijk tijdens 7 verschillende perioden:

- V_i , de bediening van auto's in Q_i .
- V_{i+1} , de bediening van auto's in Q_{i+1} .
- S_i , de switchover van Q_i naar Q_{i+1} .
- S_{i+1} , de switchover van Q_{i+1} naar Q_i .
- $S_{i,L}$, de switchover van Q_i naar een lege toestand.
- $S_{i+1,L}$, de switchover van Q_{i+1} naar een lege toestand.
- L , de lege toestand.

De uitdrukking $\mathbb{E}[W_i^{LT}]$ ziet er nu als volgt uit:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_i^{(LT)}] = & \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_i)\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_i] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_{i+1})\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_{i+1}] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_i)\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_i] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_{i+1})\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_{i+1}] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_{i,L})\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_{i,L}] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_{i+1,L})\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_{i+1,L}] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } L)\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } L]\end{aligned}$$

Aankomst tijdens V_i

De kans dat het systeem een auto in Q_i aan het bedienen is, is gelijk aan de verkeersintensiteit in Q_i . Dit betekent dus dat:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_i) = \rho_i.$$

Vanwege het feit dat bovenstaande term $O(\rho)$ is, hoeven we in de uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_i^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_i]$ geen rekening meer te houden met $O(\rho)$ termen. Er hoeft dus

geen rekening gehouden te worden met andere auto's dan de auto die bij aankomst werd bediend.

Als de bediening van deze auto voorbij is, kan de aangekomen auto direct worden bediend. Er hoeft dus puur gewacht te worden op de residuele bedieningstijd van de al aanwezige auto. Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } V_i] = \mathbb{E}[B_{i,res}].$$

Aankomst tijdens V_{i+1}

De kans dat het systeem een auto in Q_{i+1} aan het bedienen is, is gelijk aan de verkeersintensiteit in Q_{i+1} . Dit betekent dus dat:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_{i+1}) = \rho_{i+1}.$$

Vanwege het feit dat bovenstaande term $O(\rho)$ is, hoeven we in de uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } V_i]$ geen rekening meer te houden met $O(\rho)$ termen. Er hoeft dus geen rekening gehouden te worden met andere auto's dan de auto die bij aankomst werd bediend.

Als de bediening van deze auto voorbij is, zal het systeem eerst nog van Q_{i+1} naar Q_i moeten switchen. Er moet dus gewacht worden op de residuele bedieningstijd van de aanwezige auto, en de switchover naar de andere rij. Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } V_i] = \mathbb{E}[B_{i+1,res}] + \mathbb{E}[S_{i+1}].$$

Aankomst tijdens S_{i+1} of S_i

Aankomst tijdens S_{i+1} komt voor als de switchover na de laatste bediening nog bezig is, en

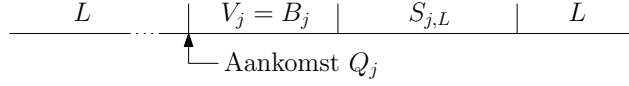
- deze laatste bediening in Q_{i+1} plaatsvond, waarbij er tijdens deze bediening of de opvolgende switchover een aankomst in Q_i plaatsvond.
- deze laatste bediening in Q_i plaatsvond, waarbij er tijdens de opvolgende switchover een aankomst in Q_i plaatsvond.

De kans op deze beide taferelen is een term van $O(\rho^2)$, waardoor je deze mogelijkheden niet hoeft te beschouwen.

Voor aankomst tijdens S_i geldt hetzelfde, de redenering is analoog.

Aankomst tijdens $S_{i+1,L}$

Aankomst tijdens $S_{i+1,L}$ komt voor als de laatste bediening in Q_{i+1} plaatsvond, en de switchover naar het lege systeem nog bezig is. Deze situatie is als volgt grafisch weer te geven:



Figuur 9: Weergave All red

De kans op aankomst tijdens V_{i+1} is bekend, deze is ρ_{i+1} . Uit het plaatje kun je opmaken dat $S_{i+1,L}$ een factor $\mathbb{E}[S_{i+1}]/\mathbb{E}[B_{i+1}]$ groter is dan V_{i+1} . Dit kun je beweren doordat beide uitdrukkingen deterministisch zijn. Door het gebruik van PASTA kunnen we hieruit opmaken dat de kans op aankomst in $S_{i+1,L}$ een factor $\mathbb{E}[S_{i+1}]/\mathbb{E}[B_{i+1}]$ groter is dan de kans op aankomst in V_i .

Voor de kans geldt:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_{i+1,L}) = \rho_{i+1} \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]}.$$

Omdat de kans op dit tafereel een $O(\rho)$ term is, hoeven we voor de term $\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i+1,L}]$ geen $O(\rho)$ termen te beschouwen.

Na aankomst hoeft alleen de residuele switchover afgewacht te worden, daarna kan het aangekomen voertuig bediend worden. Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i+1,L}] = \mathbb{E}[S_{i+1, \text{res}}]$$

Aankomst tijdens $S_{i,L}$

Aankomst tijdens $S_{i,L}$ komt voor als de laatste bediening in Q_i plaatsvond, en de switchover naar het lege systeem nog bezig is. Voor de kans geldt, analoog aan het geval $S_{i+1,L}$, dat:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_{i,L}) = \rho_i \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_i]}.$$

Omdat de kans op dit tafereel een $O(\rho)$ term is, hoeven we voor de term $\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i,L}]$ geen $O(\rho)$ termen te beschouwen.

Na aankomst hoeft alleen de residuele switchover afgewacht te worden, daarna kan het aangekomen voertuig bediend worden. Dus:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_{i,L}] = \mathbb{E}[S_{i, \text{res}}]$$

Aankomst tijdens L

De kans op aankomst tijdens L is te bepalen door de kans op de andere events van 1 af te halen. Bij aankomst kan er altijd direct worden doorgereden, waardoor dus geldt:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT} | \text{aankomst tijdens } L] = 0$$

Hierdoor hoeft deze term verder niet in beschouwing genomen te worden.

Uitdrukking

De uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_i^{LT}]$ in het geval All red ziet er als volgt uit:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT}] = \rho \mathbb{E}[B_{res}] + \rho_{i+1} \mathbb{E}[S_i] + \rho_{i+1} \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]} \mathbb{E}[S_{i+1, res}] + \rho_i \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_i]} \mathbb{E}[S_{i, res}].$$

6.2 Interpolatie

We proberen een approximatie te vinden met behulp van de in hoofdstuk 4 gevonden approximatiemethode. Deze ziet er als volgt uit:

$$\mathbb{E}[W_{i, app}] = \frac{K_{0,i} + K_{1,i}\rho + K_{2,i}\rho^2}{1 - \rho}.$$

De manier waarop $K_{0,i}$, $K_{1,i}$ en $K_{2,i}$ van de LT- en HT-uitdrukking afhangen zijn in hoofdstuk 4 reeds behandeld. Ik ga dus alleen nog deze gevonden uitdrukkingen invullen.

$K_{0,i}$

Er geldt

$$K_{0,i} = \mathbb{E}[W_{i, app}]|_{\rho=0} = \mathbb{E}[W_i^{(LT)}]|_{\rho=0} = 0,$$

waaruit we concluderen dat

$$K_{0,i} = 0.$$

$K_{1,i}$

Er geldt

$$K_{1,i} = \frac{d}{d\rho} \mathbb{E}[W_{i, app}]|_{\rho=0} - K_{0,i}.$$

Hieruit halen we dat:

$$K_{1,i} = \mathbb{E}[B_{res}] + \hat{\rho}_{i+1} \mathbb{E}[S_i] + \hat{\rho}_{i+1} \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]} \mathbb{E}[S_{i+1, res}] + \hat{\rho}_i \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_i]} \mathbb{E}[S_{i, res}].$$

$K_{2,i}$

Er geldt

$$K_{2,i} = \omega_i - K_{0,i} - K_{1,i}.$$

Hieruit concluderen we dat:

$$\begin{aligned} K_{2,i} = & (1 - \hat{\rho}_i) \left(\frac{\mathbb{E}[B_{res}]}{2\hat{\rho}_i\hat{\rho}_{i+1}} + \frac{\mathbb{E}[S]}{2} \right) \\ & - \mathbb{E}[B_{res}] - \hat{\rho}_{i+1} \mathbb{E}[S_i] - \hat{\rho}_{i+1} \frac{\mathbb{E}[S_{i+1}]}{\mathbb{E}[B_{i+1}]} \mathbb{E}[S_{i+1, res}] - \hat{\rho}_i \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[B_i]} \mathbb{E}[S_{i, res}]. \end{aligned}$$

Resultaat

Uit bovenstaande bepalingen voor $K_{0,i}$, $K_{1,i}$ en $K_{2,i}$ volgt een approximatie voor de verwachte wachttijd voor alle waarden van ρ tussen 0 en 1, in het geval de strategie “All red” wordt toegepast. In het hoofdstuk 8 vergelijken we deze approximatie met simulatieresultaten.

7 Mainstream green

7.1 Light Traffic

Mainstream green is de strategie waarbij het systeem, wanneer het leeg is, de richting van waaruit het meeste verkeer aankomt groen licht geeft. Deze rij noemen we Q_m , de andere rij Q_l . Hierbij geldt:

$$\rho_m \geq \rho_l.$$

Als het systeem leeg is nadat het Q_m heeft bediend, blijft het licht op groen staan in Q_m . De situatie waarin het licht in Q_m op groen staat maar het systeem leeg is, noemen we G_m .

