

BACHELOR

Verpleegkundige personeelsinzet in ziekenhuizen

Moonen, M.P.T.

Award date:
2013

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Verpleegkundige personeelsinzet in ziekenhuizen

Violi Moonen

Begeleider: prof. dr. J.S.H. van Leeuwen

7 augustus 2013

Samenvatting

A medical unit where patients wait for assistance is a system that can be described and studied with queueing theory. What particular queueing model is needed depends on the structure of the system. In this research there are considered three different situations:

- **Erlang B**

There are s nurses and patients arrive following a Poisson-process with intensity λ . When all nurses are busy, the newly arriving patients cannot be helped anymore. They will not be on a waiting list, but they will be ignored. The duration of help is exponentially distributed with mean $\frac{1}{\mu}$.

- **Erlang C**

This situation looks like Erlang B (with intensity λ and mean $\frac{1}{\mu}$), but this time there will be a queue with waiting patients when all nurses are busy.

- **Article de Véricourt and Jennings**

This is a closed system. This means there will always be n patients, who won't leave quickly and if they leave they will be replaced immediately by new patients. A patient becomes needy with intensity λ and help is exponential distributed with mean $\frac{1}{\mu}$.

With these models a medical unit can determine the influence of the number of nurses on the chance of blocking at a department. To try this there has been done some research at the Cardiology department at the Catharina hospital in Eindhoven. This department is almost always full of patients and patients become needy several times a day. This department suits the last model described above.

The model calculates the likelihood that a needy patients waiting period before getting access to a nurse is longer than a time threshold T . In the current situation there are 27 patients and 5 nurses. Here the chance of blocking will be 5% at a threshold of

10 minutes. If an extra nurse will be scheduled, than there is 5% chance at blocking at a threshold of just 5 minutes.

A hospital can consider uniting multiple departments, because this has advantages with respect to the number of nurses that are needed. With the model is examined how many nurses are needed if two departments of 27 patients will be combined. With a threshold of 10 minutes, there will be 5% chance at blocking when there are 9 nurses. This means that the hospital will save one FTE when they combine two departments.

Inhoudsopgave

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Inleiding | 1 |
| 2 | Het QED regime, Erlang B en C | 2 |
| 2.1 | Erlang B | 2 |
| 2.1.1 | Blokkeringskans | 2 |
| 2.1.2 | Schaalvoordelen | 3 |
| 2.2 | Erlang C | 4 |
| 2.2.1 | Blokkeringskans | 4 |
| 2.2.2 | Schaalvoordelen | 5 |
| 2.2.3 | Berekeningsfouten in de Erlang C-formule | 6 |
| 3 | Artikel: <i>Nurse Staffing in Medical Units: A Queueing Perspective</i> | 8 |
| 3.1 | Afleiden stationaire verdeling van de Markovketen | 8 |
| 3.2 | Blokkeringskans | 8 |
| 3.3 | Schaalvoordelen | 9 |
| 4 | Catharina ziekenhuis | 12 |
| 4.1 | 7-west: Verpleegafdeling Cardiologie | 12 |
| 4.2 | Gegevens | 12 |
| 4.2.1 | Kamers | 12 |
| 4.2.2 | Bezetting verpleging | 13 |
| 4.2.3 | Hulpvraag | 14 |
| 5 | QED in het Catharina ziekenhuis | 15 |
| 5.1 | Huidige situatie | 15 |
| 5.2 | Schaalvoordelen | 18 |
| 6 | Conclusie | 20 |
| A | Toelichting formule 2 | 21 |
| A.1 | $k = 0, 1, 2, \dots, s$ | 21 |
| A.2 | $k = s + 1, s + 2, \dots, n$ | 22 |
| B | Herschrijven $\mathcal{B}_n(s, T)$ | 23 |
| C | Herschrijven A_n, B_n en D_n | 25 |
| D | Kansen in de limiet berekend | 27 |
| E | Toelichting formule 3 | 29 |
| | Literatuurlijst | 29 |

1 Inleiding

Ook ziekenhuizen hebben in de huidige tijd last van een economische crisis. Ze zijn daarom vaak op zoek naar manieren om kosten te reduceren. Eén manier van reduceren is het verminderen van personeel, maar dit kan niet zomaar gedaan worden. Daarom is het interessant voor een ziekenhuis om op een wiskundige manier de hulpvraag in een ziekenhuis te benaderen. Op dit moment wordt personeelsinzet gebaseerd op vage schattingen. Zo passen ze bij sommige afdelingen een 30 jaar oude vuistregel toe waarbij voor elke vier patiënten een verpleger ingezet wordt. Maar is dit eigenlijk wel nodig? Of zijn dit er misschien juist wel te weinig?

In dit onderzoek bestuderen we met verschillende modellen gebaseerd op wachtrijtheorie een ziekenhuisafdeling. We passen een model toe op de Cardiologie afdeling van het Catharina ziekenhuis te Eindhoven en kijken wat het resultaat is van de huidige situatie. Uiteindelijk wordt er gekeken naar de verschillende mogelijkheden die het ziekenhuis heeft met betrekking tot het variëren van de personeelsinzet en de invloed daarvan.

2 Het QED regime, Erlang B en C

Een ziekenhuis is een systeem waar klanten moeten wachten op bediening. Met wachtrijtheorie kunnen deze systemen beschreven en bestudeerd worden. Halfin en Whitt ^[1] hebben een theorie ontwikkeld die toegepast kan worden op systemen waarbij gebruik gemaakt wordt van een groot aantal servers. In de theorie van Halfin en Whitt, ook wel het *Quality and Efficiency Driven (QED) regime* genoemd, wordt bestudeerd wat er met een systeem gebeurt zodra het aantal servers groter wordt en tegelijkertijd de druk op het systeem toeneemt.

Het QED regime wordt in dit hoofdstuk op twee situaties die in een ziekenhuis voorkomen toegepast.

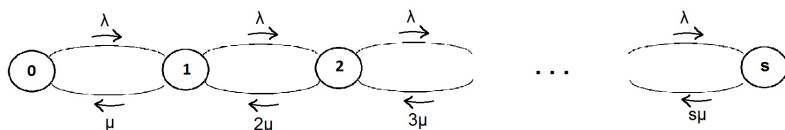
In de eerste situatie wordt er gekeken naar een ziekenhuisafdeling die s verplegers beschikbaar heeft. Zodra alle verplegers bezet zijn, kan er geen patiënt meer geholpen worden. De patiënten die dan nog arriveren en vragen om hulp komen niet op een wachtlijst te staan, maar worden genegeerd. Dit is een ongewenste situatie en wanneer dit gebeurt zegt men dat het systeem blokkeert. Dit systeem wordt een Erlang-B model genoemd.

Bij de tweede situatie wordt er eveneens gekeken naar een ziekenhuis met s verplegers op een afdeling, maar in deze situatie ontstaat wel een wachtrij zodra alle verplegers bezet zijn. Dit wordt het Erlang-C model genoemd.

2.1 Erlang B

2.1.1 Blokkeringskans

Neem een systeem met s verplegers. De patiënten komen aan volgens een Poisson-proces met intensiteit λ . Dit is het gemiddeld aantal personen dat aankomt per tijdseenheid. De tijd die een verpleger nodig heeft om een patiënt te helpen is exponentieel verdeeld met gemiddelde $\frac{1}{\mu}$. Dit levert het volgende model op:



De kans dat er k (met $k \leq s$) verplegers bezet zijn is

$$P_k = \frac{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}.$$

Vanaf nu wordt μ zonder verlies van algemeenheid op één gezet.

Voor een ziekenhuis is het belangrijk om te weten hoe groot de kans is dat een systeem blokkeert. Dit is de blokkeringskans $\mathcal{B}(\lambda, s)$. Het aantal verplegers s kan bepaald worden door λ volgens de theorie van Halfin en Whitt:

$$s = \lambda + \beta\sqrt{\lambda}. \quad (1)$$

met β een constante tussen $-\infty$ en ∞ .

De blokkeringskans is als volgt:

$$\mathcal{B}(\lambda, s) = \frac{\mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda) = s)}{\mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda) \leq s)} = \frac{\frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}}{\sum_{j=0}^s \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}} = \frac{\frac{\lambda^s}{s!}}{\sum_{j=0}^s \frac{\lambda^j}{j!}}$$

$$\mathcal{B}(\lambda, s) = \frac{\mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda) = s)}{\mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda) \leq s)} =: \frac{N_\lambda}{D_\lambda} .$$

2.1.2 Schaalvoordelen

Voor een instelling zoals een ziekenhuis kan het voordelig zijn om twee of meerdere afdelingen samen te voegen. Daarom is het interessant om te kijken wat er met het systeem gebeurt zodra het groeit. Definieer de kansdichtheid en verdelingsfunctie van een standaard normale random variabele x als X normaal verdeeld is met gemiddelde nul en variantie één:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{en} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt .$$

Er wordt bekeken wat er met D_λ en N_λ gebeurt zodra λ naar oneindig gaat en gekoppeld is aan s volgens (1):

$$D_\lambda = \mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda) \leq s) = \mathbb{P}\left(\frac{\text{Pois}(\lambda) - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{s - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{N}(0, 1) \leq \beta) = \Phi(\beta) \quad \text{als } \lambda \rightarrow \infty .$$

Hierboven wordt de Centrale Limiet Stelling toegepast.

Verder geldt dat:

$$N_\lambda = e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s!} \simeq e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s}} = \left(\frac{\lambda}{s}\right)^s e^{s-\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(s\left(1 - \frac{\lambda}{s} + \log\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right)\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{s}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{s}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s - \lambda}{\sqrt{s}}\right)^2\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi \lambda}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right) .$$

Zodat:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} \cdot N_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} = \phi(\beta) .$$

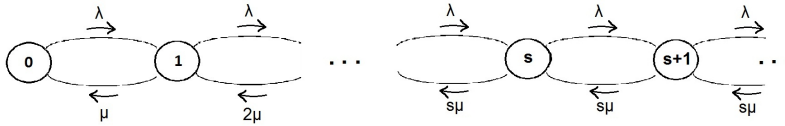
Hieruit volgt in de limiet een eenvoudige functie voor de blokkeringskans:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} \frac{N_\lambda}{D_\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} \mathcal{B}(\lambda, s) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta)} .$$

2.2 Erlang C

2.2.1 Blokkeringskans

Neem een systeem met s verplegers. Patiënten arriveren volgens een Poisson-proces met intensiteit λ . Dit is het gemiddeld aantal personen dat aankomt per tijdseenheid. De tijd die een verpleger nodig heeft om een patiënt te helpen is exponentieel verdeeld met gemiddelde $\frac{1}{\mu}$. Dit levert het volgende model op:



De stationaire verdeling bestaat onder de aanname: $\lambda < s\mu$. Laat P_k staan voor de stationaire kans dat k patiënten medische hulp nodig hebben. Dan geldt:

$$\lambda P_k = \begin{cases} (k+1)\mu P_{k+1} & k = 0, 1, \dots, s-1 \\ s\mu P_{k+1} & k = s, s+1, \dots \end{cases}$$

Pas recursie toe en dan volgt:

$$\lambda P_k = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} P_0 & k = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{\lambda^k}{s! s^{k-s}} P_0 & k = s, s+1, \dots \end{cases}$$

Er moet gelden dat $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$. Dit wordt verder uitgeschreven en gebruikt om P_0 te berekenen:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} P_0 + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s! s^{k-s}} P_0 = P_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\lambda^s \lambda^{k-s}}{s! s^{k-s}} \right) \\ &= P_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^s}{s!} \sum_{k=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s}\right)^{k-s} \right) = P_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^s}{s!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s}\right)^j \right) \\ &= P_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^s}{s!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s}} \right) \\ P_0 &= \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^s}{s!(1 - \frac{\lambda}{s})} \right]^{-1} \end{aligned}$$

De kans dat een patiënt moet wachten (dus meer dan $s-1$ andere patiënten aantreft) wordt gegeven door:

$$\mathcal{C}(\lambda, s) = \sum_{k=s}^{\infty} P_k = P_0 \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s! s^{k-s}} = P_0 \left(\frac{\lambda^s}{s!(1 - \frac{\lambda}{s})} \right)$$

P_0 invullen geeft:

$$\mathcal{C}(\lambda, s) = \frac{\frac{\lambda^s}{s!(1-\frac{\lambda}{s})}}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^s}{s!(1-\frac{\lambda}{s})}}.$$

2.2.2 Schaalvoordelen

Ook voor dit systeem is het interessant om te bekijken wat er gebeurt zodra het systeem groeit. Er is bekend wat er in het Erlang-B systeem gebeurt. Hiervan wordt gebruikt gemaakt bij de Erlang-C formule. Dit geeft:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\lambda, s) &= \frac{\frac{\lambda^s}{s!(1-\frac{\lambda}{s})}}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^s}{s!(1-\frac{\lambda}{s})}} = \frac{\frac{\lambda}{s!(1-\frac{\lambda}{s})}}{\frac{1}{\lambda^{s-1}} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{s!(1-\frac{\lambda}{s})}} = \frac{\frac{\lambda(s-1)!}{s!(1-\frac{\lambda}{s})}}{\frac{(s-1)!}{\lambda^{s-1}} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda(s-1)!}{s!(1-\frac{\lambda}{s})}} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{s(1-\frac{\lambda}{s})}}{\frac{1}{\mathcal{B}(\lambda, s-1)} + \frac{\lambda}{s(1-\frac{\lambda}{s})}} = \frac{\frac{\lambda}{s-\lambda}}{\frac{1}{\mathcal{B}(\lambda, s-1)} + \frac{\lambda}{s-\lambda}} = \left[\frac{\frac{1}{\mathcal{B}(\lambda, s-1)} + \frac{\lambda}{s-\lambda}}{\frac{\lambda}{s-\lambda}} \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{\frac{1}{\mathcal{B}(\lambda, s-1)}}{\frac{\lambda}{s-\lambda}} + 1 \right]^{-1} = \left[1 + \frac{s-\lambda}{\lambda} \frac{1}{\mathcal{B}(\lambda, s-1)} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{s-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \mathcal{B}(\lambda, s-1)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Er wordt nu gebruik gemaakt van het QED regime: het aantal verplegers wordt bepaald door de aankomstintensiteit. Hierbij wordt de factor β gebruikt die vrij gekozen kan worden: $s = \lambda + \beta\sqrt{\lambda}$.