Als het op een bepaald moment voorkomt dat het systeem in situatie G_m zit, Q_m leeg is en Q_l niet leeg is, switcht het systeem van Q_m naar Q_l . Nadat Q_l leeg is, switcht het systeem altijd terug naar Q_m . Als het systeem dan nog altijd leeg is komt het systeem weer in de situatie G_m terecht.

Als een leeg systeem zich in S_l bevindt en er komt een auto in Q_l aan, maakt het systeem altijd de switchover naar Q_m af, om daarna (na eventuele bedieningen in Q_m) terug te switchen naar Q_l .

In tegenstelling tot de drie voorgaande strategieën zijn de uitdrukkingen van de verwachte wachttijd verschillend voor de twee rijen. De kansen op aankomst tijdens de verschillende periodes zijn wel gelijk.

Aankomst van een auto in Q_m of Q_l kan plaatsvinden tijdens vijf verschillende periodes:

- V_m , de bediening van auto's in Q_m .
- V_l , de bediening van auto's in Q_l .
- S_m , de switchover van Q_m naar Q_l .
- S_l , de switchover van Q_l naar Q_m .
- G_m , de periode dat het licht op groen staat in Q_m , maar het systeem leeg is.

De uitdrukking $\mathbb{E}[W_i^{LT}]$ ziet er nu als volgt uit:

$$\mathbb{E}[W_i^{LT}] = \begin{cases} \mathbb{E}[W_m^{LT}] & \text{als } \hat{\rho}_i > 1/2 \\ \mathbb{E}[W_l^{LT}] & \text{als } \hat{\rho}_i < 1/2 \end{cases},$$

waarbij $\mathbb{E}[W_m^{LT}]$ de uitdrukking is die voor auto's in de mainstream geldt, en $\mathbb{E}[W_l^{LT}]$ de uitdrukking die voor de auto's in de andere rij geldt. Beide uitdrukkingen zijn op dezelfde

manier opgebouwd, namelijk als volgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_m^{(LT)}] = & \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_m)\mathbb{E}[W_m^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_m] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_l)\mathbb{E}[W_m^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_l] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_m)\mathbb{E}[W_m^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_m] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_l)\mathbb{E}[W_m^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_l] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } G_m)\mathbb{E}[W_m^{LT}|\text{aankomst tijdens } G_m]\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_l^{(LT)}] = & \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_m)\mathbb{E}[W_l^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_m] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_l)\mathbb{E}[W_l^{LT}|\text{aankomst tijdens } S_l] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_m)\mathbb{E}[W_l^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_m] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_l)\mathbb{E}[W_l^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_l] \\ & + \mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } G_m)\mathbb{E}[W_l^{LT}|\text{aankomst tijdens } G_m]\end{aligned}$$

Aankomst tijdens V_m

De kans dat het systeem een auto in Q_m aan het bedienen is, is gelijk aan de verkeersintensiteit in Q_m . Dit betekent dus dat:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_m) = \rho_m.$$

Vanwege het feit dat bovenstaande term $O(\rho)$ is, hoeven we in de uitdrukkingen voor $\mathbb{E}[W_m^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_m]$ en $\mathbb{E}[W_l^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_m]$ geen rekening meer te houden met $O(\rho)$ termen. Er hoeft dus geen rekening gehouden te worden met andere auto's dan de auto die bij aankomst werd bediend.

Als de aankomst in Q_m plaatsvindt hoeft enkel gewacht te worden op de residuele bedieningstijd van de aanwezige auto. Er geldt dus:

$$\mathbb{E}[W_m^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_m] = \mathbb{E}[B_{m,res}].$$

Als de aankomst in Q_l plaatsvindt dient het systeem eerst de bediening in Q_m af te maken, waarna naar Q_l gewicht moet worden. Er geldt dus:

$$\mathbb{E}[W_l^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_m] = \mathbb{E}[B_{m,res}] + \mathbb{E}[S_m].$$

Aankomst tijdens V_l

De kans dat het systeem een auto in Q_l aan het bedienen is, is gelijk aan de verkeersintensiteit in Q_l . Dit betekent dus dat:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } V_l) = \rho_l.$$

Vanwege het feit dat bovenstaande term $O(\rho)$ is, hoeven we in de uitdrukkingen voor $\mathbb{E}[W_m^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_l]$ en $\mathbb{E}[W_l^{LT}|\text{aankomst tijdens } V_l]$ geen rekening meer te houden

met $O(\rho)$ termen. Er hoeft dus geen rekening gehouden te worden met andere auto's dan de auto die bij aankomst werd bediend.

Als de aankomst in Q_m plaatsvindt dient het systeem eerst de bediening in Q_l af te maken, waarna naar Q_m geswitcht moet worden. Er geldt dus:

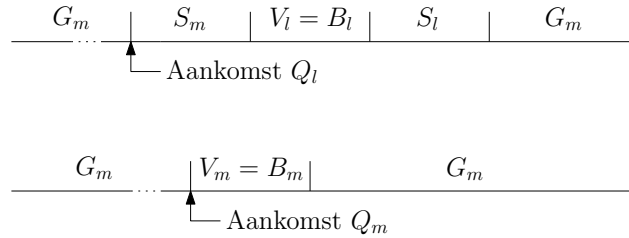
$$\mathbb{E}[W_m^{LT} | \text{aankomst tijdens } V_l] = \mathbb{E}[B_{l,res}] + \mathbb{E}[S_l].$$

Als de aankomst in Q_l plaatsvindt hoeft enkel gewacht te worden op de residuele bedieningstijd van de aanwezige auto. Er geldt dus:

$$\mathbb{E}[W_l^{LT} | \text{aankomst tijdens } V_l] = \mathbb{E}[B_{l,res}].$$

Aankomst tijdens S_l

Ook bij Mainstream green kan een aankomst tijdens een switchover enkel voorkomen als er in de periode vlak voor deze aankomst al een aankomst of een bediening heeft plaatsgevonden. Aangezien we rekening houden met hoogstens één auto, zijn er twee situaties mogelijk: deze aankomst of bediening vond plaats in Q_m of in Q_l . Deze twee situaties zijn als volgt af te beelden:



Figuur 10: Weergave Mainstream green

Hieruit blijkt dat zowel S_l als S_m enkel voorkomen als de eerder gearriveerde of bediende klant in Q_l gearriveerd of bediend is. We kennen de kans op aankomst tijdens V_l , deze is ρ_l . We zien dat S_l een factor $\mathbb{E}[S_l]/\mathbb{E}[B_l]$ groter is dan V_l , wat we kunnen aannemen doordat zowel S_l als V_l deterministisch zijn. Door gebruik te maken van PASTA kunnen we hieruit de kans op aankomst tijdens S_l concluderen. Deze is:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_l) = \frac{\mathbb{E}[S_l]}{\mathbb{E}[B_l]} \rho_l.$$

Doordat deze term $O(\rho)$ is hoeven we geen rekening te houden met overig verkeer in het systeem.

Als de aankomst in Q_m plaatsvindt hoeft enkel de residuele switchover te worden afgewacht, dus:

$$\mathbb{E}[W_m^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_l] = \mathbb{E}[S_{l,res}].$$

Als de aankomst in Q_l plaatsvindt moet de residuele switchover worden afgewacht, waarna het systeem gelijk weer terugswitcht naar Q_l . Dus:

$$\mathbb{E}[W_l^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_l] = \mathbb{E}[S_{l,res}] + \mathbb{E}[S_m].$$

Aankomst tijdens S_m

In de afbeelding bij de bepaling van de kans op S_l zien we dat S_m een factor $\mathbb{E}[S_m]/\mathbb{E}[B_l]$ groter is dan V_l , wat we weer kunnen aannemen doordat beide termen deterministisch zijn. Op analoge wijze als bij de bepaling van de kans op S_l , is de kans op S_m als volgt:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } S_m) = \frac{\mathbb{E}[S_m]}{\mathbb{E}[B_l]} \rho_l.$$

Ook deze term is $O(\rho)$, we hoeven dus geen rekening te houden met overig verkeer in het systeem.

Als de aankomst in Q_m plaatsvindt moet eerst de residuele switchovertijd worden afgewacht. Daarna wordt de auto in Q_l bediend, waarna weer teruggeswitcht wordt naar Q_m . Er geldt dus:

$$\mathbb{E}[W_m^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_m] = \mathbb{E}[S_{m,res}] + \mathbb{E}[B_l] + \mathbb{E}[S_l].$$

Als de aankomst in Q_l plaatsvindt moet de residuele switchovertijd worden afgewacht, en daarna de bediening van de reeds aanwezige auto in Q_l . Er geldt dus:

$$\mathbb{E}[W_l^{LT} | \text{aankomst tijdens } S_m] = \mathbb{E}[S_{m,res}] + \mathbb{E}[B_l].$$

Aankomst tijdens G_m

Een aankomst in G_m komt voor als er op dat moment geen bediening is, en er ook niet geswitcht wordt voor een bediening in Q_l . De kans hierop is te bepalen door de kansen op de andere events van 1 af te trekken. Dus:

$$\mathbb{P}(\text{aankomst tijdens } G_m) = 1 - \rho - \frac{\mathbb{E}[S]}{\mathbb{E}[B_l]} \rho_l.$$

Deze term is niet $O(\rho)$, waardoor we wel rekening moeten houden met overig verkeer in het systeem. We zullen echter zien dat dit niet nodig is.