Dit wordt toegepast in de Erlang-C formule en dan is er bekend waar de limiet naartoe gaat:

$$\mathcal{C}(\lambda, s) = \left[1 + \beta \frac{1}{\sqrt{\lambda} \mathcal{B}(\lambda, s-1)} \right]^{-1} \rightarrow_{\lambda \rightarrow \infty} \left[1 + \beta \frac{\Phi(\beta)}{\phi(\beta)} \right]^{-1}.$$

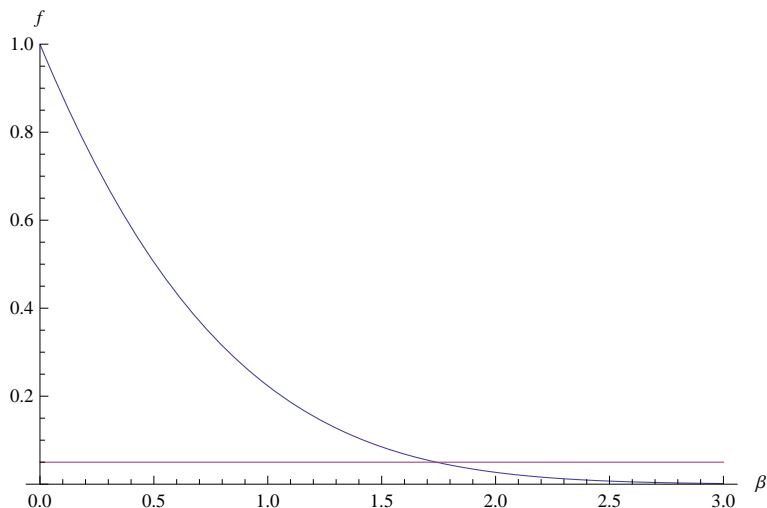
Net zoals bij de Erlang-B formule gaat ook hier gaat de blokkeringskans $\mathcal{C}(\lambda, s)$ in de limiet naar een eenvoudige functie.

2.2.3 Berekeningsfouten in de Erlang C-formule

De Erlang-C formule hangt alleen af van β . De kans op blokkering wordt ϵ genoemd.

$$f(\beta) = \left[1 + \beta \frac{\Phi(\beta)}{\phi(\beta)} \right]^{-1} = \epsilon$$

Dit is een continue functie en ziet er als volgt uit:



Figuur 1: β uitgezet tegen $f(\beta)$

Tabel 1 toont de fout in s bij diverse waarde van λ waarbij de kans op blokkering op 5% wordt gezet. Dus $\epsilon = 0.05$. De bijbehorende β bij deze ϵ wordt berekend: $\beta_{0.05} = f^{-1}(0.05)$. Hieruit volgt: $\beta_{0.05} = 1.73984$. Deze β wordt vanaf nu β_* genoemd.

Bij deze β_* worden verschillende waarden van λ genomen en daarbij worden dan de bijbehorende s -waarden berekend door middel van $s = \lambda + \beta_* \sqrt{\lambda}$. Daarna worden de s -waarden via de C-formule berekend. Dus de s die hoort bij: $\mathcal{C}(\lambda, s) = \epsilon$. Daarna wordt de fout berekend.

| λ | $s(= \lambda + \beta_* \sqrt{\lambda})$ | s (via de $\mathcal{C}(\lambda, s) = \epsilon$) | de fout in s |
|-----------|---|--|----------------|
| 1 | 2.73984 | 3.41549 | 0.675651 |
| 10 | 15.5018 | 16.2274 | 0.725516 |
| 100 | 117.398 | 118.145 | 0.746916 |
| 1000 | 1055.02 | 1055.77 | 0.754532 |

Tabel 1: De fout die gemaakt wordt bij de s -waarden, bij $\epsilon = 0.05$

Er wordt ook gekeken naar de fout die gemaakt wordt bij ϵ . Weer worden verschillende waarden van λ genomen en daarbij worden de bijbehorende s -waarden berekend via $s = \lambda + \beta_* \sqrt{\lambda}$. Deze worden ingevuld bij $\mathcal{C}(\lambda, s)$ en ϵ wordt berekend. Daarna wordt de ϵ -fout, het verschil met de gegeven ϵ ($= 0.05$), berekend.

| λ | $s(= \lambda + \beta_* \sqrt{\lambda})$ | ϵ (via de $\mathcal{C}(\lambda, s)$) | de fout in ϵ |
|-----------|---|--|-----------------------|
| 1 | 2.73984 | 0.129943 | 0.0799426 |
| 10 | 15.5018 | 0.0768174 | 0.0268174 |
| 100 | 117.398 | 0.0586133 | 0.00861331 |
| 1000 | 1055.02 | 0.0527354 | 0.00273539 |

Tabel 2: De fout die gemaakt wordt bij ϵ ($= 0.05$)

Ditzelfde kan gedaan worden voor een andere ϵ . Bijvoorbeeld $\epsilon = 0.02$. Dan geldt: $\beta_* = 2.11674$.

| λ | $s(= \lambda + \beta_* \sqrt{\lambda})$ | s (via de $\mathcal{C}(\lambda, s) = \epsilon$) | de fout in s |
|-----------|---|--|----------------|
| 1 | 3.11674 | 4.01273 | 0.895986 |
| 10 | 16.6937 | 17.6633 | 0.969587 |
| 100 | 121.167 | 122.17 | 1.00248 |
| 1000 | 1066.94 | 1067.95 | 1.01444 |

Tabel 3: De fout die gemaakt wordt bij de s -waarden bij ϵ ($= 0.02$)

| λ | $s(= \lambda + \beta_* \sqrt{\lambda})$ | ϵ (via de $\mathcal{C}(\lambda, s)$) | de fout in ϵ |
|-----------|---|--|-----------------------|
| 1 | 3.11674 | 0.0771114 | 0.0571114 |
| 10 | 16.6937 | 0.037492 | 0.017492 |
| 100 | 121.167 | 0.0253695 | 0.00536945 |
| 1000 | 1066.94 | 0.02167598 | 0.00167598 |

Tabel 4: De fout die gemaakt wordt bij ϵ ($= 0.02$)

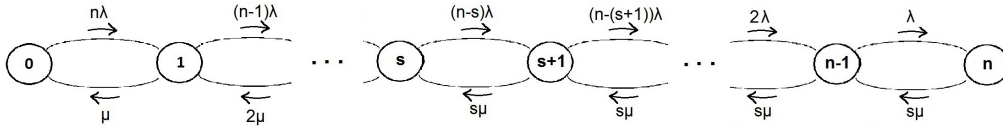
Zoals in alle tabellen blijkt, wordt de relatieve fout in ϵ of s al snel kleiner naarmate λ groter wordt. Dit betekent dat bij een relatief kleine waarde van λ de eenvoudige formule ($f(\beta)$) een goede benadering geeft.