Als de aankomst in Q_m plaatsvindt kan direct worden doorgereden, dus:

$$\mathbb{E}[W_m^{LT} | \text{aankomst tijdens } G_m] = 0.$$

Als de aankomst in Q_l plaatsvindt zal het systeem eerst gaan switchen naar Q_l . Daarna is de aangekomen auto direct aan de beurt, het systeem was namelijk leeg bij aankomst. Dus:

$$\mathbb{E}[W_l^{LT} | \text{aankomst tijdens } G_m] = \mathbb{E}[S_m].$$

Uitdrukking Q_m

De uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_m^{LT}]$ in het geval Mainstream green ziet er als volgt uit:

$$\mathbb{E}[W_m^{LT}] = \rho \mathbb{E}[B_{res}] + \rho_l \mathbb{E}[S] + \rho_l \frac{\mathbb{E}[S_l]}{\mathbb{E}[B_l]} \mathbb{E}[S_{l,res}] + \rho_l \frac{\mathbb{E}[S_m]}{\mathbb{E}[B_l]} (\mathbb{E}[S_{m,res}] + \mathbb{E}[S_l]).$$

Uitdrukking Q_l

De uitdrukking voor $\mathbb{E}[W_l^{LT}]$ in het geval Mainstream green ziet er als volgt uit:

$$\mathbb{E}[W_l^{LT}] = \rho \mathbb{E}[B_{res}] + \rho_l \frac{\mathbb{E}[S_l]}{\mathbb{E}[B_l]} \mathbb{E}[S_{l,res}] - \rho_l \frac{\mathbb{E}[S_m]}{\mathbb{E}[B_l]} (\mathbb{E}[S_m] - \mathbb{E}[S_{m,res}]) + \mathbb{E}[S_m].$$

7.2 Interpolatie Q_m

We proberen een approximatie te vinden met behulp van de in hoofdstuk 4 gevonden approximatiemethode. Deze ziet er als volgt uit:

$$\mathbb{E}[W_{m,app}] = \frac{K_{0,m} + K_{1,m}\rho + K_{2,m}\rho^2}{1 - \rho}.$$

De manier waarop $K_{0,m}$, $K_{1,m}$ en $K_{2,m}$ van de LT- en HT-uitdrukking afhangen zijn in hoofdstuk 4 reeds behandeld. Ik ga dus alleen nog deze gevonden uitdrukkingen invullen.

$K_{0,m}$

Er geldt

$$K_{0,m} = \mathbb{E}[W_{m,app}]|_{\rho=0} = \mathbb{E}[W_m^{(LT)}]|_{\rho=0} = 0,$$

waaruit we concluderen dat

$$K_{0,m} = 0.$$

$K_{1,m}$

Er geldt

$$K_{1,m} = \frac{d}{d\rho} \mathbb{E}[W_{m,app}]|_{\rho=0} - K_{0,m}.$$

Hieruit halen we dat:

$$K_{1,m} = \mathbb{E}[B_{res}] + \hat{\rho}_l \mathbb{E}[S] + \hat{\rho}_l \frac{\mathbb{E}[S_l]}{\mathbb{E}[B_l]} \mathbb{E}[S_{l,res}] + \hat{\rho}_l \frac{\mathbb{E}[S_m]}{\mathbb{E}[B_m]} (\mathbb{E}[S_{m,res}] + \mathbb{E}[S_l]).$$

$K_{2,m}$

Er geldt

$$K_{2,m} = \omega_i - K_{0,m} - K_{1,m}.$$

Hieruit concluderen we dat:

$$\begin{aligned} K_{2,m} = & (1 - \hat{\rho}_m) \left(\frac{\mathbb{E}[B_{res}]}{2\hat{\rho}_m\hat{\rho}_l} + \frac{\mathbb{E}[S]}{2} \right) \\ & - \mathbb{E}[B_{res}] - \hat{\rho}_l \mathbb{E}[S] - \hat{\rho}_l \frac{\mathbb{E}[S_l]}{\mathbb{E}[B_l]} \mathbb{E}[S_{l,res}] - \hat{\rho}_l \frac{\mathbb{E}[S_m]}{\mathbb{E}[B_m]} (\mathbb{E}[S_{m,res}] + \mathbb{E}[S_l]). \end{aligned}$$

Interpolatie Q_l

We proberen een approximatie te vinden met behulp van de in hoofdstuk 4 gevonden approximatiemethode. Deze ziet er als volgt uit:

$$\mathbb{E}[W_{l,app}] = \frac{K_{0,l} + K_{1,l}\rho + K_{2,l}\rho^2}{1 - \rho}.$$

De manier waarop $K_{0,l}$, $K_{1,l}$ en $K_{2,l}$ van de LT- en HT-uitdrukking afhangen zijn in hoofdstuk 4 reeds behandeld. Ik ga dus alleen nog deze gevonden uitdrukkingen invullen.

$K_{0,l}$

Er geldt

$$K_{0,l} = \mathbb{E}[W_{l,app}]|_{\rho=0} = \mathbb{E}[W_l^{(LT)}]|_{\rho=0} = \mathbb{E}[S_m],$$

waaruit we concluderen dat

$$K_{0,l} = \mathbb{E}[S_m].$$

$K_{1,l}$

Er geldt

$$K_{1,l} = \frac{d}{d\rho} \mathbb{E}[W_{l,app}]|_{\rho=0} - K_{0,l}.$$

Hieruit halen we dat:

$$K_{1,l} = \mathbb{E}[B_{res}] + \hat{\rho}l \frac{\mathbb{E}[S_l]}{\mathbb{E}[B_l]} \mathbb{E}[S_{l,res}] - \hat{\rho}l \frac{\mathbb{E}[S_m]}{\mathbb{E}[B_l]} (\mathbb{E}[S_m] - \mathbb{E}[S_{m,res}]) - \mathbb{E}[S_m].$$

$K_{2,l}$

Er geldt

$$K_{2,l} = \omega_i - K_{0,l} - K_{1,l}.$$

Hieruit concluderen we dat:

$$K_{2,l} = (1 - \hat{\rho}l) \left(\frac{\mathbb{E}[B_{res}]}{2\hat{\rho}_m\hat{\rho}l} + \frac{\mathbb{E}[S]}{2} \right) - \mathbb{E}[B_{res}] - \hat{\rho}l \frac{\mathbb{E}[S_l]}{\mathbb{E}[B_l]} \mathbb{E}[S_{l,res}] + \hat{\rho}l \frac{\mathbb{E}[S_m]}{\mathbb{E}[B_l]} (\mathbb{E}[S_m] - \mathbb{E}[S_{m,res}]).$$

Resultaten

Uit bovenstaande bepalingen voor $K_{0,m}$, $K_{1,m}$ en $K_{2,m}$ volgt een approximatie voor de verwachte wachttijd voor alle waarden van ρ tussen 0 en 1, in het geval de strategie ‘‘Mainstream green’’ wordt toegepast en naar de drukste rij wordt gekeken. In het andere geval volgt de approximatie uit $K_{0,l}$, $K_{1,l}$ en $K_{2,l}$. In het hoofdstuk 8 vergelijken we deze approximatie met simulatieresultaten.

8 Simulaties

Om verschillende van de bovenstaande beweringen te toetsen aan de werkelijkheid, heb ik een simulatie geschreven die de bovenstaande situatie nabootst. Nu kunnen de verschillende uitdrukkingen en approximaties vergeleken worden met elkaar en de werkelijkheid.

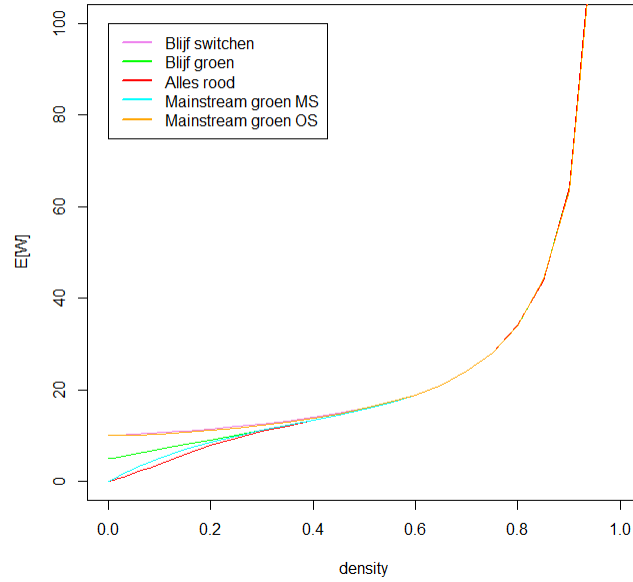
Deze simulatie moet van de volgende informatie voorzien worden:

- B_i , de bedieningstijd per auto voor Q_i . Deze staat standaard op 2, voor beide rijen.
- S_i , de switchovertijd tussen Q_i en Q_{i+1} . Deze staat standaard op 10, voor beide rijen.
- ρ , de mate van verzadiging van het systeem.
- $\hat{\rho}_1$, de kans dat een auto bij aankomst in rij 1 aankomt.
- De gekozen strategie.

In de verschillende simulaties bekijk ik steeds een tijdsspanne T van 10.000.000. Binnen deze tijdsspanne komen auto's in beide rijen aan volgens een Poissonproces, met voor rij 1 en 2 respectievelijk parameters $\hat{\rho}_1\rho/B$ en $(1 - \hat{\rho}_1)\rho/B$. Ze vertrekken uit de rijen op een manier die per strategie verschilt, natuurlijk zijn alle strategieën in de simulatie verwerkt.

8.1 Vergelijking van de strategieën

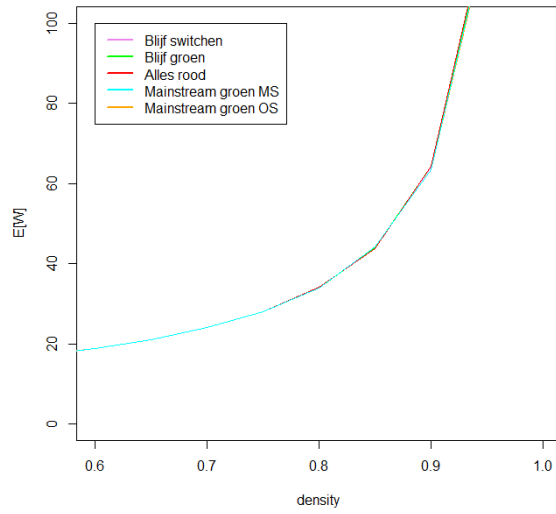
Ik begin met het vergelijken van de verschillende strategieën. Hiervoor laat ik verschillende grafieken zien, waarin de gesimuleerde verwachte wachttijden van de vier strategieën te zien zijn, afgezet tegen ρ . Allereerst de resultaten voor $\hat{\rho}_i = 1/2$:



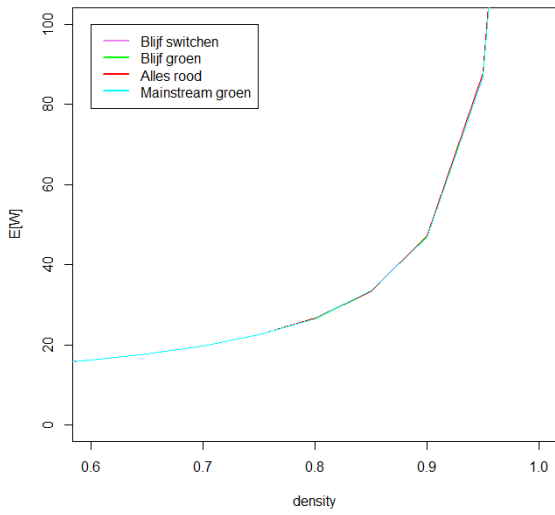
Figuur 11: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 1/2$

Hier valt helaas weinig uit op te maken, we zien een sterke stijging bij hoge waarden van ρ en bij iedere strategie verschillend gedrag bij lage waarden van ρ . Vanaf nu gaan we de gevallen voor lage en hoge waarden van ρ apart bekijken.

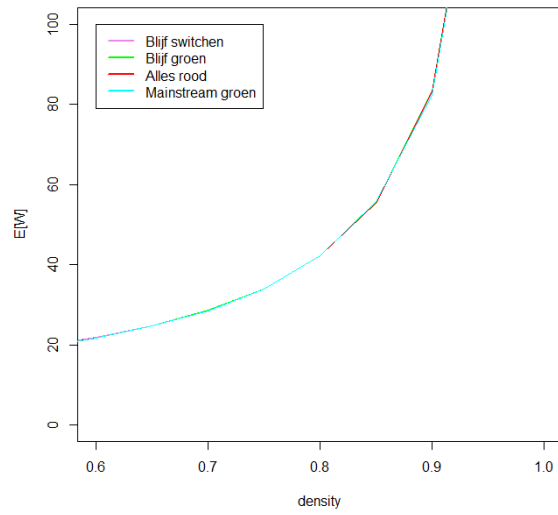
Allereerst bekijken we het gedrag bij waarden van ρ tussen 0.6 en 1. Elke grafiek staat voor een andere waarde van $\hat{\rho}_i$, de fractie van het totale verkeersaanbod in het systeem dat in de betreffende rij aankomt. Het vermoeden is dat het gedrag bij deze waarden van ρ vrijwel onafhankelijk is van de strategie.



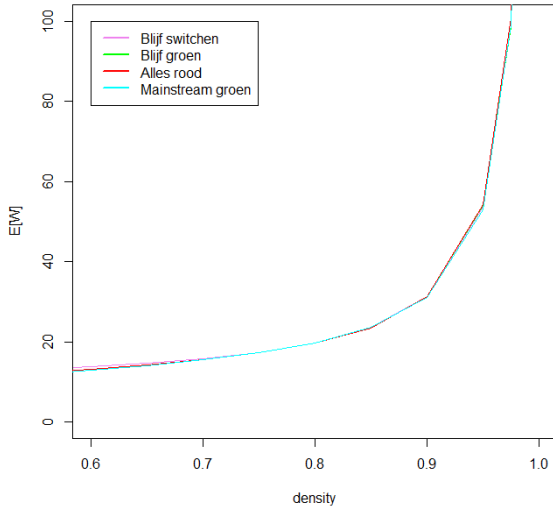
Figuur 12: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 1/2$



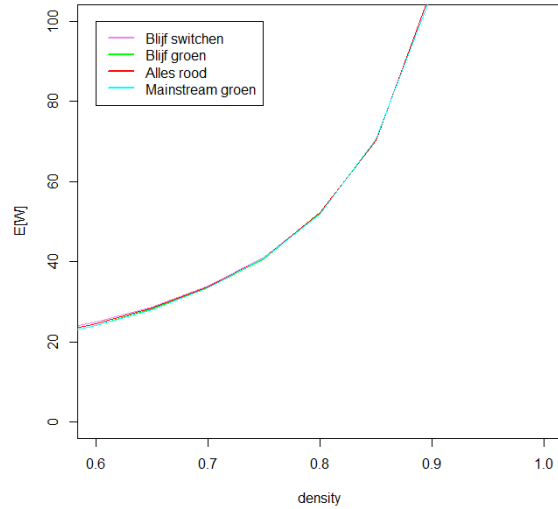
Figuur 13: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 2/3$



Figuur 14: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 1/3$



Figuur 15: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 5/6$

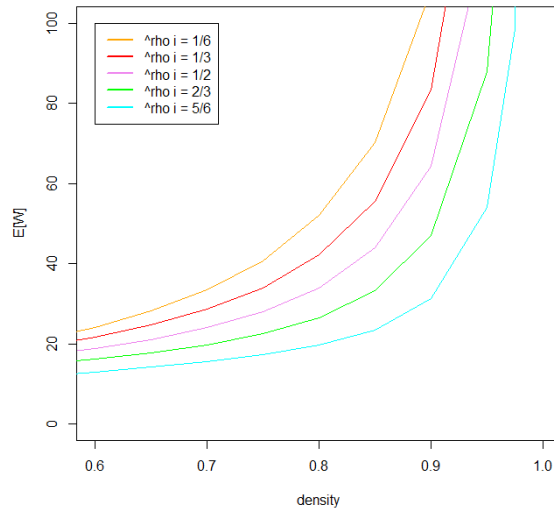


Figuur 16: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 1/6$

Dat er twee lijnen voor Mainstream green staan in de grafiek voor $\hat{\rho}_i = 1/2$, komt doordat deze rij zowel de mainstream (MS) als de andere richting (OS) kan zijn. Er is hier namelijk geen drukker rij, dus kiest het systeem zonder verdere redenen voor één van de twee rijen.

De eerste conclusie die uit bovenstaande grafieken te trekken is, is dat de verwachte wachttijden voor waarden vanaf $\rho = 0.6$ voor alle strategieën hetzelfde patroon lijken te volgen. Het lijkt er dus op dat Heavy Traffic in één uitdrukking te vatten is voor alle strategieën.

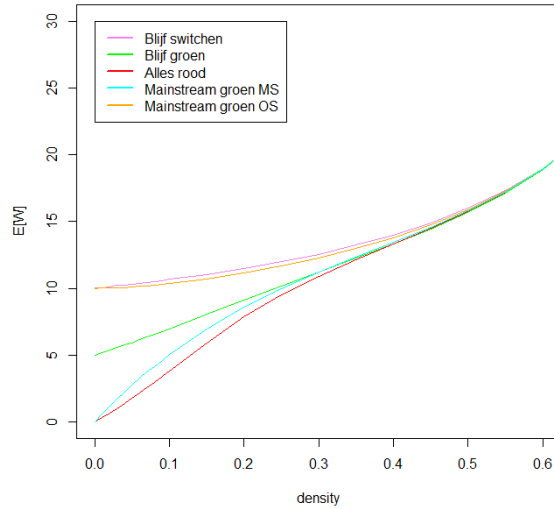
Verder worden de verwachte wachttijden hoger naarmate $\hat{\rho}_i$ lager wordt. Dit is te zien in de volgende afbeelding, waarin de resultaten van de verwachte wachttijd bij Stay green te zien zijn voor $\hat{\rho}_i = 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6$. Ik laat hier alleen de resultaten voor Stay green zien, aangezien we eerder al hebben opgemerkt dat de resultaten bij hoge waarden van ρ vrijwel onafhankelijk zijn van de strategie die gekozen is.