3 Artikel: *Nurse Staffing in Medical Units: A Queuing Perspective*

In het artikel van de Véricourt en Jennings [2] wordt een ziekenhuisafdeling beschouwd. Er zijn n patiënten die soms hulp nodig hebben en soms niet. Er zijn s verplegers die de patiënten kunnen verzorgen. Er is sprake van een gesloten systeem. Er zullen altijd n patiënten zijn, die gaan niet snel weg en als ze weg gaan worden ze meteen vervangen door nieuwe patiënten. Een patiënt kan twee statussen hebben: stabiel en hulpbehoevend. Stabiele patiënten worden hulpbehoevend na een exponentieel verdeelde *activation time* met gemiddelde $\frac{1}{\lambda}$. Hulpbehoevende patiënten worden door de zusters verzorgd via First Come First Served. De serviceduur is exponentieel verdeeld met gemiddelde $\frac{1}{\mu}$.

3.1 Afleiden stationaire verdeling van de Markovketen

Bij dit systeem hoort het volgende model:



Uit het model hierboven volgt:

$$(n - k)\lambda P_k = \begin{cases} (k + 1)\mu P_{k+1} & k = 0, 1, \dots, s \\ s\mu P_{k+1} & k = s + 1, \dots, n \end{cases}$$

Na toepassing van recursie volgt:

$$P_k = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{n}{k} P_0 & k = 1, 2, \dots, s - 1 \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{n}{k} \frac{k!}{s!} s^{s-k} P_0 & k = s, s + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

3.2 Blokkeringskans

De blokkeringskans is de kans dat het systeem vastloopt. Dit is de situatie als het aantal hulpbehoevende patiënten precies gelijk is aan het aantal verplegers en vervolgens nog een patiënt hulpbehoevend wordt. Indien deze patiënt een wachttijd langer dan T heeft, is het systeem vastgelopen.

Eerst wordt de kans dat een patiënt T tijd moet wachten, terwijl er al k ($\geq s$) hulpbehoevende zijn, bekeken. Hiervoor is de verdeling van de wachttijd nodig: deze is Erlang

verdeeld met parameters $(k - s + 1)$ en $s\mu$. Deze kans is:

$$\begin{aligned} P(W_k > T) &= 1 - P(W_k < T) = 1 - P(\text{Erlang}(s\mu) \leq T) \\ &= 1 - \left(1 - \sum_{j=0}^{k-s+1-1} \frac{e^{-s\mu T}}{j!} (s\mu T)^j\right) \\ &= e^{-s\mu T} \sum_{j=0}^{k-s} \frac{(s\mu T)^j}{j!} . \end{aligned}$$

Nu kan de blokkeringskans berekend worden. Dit gebeurt door te kijken naar de situaties waarbij $k \geq s$ en die te vermenigvuldigen met de kans dat er nog iemand hulpbehoevend wordt en langer dan T moet wachten.

Noteer $\lambda_k \equiv \lambda(n - k)$.

De blokkeringskans $\mathcal{B}_n(s, T)$ is:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(s, T) &= \sum_{k=s}^n \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i} P(W_k > T) \\ &= e^{-s\mu T} \sum_{k=s}^n \frac{(n - k) P_k}{\sum_{i=0}^n (n - i) P_i} \sum_{j=0}^{k-s} \frac{(s\mu T)^j}{j!} . \end{aligned}$$

3.3 Schaalvoordelen

Ook bij dit systeem wordt er gekeken naar de situatie waarbij het aantal verplegers naar oneindig gaat. Er wordt geprobeerd een eenvoudige uitdrukking te vinden voor $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{B}_n(s, T)$.

De volgende variabelen worden gedefinieerd: $r \equiv \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, $\hat{r}_T = \frac{r}{1 + r\mu T}$ en $\bar{r} \equiv 1 - r$.

Het getal β wordt gedefinieerd volgens het artikel van de Véricourt en Jennings:

$$\left(\frac{s_n}{n} - \hat{r}_T\right) \sqrt{n} \rightarrow \beta .$$

Eerst wordt $\mathcal{B}_n(s, T)$ alvast omgeschreven:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(s, T) &= \left(\sum_{k=0}^n (n - k) P_k\right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=s_n}^n P_k (n - k) e^{-s\mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n \mu T)^j}{j!}\right) \\ &= \frac{D_n}{B_n} \left(1 + \frac{A_n}{B_n}\right)^{-1} . \end{aligned}$$

Waarin:

$$A_n \equiv \sum_{k=0}^{s_n-1} \binom{n}{k} (n-k) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k ,$$

$$B_n \equiv \sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{s_n}\right)^k$$

en

$$D_n \equiv \sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{s_n}\right)^k e^{-s_n\mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n\mu T)^j}{j!} .$$

Het herschrijven van $\mathcal{B}_n(s, T)$ zoals hierboven wordt uitgebreid beschreven in Appendix B. A_n , B_n en D_n kunnen ook wel geschreven worden als:
(Hoe deze afleiding precies gaat is terug te lezen in Appendix C.)

$$A_n = n \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \cdot P(X_n \leq s_n - 1) ,$$

$$B_n = \frac{n!}{s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{s_n}\right)^{n-1} e^{\frac{s_n}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}} \cdot P(Y_n \leq n - s_n - 1)$$

en

$$D_n = \frac{n!}{s_n} s_n^{s_n} \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{s_n}\right)^{n-1} e^{\frac{s_n}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}} \cdot P(Z_n \leq n - s_n - 1) .$$

Hierbij is gebruikt gemaakt van drie verschillende verdelingsfuncties met de volgende variabelen:

- X_n binomiaal verdeeld met parameters $n - 1$ en r ;
- Y_n Poisson verdeeld met parameter $\frac{s_n}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$;
- $Z_n \equiv Z_n^1 + Z_n^2$ Poisson verdeeld met parameter $\frac{s_n}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} + s_n\mu T$.

De laatste delen van A_n , B_n en D_n kunnen hergeschreven worden door middel van het toepassen van de Centrale Limiet Stelling. Dit gebeurt in Appendix D. De resultaten hiervan zijn:

- $A_n : \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq s_n - 1) = 0$;
- $B_n : \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq n - s_n - 1) = 1$;
- $D_n : \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq n - s_n - 1) = \Phi\left(-\frac{\beta}{r} \sqrt{\frac{(1+r\mu T)^3}{\bar{r}+r\mu T}}\right)$.