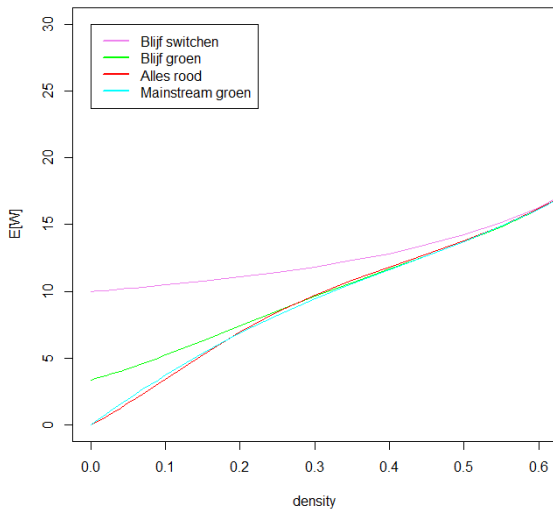
Figuur 17: Wachttijden bij Stay green

Je ziet dat de verwachte wachttijden in alle situaties een soortgelijke stijging kennen als ρ hoger wordt, en dat bij alle getoonde waarden van ρ de wachttijd hoger is wanneer $\hat{\rho}_i$ lager ligt.

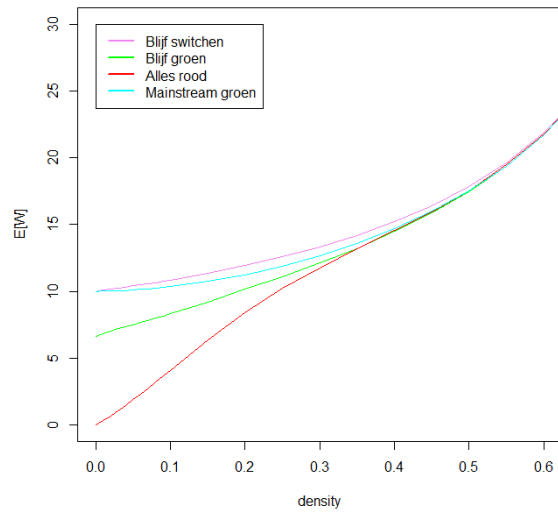
De invloed van Light Traffic lijkt hier niet meer significant te zijn, dus voor het verschil tussen de strategieën onderling moet vooral naar de lagere waarden van ρ gekeken worden. Voor deze waarden zien de grafieken er als volgt uit:



Figuur 18: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 1/2$



Figuur 19: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 2/3$

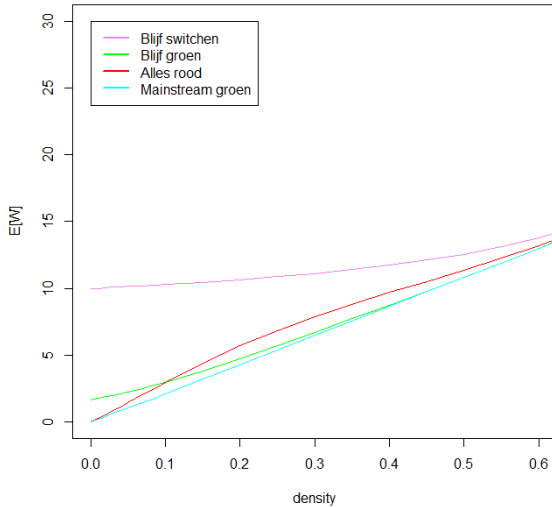


Figuur 20: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 1/3$

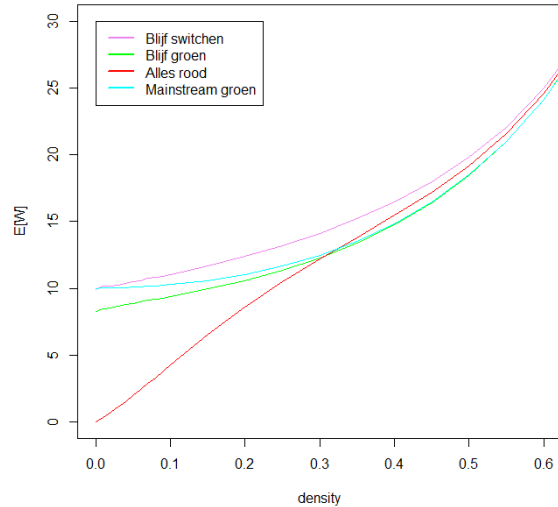
Hier zijn verschillende conclusies uit te trekken. Over de hele breedte genomen lijkt All red de meest gunstige resultaten te leveren. Blijf Switchen levert voor alle onderzochte waarden de hoogste wachttijd, de andere strategieën lijken dus altijd beter uit te pakken.

Bij $\rho = 0$ lijken de volgende regels te gelden:

- Bij Blijf switchen lijkt de verwachte wachttijd gelijk aan de helft van de totale switchovertijd, $(S_i + S_{i+1})/2$. Dit is naar verwachting, in een leeg systeem kom je altijd in



Figuur 21: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 5/6$



Figuur 22: Wachttijden bij $\hat{\rho}_i = 1/6$

een switchover aan, de resterende wachttijd is daardoor uniform verdeeld tussen 0 en $S_i + S_{i+1}$.

- Bij Stay green is de verwachte wachttijd in Q_i afhankelijk van $\hat{\rho}_i$. De kans dat het licht bij Q_i op groen staat is gelijk aan de kans dat de laatste bediening plaatsvond in Q_i , dus $\hat{\rho}_i$. In dit geval is de wachttijd 0. Met kans $1 - \hat{\rho}_i$ staat het licht bij Q_{i+1} op groen. In dit geval is de wachttijd S_{i+1} . De verwachte wachttijd is dus $(1 - \hat{\rho}_i) * S_{i+1}$, wat wordt onderschreven door de simulatieresultaten.
- Bij All red treft de aankomende auto altijd een rood licht aan, maar omdat het systeem leeg is kan deze direct op groen springen. Dit levert wachttijd 0 op. De simulatie geeft dit ook aan.
- Bij Mainstream green komt een auto aan vanuit de mainstream of de andere richting. Bij aankomst in de mainstream Q_i treft men altijd een groen licht aan, waardoor de wachttijd gelijk is aan 0. Als Q_i niet de mainstream is, moet men altijd de switchover naar Q_i afwachten, en geldt dus dat de wachttijd gelijk is aan S_{i+1} . De simulatie geeft dit aan.

De lastiger te verklaren waarden zijn de waarden tussen $\rho = 0$ en $\rho = 0.6$. Voor elke $\hat{\rho}_i$ zijn verschillende conclusies te trekken, dus de te kiezen strategie hangt af van de verdeling van het verkeer.

Als het verkeer gelijkmatig is verdeeld levert All red een kleinere stijging in de wachttijd op dan Mainstream green in de mainstream. Dit komt waarschijnlijk door het volgende: als een auto in Q_{i+1} arriveert, wordt hij bij All red direct geholpen, waarna weer naar de lege situatie wordt gewicht. Bij Mainstream green moet er eerst worden gewicht naar Q_{i+1} , en wordt er na de bediening weer teruggewicht naar Q_i . Dit kost meer tijd, en dus is zowel de kans op, als de verwachte wachttijd bij, een aankomst tijdens een bediening in Q_{i+1} of

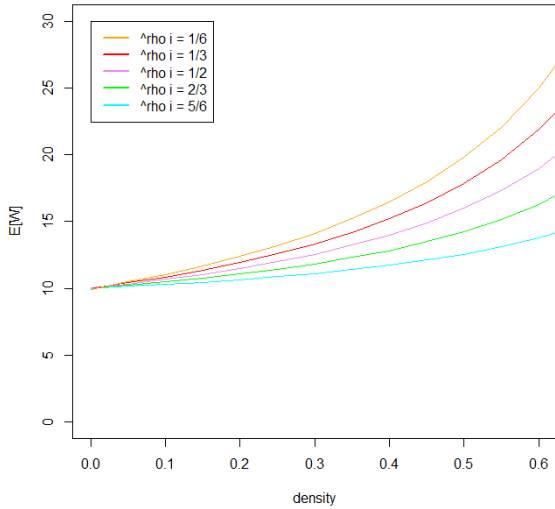
de omliggende switchovers groter. Gezien (bijna) de helft van de auto's uit de richting Q_{i+1} komt, heeft dit een significante bijdrage.

Als het verkeer heel ongelijkmatig verdeeld is levert juist Mainstream green de beste resultaten. Het net beschreven effect wordt veel kleiner, terwijl een ander effect vaker optreedt. Dit is het volgende: als het systeem na een bediening in Q_i leeg is, blijft het licht bij Mainstream green gewoon op groen staan. Bij All red gaat het systeem eerst naar een lege situatie switchen. Als aankomsten in Q_i tijdens deze switchover plaatsvinden levert dat extra wachttijd op die bij Mainstream green niet wordt opgelopen. Hoe ongelijkmatiger het systeem is verdeeld, hoe vaker die zich zal voordoen.

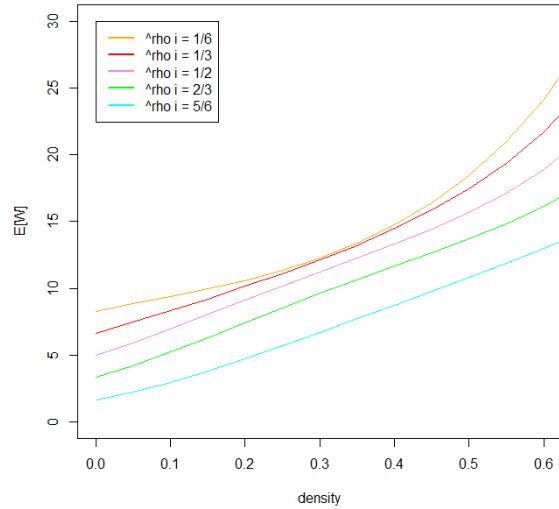
Ook valt het op dat bij de gevallen Stay green en Mainstream green, de wachttijden al bij vrij lage waarden van ρ vrijwel hetzelfde patroon gaan volgen. Dit gebeurt vooral bij de ongelijkmatige verdelingen van het verkeer. Dit heeft ook een vrij logische verklaring, deze twee strategieën lijken bij ongelijke verdeling erg op elkaar.