In de blokkeringskans staat $\frac{A_n}{B_n}$, uitgewerkt wordt dit:

$$\frac{A_n}{B_n} = C_n \frac{P(X_n \leq s_n - 1)}{P(Y_n \leq n - s_n - 1)} .$$

Waarin,

$$C_n = \frac{s_n!}{(n-1)!} \left(\frac{s_n}{\frac{\lambda}{\mu}} \right)^{n-1} \frac{(1 + \frac{\lambda}{\mu})^{n-1}}{s_n^{s_n}} e^{\frac{s_n}{\frac{\lambda}{\mu}}} .$$

In de limiet is C_n eindig. Dit betekent dat $\frac{A_n}{B_n}$ in de limiet naar nul gaat. Nu kan de blokkeringskans berekend worden:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_n(s, T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{B_n} \left(1 + \frac{A_n}{B_n} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{B_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(Z_n \leq n - s_n - 1)}{P(Y_n \leq n - s_n - 1)} \\ &= \Phi \left(-\frac{\beta}{r} \sqrt{\frac{(1 + r\mu T)^3}{\bar{r} + r\mu T}} \right) = \Phi \left(-\frac{\beta}{\hat{r}_T} \sqrt{\frac{1 + r\mu T}{\bar{r} + r\mu T}} \right) . \end{aligned}$$

4 Catharina ziekenhuis

De theorie die tot nu toe behandeld is, kan worden toegepast op de praktijk. Het Catharina ziekenhuis heeft meegewerkt aan dit onderzoek. Er is verschillende dagen meegelopen binnen het Catharina ziekenhuis om na te gaan of en hoe het model toegepast kan worden in dit ziekenhuis.

4.1 7-west: Verpleegafdeling Cardiologie

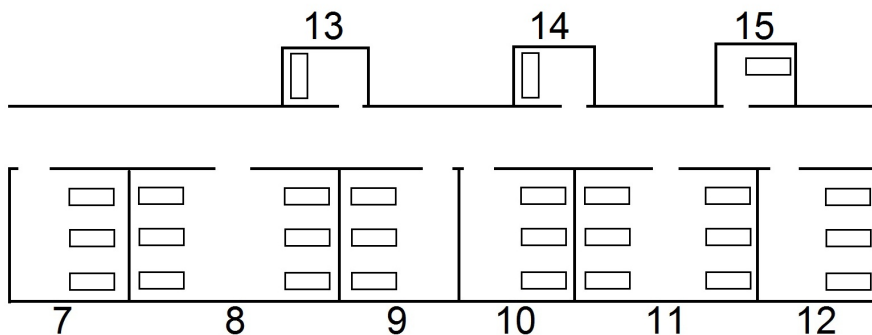
Op de verpleegafdeling Cardiologie worden er patiënten met hartproblemen verzorgd. Vaak zijn het patiënten die last hebben van pijn op de borst, ritmestoornissen en een verminderde pompwerking van het hart. Sommige patiënten worden hier opgenomen voor revalidatie na een opname op de hartbewaking of de verpleegafdeling Eerste Hart Hulp. De behandeling op deze verpleegafdeling bestaat vaak uit medicijnen, maar patiënten kunnen er ook worden voorbereid op een dotterbehandeling, een hartkatheterisatie of een hartoperatie. Als een patiënt langdurig wordt opgenomen, krijgt hij/zij op de afdeling een vaste verpleegkundige toegewezen.

Afdeling 7-west is vrijwel altijd volledig bezet. Alle operaties worden gepland en er is een wachtlijst voor deze afdeling. Mocht een patiënt langer op de afdeling verblijven dan verwacht, dan kan hierdoor een andere patiënt niet op de afdeling terecht. Deze wordt dan opgevangen door afdeling 6-oost, hier liggen dus ook een aantal hartpatiënten.

4.2 Gegevens

4.2.1 Kamers

Op de afdeling staan 27 bedden onderverdeeld in verschillende kamers. Er zijn één-, drie- en zespersoons kamers.



Eénpersoonskamers worden vaak gegeven aan mensen die een besmettelijke ziekte hebben, bijvoorbeeld een bacterie in het hart. Deze patiënten liggen vaak ook voor een langere periode in het ziekenhuis.

De afdeling is onderverdeeld in een A- en een B-zijde. Kamers 7,8,9 en 10 behoren tot de A-zijde en kamers 11,12,13,14 en 15 behoren tot zijde B. De verplegers worden tijdens de planning al ingedeeld op de A- of de B-zijde. Gedurende de dag zijn er verschillende taken die de verpleegsters moeten uitvoeren. Elke morgen om 8.00 uur wordt aan beide zijden nagegaan welke verplegers welke taken gaan uitvoeren die dag. Deze taken bestaan uit (per zijde):

- **Visite lopen**

Eén verpleger krijgt de taak om visite te lopen. Elke dag loopt een arts langs alle patiënten en bespreekt dan met de patiënten hoe het met ze gaat en hoe hun verdere behandeling eruit zal zien. De taak van de verpleger is dit te onthouden en later terug te koppelen aan zijn collega's. Zo zijn alle verplegers op de hoogte van de status van elke patiënt. De visiteloper zorgt er ook voor dat er aan het einde van de dag alle informatie wordt overgedragen aan de avondshift.

- **Intakes afnemen**

Als er nieuwe patiënten op de afdeling komen, volgt er een intake gesprek met deze persoon. Er worden dan een aantal standaard zaken besproken, er wordt bloed gemeten en het hartritme wordt gemeten. Er kunnen nog meer handelingen plaatsvinden, maar dat is patiëntafhankelijk.

- **Kamerverantwoordelijk**

Samen met een collega krijgt een verpleger één, twee of drie kamers (afhankelijk van de grote van de kamer) toegewezen. Hieronder valt het verschonen van bedden, het helpen met wassen, het brengen en halen van een patiënt naar de operatiekamer, een praatje maken met de patiënten en het beantwoorden van vragen van patiënten en familie. Bij deze dagtaak is de kans op onverwachte hulpvraag groter dan bij beide andere.

4.2.2 Bezetting verpleging

Overdag worden er op de afdeling altijd minimaal elf verplegers ingepland. In de avond shift zijn er altijd vier verplegers en 's nachts zijn er twee verplegers. Er wordt onderscheid gemaakt tussen junior en senior verplegers. Senior verplegers zijn meer ervaren en er dienen overdag altijd minimaal twee senior verplegers op de afdeling te zijn. Niet alle verplegers zijn even bekwaam; er zijn cursussen die de werknemers kunnen volgen om zo bijvoorbeeld meer medische handelingen te mogen uitvoeren bij patiënten. Hierdoor kan een verpleger een bepaalde taak toegewezen krijgen op een dag, waardoor hij of zij minder beschikbaar zal zijn voor het bieden van onverwachte hulp.

4.2.3 Hulpvraag

Iedere patiënt heeft een bel die hij kan indrukken wanneer hij graag hulp van een verpleger heeft. Dit kan zijn voor bijvoorbeeld hulp met het naar het toilet gaan of een vraag over de radio op de kamer. Buiten op de gang gaat er dan een lampje branden waaraan de verplegers kunnen zien dat er hulp nodig is en de pieper van de betreffende kamer gaat af. Vanzelfsprekend gebruikt de ene patiënt de bel meer dan de andere.

5 QED in het Catharina ziekenhuis

In dit hoofdstuk wordt gekeken of het model dat beschreven wordt in hoofdstuk drie toegepast kan worden op de Verpleegafdeling Cardiologie van het Catharina ziekenhuis.

5.1 Huidige situatie

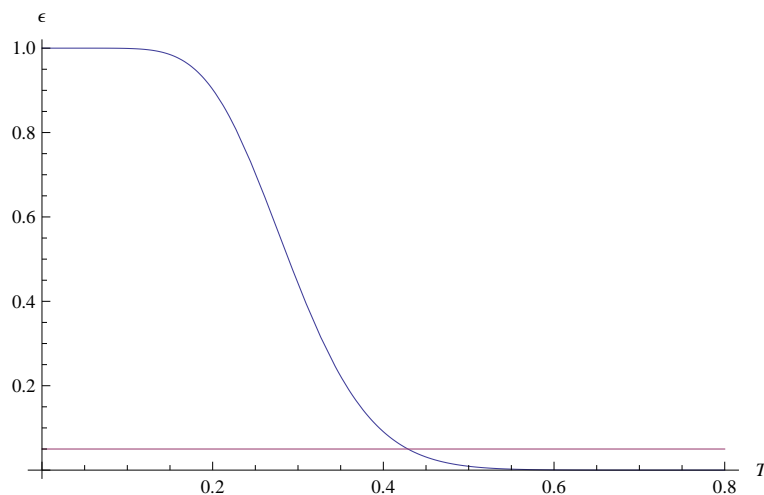
Op de afdeling staat het aantal patiënten n en het aantal verplegers s vast. Hierin kan niet gevarieerd worden, dus er wordt met de volgende formule gewerkt:

$$\mathcal{B}_n(s, T) = e^{-s\mu T} \sum_{k=s}^n \frac{(n-k)P_k}{\sum_{i=0}^n (n-i)P_i} \sum_{j=0}^{k-s} \frac{(s\mu T)^j}{j!}$$

Om deze formule toe te kunnen passen, zijn waarden voor λ en μ (deze zit in P_k) nodig. In het ziekenhuis is waargenomen dat het realistisch is om te zeggen dat patiënten overdag gemiddeld één keer per uur om hulp vragen. Dit geeft λ een waarde van 1. Verder is ook waargenomen dat de gemiddelde duur van de hulp ongeveer 10 minuten is, hieruit volgt dat $\mu = 6$.

Er is al eerder vermeld dat $n = 27$ en $s = 11$. Echter, er zijn niet altijd 11 verplegers ook daadwerkelijk bezig met onverwachte hulp. De ingeplande werkzaamheden van verplegers en de verplegers die geen onverwachte hulp bieden worden daarom anders meegerekend: er wordt daarom voor gekozen om in het model met $s = 5$ te werken.

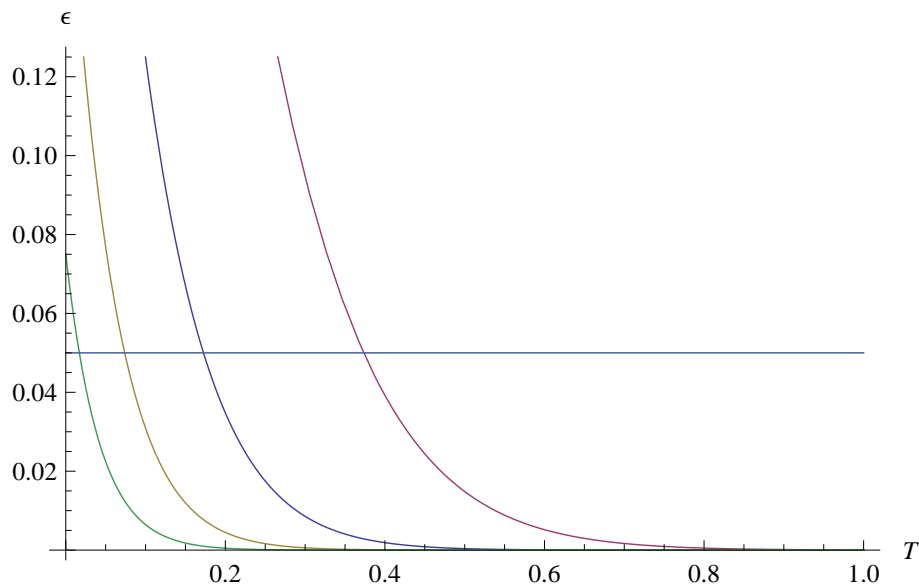
Voor T is er geen waarde, omdat het ziekenhuis geen tijdsgrens heeft waaraan ze meten. Ze willen graag zo snel mogelijk al hun patiënten helpen. Maar stel dat ze wel een tijdslimiet zouden stellen, dan is het nuttig om te kijken hoe groot de kans is dat er een patiënt langer dan deze tijdsgrens moet wachten. Oftewel: hoe groot is de kans dat het systeem blokkeert bij een tijdsgrens T ? Dit kan van de onderstaande grafiek afgelezen worden.



Figuur 2: Huidige situatie met een variërende tijdsgrens

In dit figuur is ook de lijn $\epsilon = 0,05$ getrokken. Deze lijn snijdt de blokkeerkans bij het punt $T = 0,212$. Dit betekent dat er 5% kans is dat een patiënt langer dan $0,173 \cdot 60 \simeq 10$ minuten moet wachten op hulp.

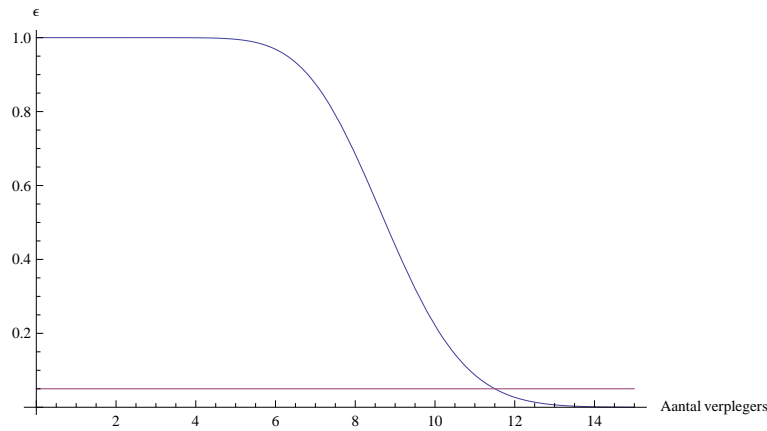
Stel dat het ziekenhuis erover nadenkt om het aantal verplegers om de afdeling te veranderen, wat gebeurt er dan met tijdsgrens T ? Door verschillende waarde van s in te vullen in de formule en deze te plotten in een grafiek kan het verschil zichtbaar gemaakt worden:



Figuur 3: Situaties met $s = 4, 5, 6$ en 7

De meest linkse lijn is de grafiek die hoort bij $s = 7$. Naar rechts gaande volgen de grafieken voor $s = 6, 5$ en 4 . Uit de grafiek is af te lezen dat bij het verminderen van het aantal verplegers naar 4 , de tijdsgrens omhoog gaat naar 22 minuten. Wordt er in de huidige situatie één verpleger meer ingezet, dan gaat de tijdsgrens omlaag naar 4 minuten. Zet het ziekenhuis 7 verplegers in, dan gaat de tijdsgrens zelfs naar 1 minuut.