Als bijna al het verkeer in Q_i aankomt, staat het licht bij Stay green na een groot deel van de bedieningen op groen in Q_i , terwijl het bij Mainstream green ook op groen zou blijven staan. Het verschil tussen deze twee strategieën zit hem in wat er gebeurt na een bediening in Q_{i+1} , maar zoals gezegd, deze komen weinig voor. Als er juist erg weinig verkeer is in Q_i , staat het licht in beide gevallen meestal op rood bij aankomst, en moet dus eerst S_{i+1} worden afgewacht.

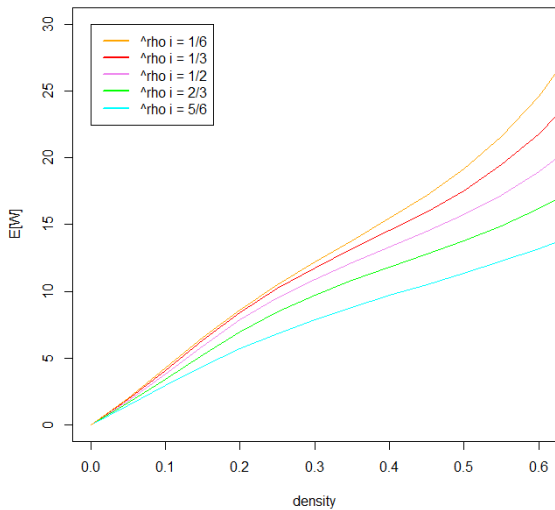
Ook is het interessant om per strategie te kijken wat het effect is van een veranderende waarde van $\hat{\rho}_i$, ofwel de verdeling van het verkeer. Voor ρ hoger dan 0.6 is het effect al getoond in een grafiek voor Stay green. Voor ρ tussen 0 en 0.6 is het wel interessant voor alle strategieën deze vergelijking te maken. De volgende vier grafieken laten de resultaten zien.



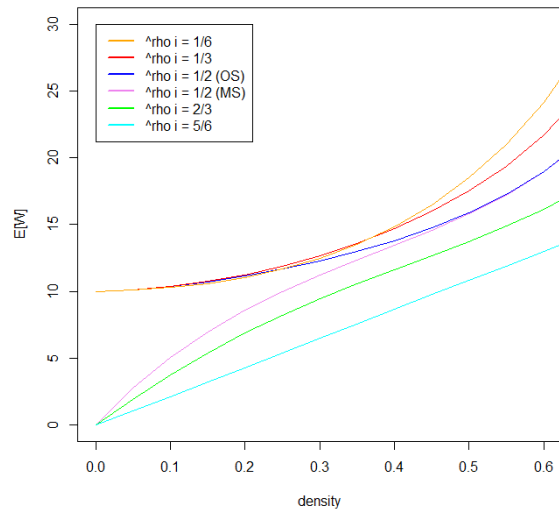
Figuur 23: Wachtijden bij Blijf Switchen



Figuur 24: Wachtijden bij Stay green



Figuur 25: Wachtijden bij All red



Figuur 26: Wachtijden bij Mainstream green

Bij All red en Blijf Switchen zien we een vrij logische stijging van de wachttijd als $\hat{\rho}_i$ daalt. De stijging van de wachttijd lijkt hier redelijk gelijkvormig te zijn voor alle $\hat{\rho}_i$. Blijf Switchen kent een convex verloop, waar bij All red de stijging erg hoog is bij de laagste waarden van ρ en wat afzwakt bij $\rho = 0.2$.

Bij Stay green lijkt de stijging van de wachttijd voor lage ρ redelijk op een rechte lijn, behalve bij $\rho = 1/6$. Bijzonder is dat er rond $\rho = 0.3$ amper een verschil lijkt te zijn tussen de wachttijden bij $\rho = 1/6$ en $\rho = 1/3$, terwijl dit verschil er wel is bij lagere en hogere waarden

van ρ .

Bij Mainstream green is er uiteraard een belangrijk gegeven dat veel verschil maakt: kom je aan in de mainstream of niet? Hierdoor beginnen de wachttijden bij hoge $\hat{\rho}_i$ in 0, terwijl de wachttijden bij lage $\hat{\rho}_i$ in S_{i+1} (in dit geval 10) beginnen.

In het geval van een mainstream beginnen vooral de wachttijden bij relatief lage $\hat{\rho}_i$ met een flinke stijging bij zeer lage waarden van ρ . Bij iets hogere waarden lopen ze een tijdje redelijk evenwijdig aan elkaar. De drie gevallen die niet mainstream zijn kennen, net als bij Blijf Switchen, convexe verlopen van de wachttijd. Voor hele lage ρ stijgt de verwachte wachttijd vrijwel niet.

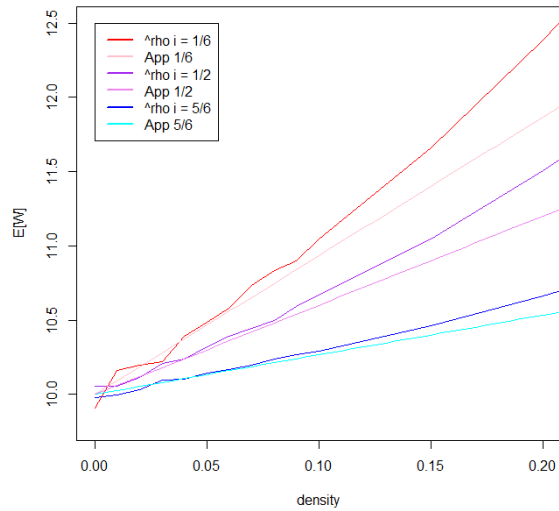
Hier tekent zich wel het eerste probleem af: als de wachttijd geen convex verloop kent, is deze eigenlijk niet te approximeren met de methode uit de literatuur. Dit betekent dat deze methode niet optimaal zal zijn voor in ieder geval All red en (de mainstreamvariant van) Mainstream green.

8.2 Light Traffic

Eerst gaan we kijken naar de uitdrukkingen voor Light Traffic die in de hoofdstukken 4 t/m 7 zijn behandeld. Met de simulaties kunnen we bekijken of de approximaties kloppen, en tevens inschatten voor welke waarden van ρ de uitdrukkingen voor Light Traffic accuraat zijn. We gaan dit per strategie bekijken.

8.2.1 Blijf Switchen

De onderstaande grafiek bevat vergelijkingen tussen de simulatieresultaten bij Blijf Switchen en de Light Traffic uitdrukking.

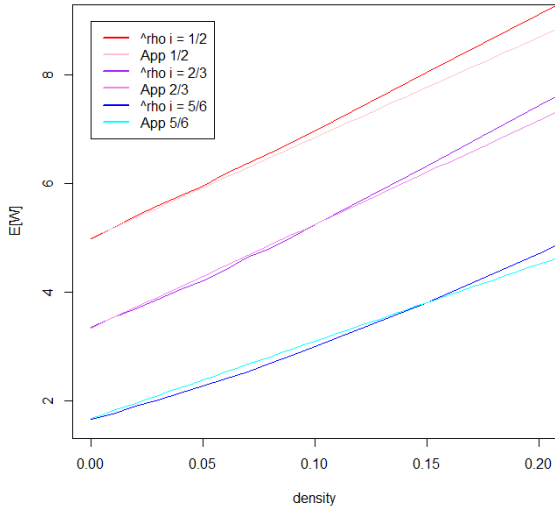


Figuur 27: LT Approximaties Blijf Switchen

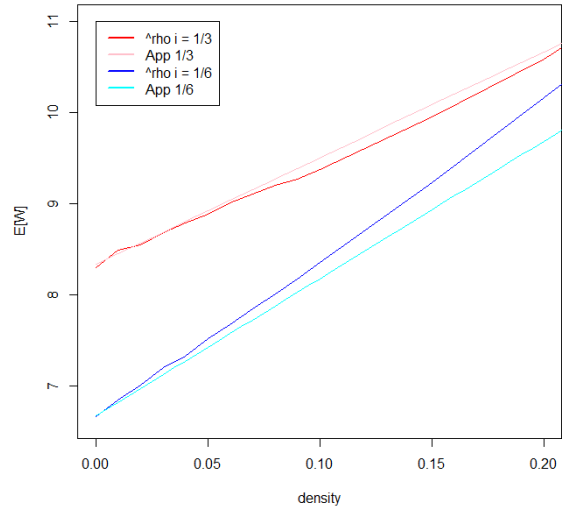
De simulatieresultaten bij lage waarden van ρ zijn vrij onnauwkeurig, maar we zien dat de resultaten van de Light Traffic uitdrukking zeker tot $\rho = 0.07$ resultaten geven die goed bij de werkelijkheid passen. Voor waarden hierboven wordt de gesimuleerde wachttijd duidelijk hoger dan de Light Traffic uitdrukking aangeeft.

8.2.2 Stay green

De onderstaande grafieken bevatten de resultaten van de simulatie bij Stay green, en de Light Traffic approximatie.