Het kan ook dat het ziekenhuis op een bepaald moment besluit wel een grenswaarde T in te stellen die ze graag willen bereiken als het gaat om de wachttijd van patiënten. Met het beschreven model kan er berekend worden hoeveel verplegers hiervoor nodig zijn. Laten we aannemen dat het ziekenhuis graag wil dat elke patiënt binnen 5 minuten geholpen wordt. Dit is de helft van de tijd die het ziekenhuis nu haalt.

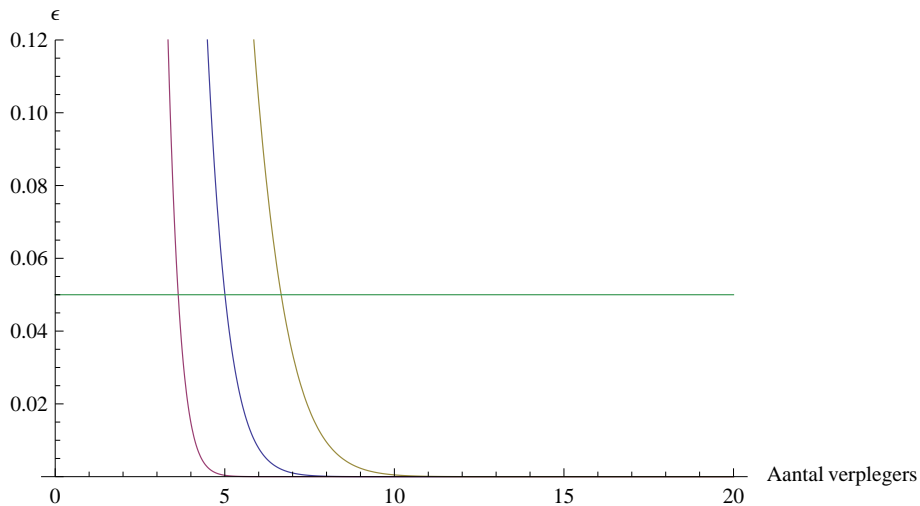


Figuur 4: Huidige situatie met een variërend aantal verplegers

Uit bovenstaand figuur kan berekend worden hoeveel verplegers er nodig zijn, zou de kans op mislukking kleiner dan 5% zijn.

Hiervoor moet het ziekenhuis 6 verplegers inzetten. Hieruit blijkt dat er in de huidige situatie slechts 1 verpleger meer nodig is om de tijdsgrens te halveren.

Ook met de tijdsgrens kan geëxperimenteerd worden. Er is al berekend hoeveel verplegers er nodig zijn voor het halveren van deze grens. Maar hoeveel verplegers zouden er nodig zijn als we een tijdsgrens van bijvoorbeeld een half uur zouden accepteren? Hoeveel extra verplegers zouden er nodig zijn voor een tijdsgrens van 2 minuten? Dit is in onderstaande grafiek te zien.



Figuur 5: Situaties met $T = 30, 10$ en 2 minuten

Voor een tijdsgrens van een half uur zijn er 4 verplegers nodig en voor een tijdsgrens van slechts 2 minuten zijn 7 verplegers nodig.

5.2 Schaalvoordelen

Uit het artikel blijkt dat er voordeel uit schaling gehaald kan worden. Dit wil zeggen dat als de afdeling groter wordt er in verhouding minder verplegers nodig zijn.

Voorbeeld

Er wordt bekeken hoeveel verpleegsters er nodig zijn als de afdeling twee keer zo groot wordt, dus bij $n = 54$. Eerder werd berekend dat in de huidige situatie er 5% kans is op blokkering bij een tijdgrens $T = 0,173$. Hoeveel verplegers zijn er dan nodig bij dezelfde waarde voor T en ϵ ? Dit kan berekend worden door $\mathcal{B}_n(s, T)$ gelijk te stellen aan 0,05.

Dit aantal is negen.

Waarschijnlijk zou het ziekenhuis ervoor kiezen bij een twee keer zo grote afdeling, ook twee keer zoveel verplegers in te zetten. In de oude situatie waren er vijf verplegers nodig, dus in de nieuwe situatie zouden dat er tien zijn. Toch laat het model zien dat er geen tien, maar slechts negen verplegers nodig zijn. Dit betekent dat bij het verdubbelen van de grootte van de afdeling 7-west het ziekenhuis één fte zou besparen.

Berekeningsfouten

1

In dit voorbeeld wordt s op twee manieren berekend en gekeken wat het verschil ertussen is. De eerste manier is net zoals in het vorige voorbeeld: $\mathcal{B}_n(s, \frac{1}{6}) = 0,05$ oplossen geeft s_n . Bij de tweede manier wordt s berekend via $s_\beta = \beta\sqrt{n} + \hat{r}_T \cdot n$. Daarna wordt het verschil uitgerekend en in de laatste kolom wordt het percentuele verschil berekend.

| n | s_n | s_β | $s_n - s_\beta$ | Fout in % |
|------|-------|-----------|-----------------|-----------|
| 27 | 5,0 | 4,35 | 0,65 | 13 |
| 30 | 5,4 | 4,77 | 0,63 | 11,7 |
| 40 | 6,8 | 6,18 | 0,62 | 9,1 |
| 60 | 9,5 | 8,94 | 0,56 | 5,9 |
| 100 | 14,8 | 14,3 | 0,50 | 0,50 |
| 200 | 27,9 | 27,6 | 0,30 | 0,15 |
| 1000 | 131 | 130,4 | 0,60 | 0,06 |

Tabel 5: De fout die gemaakt wordt in s bij $T = \frac{1}{6}$

De percentuele fout wordt steeds kleiner, dat is ook te verwachten.