Figuur 28: LT Approximaties Stay green

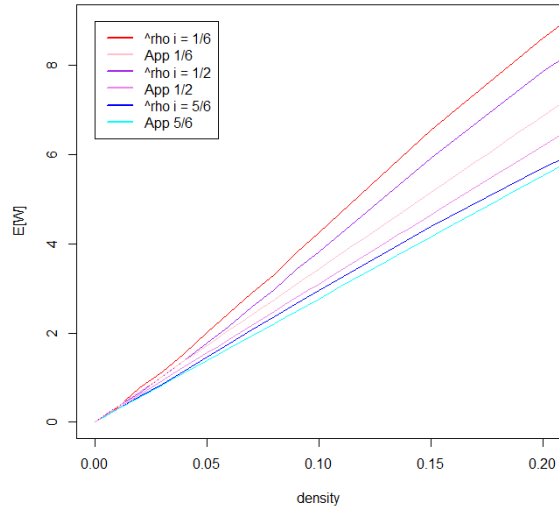


Figuur 29: LT Approximaties Stay green

Voor waarden van ρ tot 0.05 kloppen de waarden voor alle bekeken opties van $\hat{\rho}_i$, daarna gaan vooral bij hoge en lage waarden van $\hat{\rho}_i$ de waarden voor de verwachte wachttijden duidelijk verschillen van de approximatie. Als $\hat{\rho}_i$ dichterbij 0.5 ligt lijkt de approximatie zelfs tot $\rho = 0.15$ vrij accuraat te zijn. Voor hogere waarden wordt de gesimuleerde wachttijd hoger dan die volgens de approximatie.

8.2.3 All red

De onderstaande grafiek bevat de resultaten van de simulatie bij All red, en de Light Traffic approximatie.

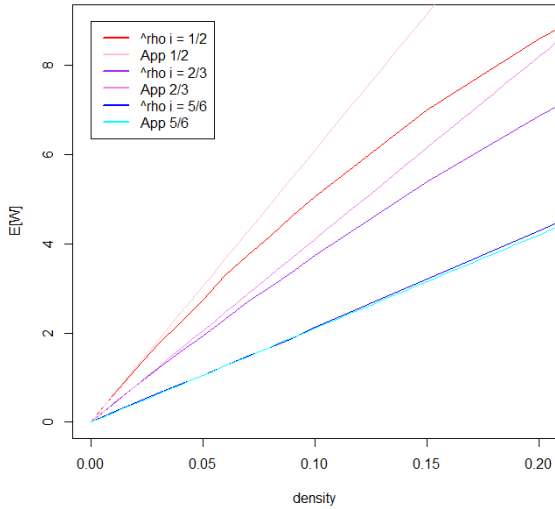


Figuur 30: LT Approximaties All red

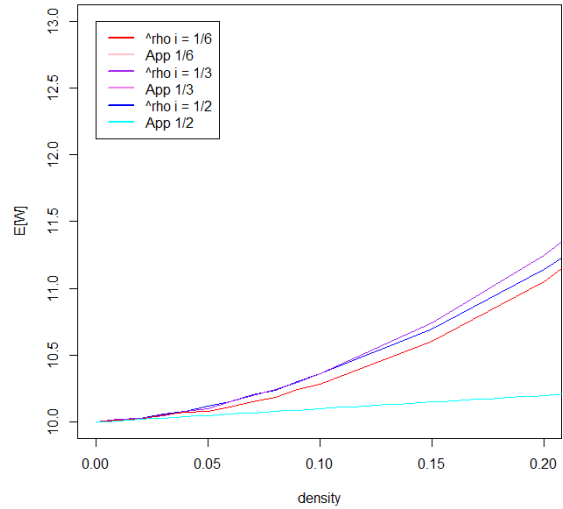
Hoewel de afgeleide in $\rho = 0$ gelijk lijkt te zijn voor de simulatie en de approximatie, worden de verschillen al vanaf $\rho = 0.02$ duidelijk groter. Vooral bij hoge waarden van $\hat{\rho}_i$ zijn de simulatieresultaten van de verwachte wachttijd duidelijk hoger dan die van de approximatie.

8.2.4 Mainstream green

De onderstaande grafieken bevatten de resultaten van de simulatie bij Mainstream green, en de Light Traffix approximatie. Let wel, het gaat hier om twee approximaties, die voor de mainstream en die voor de andere richting.



Figuur 31: LT App. Mainstream green

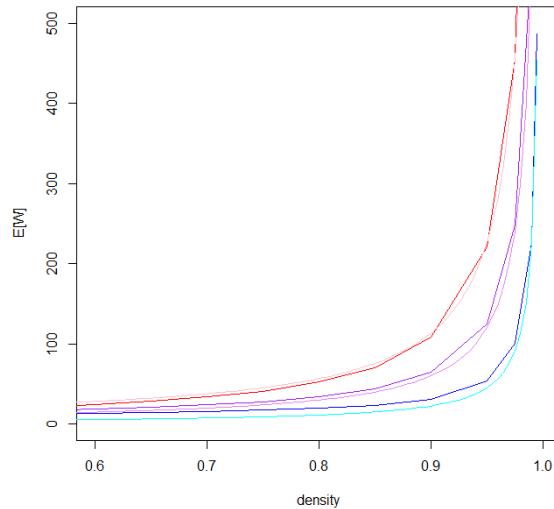


Figuur 32: LT App. Mainstream green

In het mainstream geval kloppen de afgeleiden in $\rho = 0$, maar is er een groot verschil tussen de waarden van $\hat{\rho}_i$. Waar de approximatie bij $\hat{\rho}_i = 1/2$ al bij $\rho = 0.04$ duidelijk verschil gaat maken met de gesimuleerde resultaten, is er bij $\hat{\rho}_i = 5/6$ zelfs bij $\rho = 0.2$ nog sprake van een goede approximatie. In het geval van de andere rij lopen approximatie en simulatie al na $\rho = 0.02$ duidelijk van elkaar vandaan. Opvallend is dat de LT-approximatie onafhankelijk is van ρ_l , wat zowel aan de Light Traffic uitdrukking als aan de visuele resultaten te zien is.

8.3 Heavy Traffic

Nu gaan we kijken naar de uitdrukking voor Heavy Traffic, en ook deze vergelijken met simulaties. In dit geval kiezen we voor $\hat{\rho}_i$ een bepaalde waarde, laten we de waarde van ρ variëren en vergelijken we de uitdrukking van $\mathbb{E}[W_i^{HT}]$ met de uitkomsten van één van de strategieën. Dit omdat eerder al is aangetoond dat de resultaten vrijwel hetzelfde lijken te zijn. Als strategie is hier voor All red gekozen.



Figuur 33: HT Approximaties All red

Hieraan is te zien dat de uitdrukking van Heavy Traffic al bij vrij hoge waarden van ρ inaccuraat wordt. Om precies te zijn is bij $\rho = 0.95$ de approximatie voor $\hat{\rho}_i = 5/6$ al niet meer voldoende.

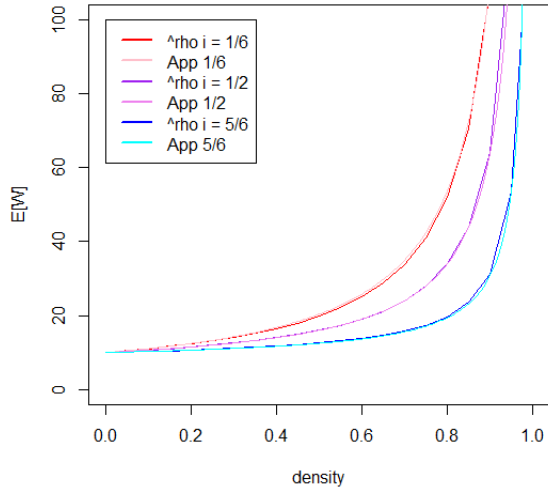
8.4 Interpolatie

Omdat we hebben gezien dat Light en Heavy Traffic-uitdrukkingen geen goed inzicht bieden in de waarden die niet dicht bij 0 of 1 liggen, hopen we daar met de approximatie, met behulp van interpolatie, een betere schatting voor te kunnen geven. We gaan de simulatieresultaten met de resultaten van de approximatie vergelijken, dit doen we weer per strategie.

8.4.1 Blijf Switchen

In de volgende grafiek zijn de resultaten van de approximatie en de simulatie bij de strategie Blijf Switchen weergegeven.

Zoals zichtbaar is, geven deze approximaties een goed beeld van de werkelijkheid. Hoewel

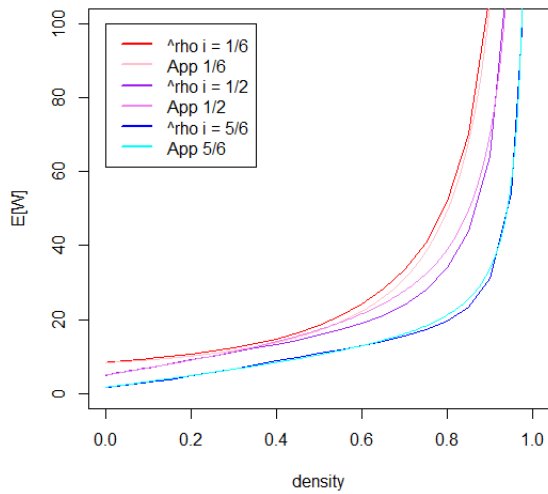


Figuur 34: Approximaties Blijf Switchen

de verschillen bij alle zichtbare waarden van $\hat{\rho}_i$ klein zijn, lijkt het geval $\hat{\rho}_i = 1/2$ het meest synchroon te lopen.

8.4.2 Stay green

In de volgende grafiek zijn de resultaten van de approximatie en de simulatie bij de strategie Stay green weergegeven. Er zijn duidelijk verschillen zichtbaar tussen de approximatie- en de

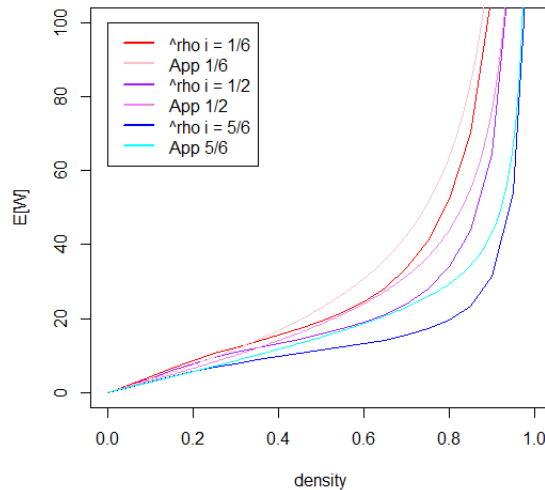


Figuur 35: Approximaties Stay green

simulatiere resultaten. Opvallend is dat deze verschillen bij $\hat{\rho}_i = 1/2$ het grootst lijken te zijn. Bij $\hat{\rho}_i = 1/6$ is het verschil al kleiner, bij $\hat{\rho}_i = 5/6$ is de approximatie zelfs nog best goed te noemen. De conclusie hieruit is dat de approximatie beter lijkt te werken bij situaties met een ongelijk verdeelde aankomstverdeling tussen de twee rijen.

8.4.3 All red

In de volgende grafiek zijn de resultaten van de approximatie en de simulatie bij de strategie All red weergegeven.

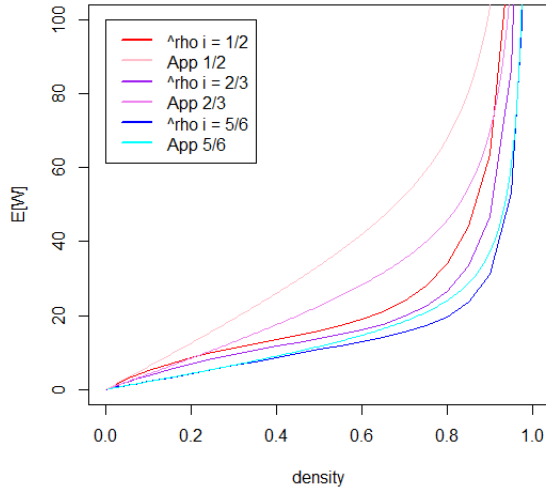


Figuur 36: Approximaties All red

Hier zien we toch wel erg grote verschillen optreden tussen approximatie en simulatie. Aan de simulatiere resultaten zien we ook waarom de strategie All red niet op deze manier te approximeren is, de verwachte wachttijd kent namelijk geen convexe stijging maar ondervindt een "knik" rond $\rho = 0.25$. Deze vorm kan een functie van de vorm van onze approximatie nooit aannemen.

8.4.4 Mainstream green

In de volgende grafiek zijn de resultaten van de approximatie en de simulatie bij de strategie Stay green weergegeven, in het geval naar de "drukkere" rij wordt gekeken.

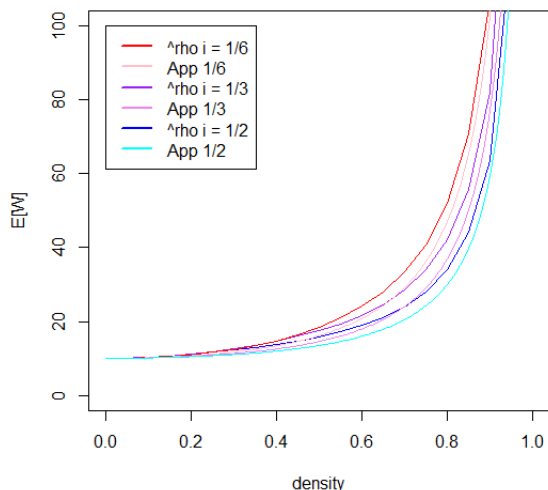


Figuur 37: Approximaties Mainstream green (MS)

Hieruit blijkt dat hoe eerder de verdeling van verkeer tussen de twee rijen is, hoe slechter de approximatie het gaat doen. Lijken de simulatie- en approximatieresultaten bij Bij $\hat{\rho}_i = 5/6$ nog enigszins op elkaar, bij Bij $\hat{\rho}_i = 1/2$ kunnen we totaal niet meer van een approximatie spreken.

De stijging van de wachttijden ten opzichte van ρ kent, net als bij All red, een knik, die extremer wordt bij hoge waarden van $\hat{\rho}_i$. Hierdoor is een goede approximatie met onze methode onmogelijk. Het grote verschil tussen approximatie- en simulatieresultaten komt vooral door de sterke stijging van de wachttijd bij de laagste waarden van ρ .

In de volgende grafiek zijn de resultaten van de approximatie en de simulatie bij de strategie Stay green weergegeven, in het geval naar de "minder drukke" rij wordt gekeken.



Figuur 38: Approximaties Mainstream green (OS)

Deze approximatie presteert weliswaar beter dan de andere Mainstream green approximatie, het blijft erg moeilijk om deze strategie te approximeren. We zien dat, in alle gevallen, rond $\rho = 0.7$ de grootste verschillen optreden.

9 Conclusie

Dit onderzoek heeft een hoop inzicht opgeleverd in de invloed van een aantal verschillende strategieën op het functioneren van een verkeersknooppunt met twee verkeerslichten. Deze strategieën, genaamd Blijf Switchen, Stay green, All red en Mainstream green, verschilden van elkaar door hun gedrag in een leeg systeem, maar pasten allemaal exhaustive service toe. Voor alle strategieën is een approximatie ontwikkeld die de verwachte wachttijd moet bepalen voor verschillende verkeersintensiteiten en verschillende verdelingen van het verkeer over twee rijen. Ook is er een simulatie geschreven om deze verwachte wachttijden te bepalen. De resultaten van deze simulatie zijn als volgt:

- De keuze voor een strategie maakt niets uit als het systeem erg druk is. Dit houdt in: als het systeem meer dan $3/5$ deel van de totale tijd auto's aan het bedienen is, leveren alle strategieën praktisch dezelfde verwachte wachttijden op.
- Als het systeem bijna helemaal leeg is, dus minder dan $1/10$ deel van de totale tijd auto's bedient, is All red de meest voordelige strategie. Hierbij maakt het niet uit of het verkeer gelijkmatig over beide rijen verdeeld is, of dat één van de twee rijen veel drukker is dan de ander.
- In de overige gevallen zijn er twee situaties te onderscheiden: het verkeer is gelijkmatig of ongelijkmatig verdeeld. Als het verkeer zeer ongelijkmatig verdeeld is is Mainstream green de beste optie. Deze optie is nadelig voor het verkeer uit de "rustige" richting,

maar aangezien dit een kleine fractie van het totale verkeersaanbod is levert dit toch de beste resultaten. Bij een gelijkmatigere verdeling is All red de beste strategie.

Over de strategie Blijf Switchen was al veel theorie beschikbaar rond het bepalen van uitdrukkingen voor de verwachte wachttijd. In deze theorie werden twee uitdrukkingen afgeleid:

- De Light Traffic uitdrukking, een lineaire uitdrukking voor de verwachte wachttijd die accuraat is bij een heel laag verkeersaanbod.
- De Heavy Traffic uitdrukking, een uitdrukking die de verwachte wachttijd bij een bijna verzadigd systeem aangeeft.

Door middel van interpolatie is een approximatie ontwikkeld die voor Blijf switchen goede resultaten oplevert.

Voor de andere strategieën zijn ook Light Traffic uitdrukkingen gevonden. Met deze uitdrukkingen kon ik de interpolatie ook op deze situaties toepassen, aangezien Heavy Traffic in deze situaties hetzelfde resultaat oplevert als bij Blijf switchen. Dit had wisselend succes. Bij Stay green zijn de resultaten redelijk bruikbaar, bij de andere strategieën lagen approximatie en simulatie veel verder uit elkaar. Een mogelijke uitbreiding van dit werk is dan ook het vinden van andere interpolatiemethoden, die betere resultaten bieden voor de strategieën waarbij de hier gebruikte methode duidelijk tekortschoot.

Andere uitbreidingen die mogelijk zijn, zijn:

- Deze theorie toepassen op systemen met meer dan twee rijen.
- Het vinden van meer verfijnde strategieën die betere resultaten opleveren voor de verkeersdoorstroming.
- Kijken naar een situatie waarin het verkeersaanbod niet constant is, maar varieert. Dit kan zowel een verandering in het totale aanbod, als een verandering in de verdeling over de twee rijen betekenen.

Referenties

- [1] Boon, M. A. A., *Polling Models, From Theory to Traffic Intersections*. PhD Thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Technische Universiteit Eindhoven, 2011.
- [2] Adan, I.J.B.F. en Resing, J.A.C., *Queueing Theory*. Lecture notes, Department of Mathematics and Computer Science, Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
- [3] Fuhrmann, S.W. en Cooper, R.B., *Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations*. Operations Research, edition 33, pages 1117-1129, 1985.
- [4] Olsen, T.L. en Van der Mei, R.D., *Polling systems with periodic server routing in heavy traffic: distribution of the delay*. Journal of Applied Probability, edition 40, pages 305-326, 1985.