2

Er wordt nu gekeken naar de fout die bij ϵ gemaakt wordt als n (en dus ook s) omhoog gaat.

| n | $s(= \beta\sqrt{n} + \hat{r}_T \cdot n)$ | $\mathcal{B}_n(s, T)$ | ϵ fout |
|------|--|-----------------------|-----------------|
| 27 | 4,35 | 0,149 | 0,099 |
| 30 | 4,77 | 0,144 | 0,095 |
| 40 | 6,18 | 0,127 | 0,077 |
| 60 | 8,94 | 0,107 | 0,057 |
| 100 | 14,3 | 0,090 | 0,040 |
| 200 | 27,6 | 0,065 | 0,015 |
| 1000 | 130,4 | 0,056 | 0,0006 |

Tabel 6: De fout die gemaakt wordt in ϵ bij $T = \frac{1}{6}$

In bovenstaande tabel wordt de gemaakte fout in ϵ steeds kleiner. Dit betekent dat $\Phi\left(-\frac{\beta}{\hat{r}_T} \sqrt{\frac{1+r\mu T}{\hat{r}+r\mu T}}\right)$ een steeds betere benadering voor $\mathcal{B}_n(s, T)$ wordt naarmate n en s groter worden. Dat is handig, want deze formule is een stuk eenvoudiger en dus makkelijker mee te werken dan $\mathcal{B}_n(s, T)$.

Zou er bijvoorbeeld worden toegestaan dat de relatieve fout in ϵ 10% mag zijn, dan kan er vanaf ongeveer $n = 60$ al met de eenvoudige formule gerekend worden.

6 Conclusie

Het Catharina ziekenhuis kan door het variëren van het aantal verplegers op de afdeling de wachttijd van patiënten vergroten en verkleinen. In de huidige situatie zijn er 5 verplegers en hierbij is er 5% kans op blokkering bij een tijdsgrens van 10 minuten. Besluit het ziekenhuis het aantal verplegers op te hogen naar 6 of zelfs 7 verplegers, dan horen hier waarde voor T van respectievelijk 4 en 1 minuut bij (bij $\epsilon = 0,05$). Gaat het ziekenhuis over naar 4 verplegers, dan zal de wachttijd van patiënten verhogen naar 22 minuten.

Andersom kan er bij een bepaalde waarde voor T ook het aantal verplegers berekend worden. Als voorbeeld zijn voor T de waarde 2, 10 en 30 minuten genomen. In alledrie de gevallen wordt de kans op blokkering gelijk gesteld aan 5%. Zoals al bekend hoort bij $T = 10$ minuten 5 verplegers. Wil het ziekenhuis een tijdsgrens van 2 minuten bereiken, dan moeten er 7 verplegers ingezet worden. Besluit het ziekenhuis dat de wachttijd van patiënten een half uur mag zijn, dan zijn er maar 4 verplegers nodig.

Het schalen van afdelingen kan voordelig zijn met betrekking tot het aantal verplegers dat ingezet moet worden. Als voorbeeld is er gekeken wat er met het aantal verplegers gebeurt als de afdeling verdubbelt in het aantal patiënten. T en de kans op blokkering worden hier gelijk gehouden. Er zou verwacht worden dat het aantal verplegers ook verdubbelt, maar uit het model blijkt dat er slechts 9 en geen 10 verplegers nodig zijn. Dit is een besparing van één fte voor het ziekenhuis.

Appendix

A Toelichting formule 2

Er wordt gekeken naar twee verschillende delen. Eerst het gedeelte tot s patiënten.

A.1 $k = 0, 1, 2, \dots, s$

De eerste paar stappen worden uitgeschreven:

$$\begin{aligned}n\lambda P_0 &= \mu P_1 \\ P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} n P_0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n-1)\lambda P_1 &= 2\mu P_2 \\ P_2 &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} (n-1) P_1 \\ P_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 n(n-1) P_0\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}(n-2)\lambda P_2 &= 3\mu P_3 \\ P_3 &= \frac{1}{3} \frac{\lambda}{\mu} (n-2) P_2 \\ P_3 &= \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 n(n-1)(n-2) P_0 \\ P_3 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} P_0 \\ P_3 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{n!}{(n-3)! 3!} P_0 \\ P_3 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \binom{n}{3} P_0 .\end{aligned}$$

Dit doet vermoeden dat voor $k = 0, 1, 2, \dots, s$ geldt:

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{n}{k} P_0 .$$

A.2 $k = s + 1, s + 2, \dots, n$

Weer worden de eerste paar stappen uitgeschreven:

$$\begin{aligned}
 (n - s)\lambda P_s &= s\mu P_{s+1} \\
 P_{s+1} &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{n - s}{s} P_s \\
 P_{s+1} &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{n - s}{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \binom{n}{s} P_0 \\
 P_{s+1} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} \binom{n}{s} \frac{n - s}{s} P_0
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 (n - (s + 1))\lambda P_{s+1} &= s\mu P_{s+2} \\
 P_{s+2} &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{n - (s + 1)}{s} P_{s+1} \\
 P_{s+2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2} \binom{n}{s} \frac{n - s}{s} \cdot \frac{n - (s + 1)}{s} P_0 \\
 P_{s+2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2} \frac{n!}{(n - s)! s!} \cdot (n - s)(n - (s + 1)) \frac{1}{s^2} P_0 \\
 P_{s+2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2} \frac{n!}{s!} \cdot \frac{(n - s)(n - (s + 1))}{(n - s)!} \frac{1}{s^2} P_0 \\
 P_{s+2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2} \frac{n!}{s!} \cdot \frac{1}{(n - (s + 2))!} \frac{1}{s^2} P_0 \\
 P_{s+2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2} \frac{n!}{s! (n - (s + 2))!} \cdot \frac{(s + 2)!}{(s + 2)!} s^{-2} P_0 \\
 P_{s+2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2} \frac{n!}{(s + 2)! (n - (s + 2))!} \cdot \frac{(s + 2)!}{s!} s^{s - (s + 2)} P_0 \\
 P_{s+2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2} \binom{n}{s + 2} \cdot \frac{(s + 2)!}{s!} s^{s - (s + 2)} P_0 .
 \end{aligned}$$

Dit doet vermoeden dat voor $k = 0, 1, 2, \dots, s$ geldt:

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{s!} s^{s - k} P_0 .$$

B Herschrijven $\mathcal{B}_n(s, T)$

Eerst worden $\frac{D_n}{B_n}$ en $\frac{A_n}{B_n}$ berekend:

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{B_n} &= \frac{\sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!s_n!} S_n^{s_n} \left(\frac{\lambda}{s_n}\right)^k e^{-s_n\mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n\mu T)^j}{j!}}{\sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!s_n!} S_n^{s_n} \left(\frac{\lambda}{s_n}\right)^k} \\ &= e^{-s_n\mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n\mu T)^j}{j!} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{B_n} &= \frac{\sum_{k=0}^{s_n-1} \binom{n}{k} (n-k) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!s_n!} S_n^{s_n} \left(\frac{\lambda}{s_n}\right)^k} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{s_n-1} \binom{n}{k} (n-k) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0}{\sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{(n-k)}{(n-k)} \frac{n!}{(n-k-1)!s_n!} \frac{k!}{k!} S_n^{s_n} \left(\frac{\lambda}{s_n}\right)^k P_0} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{s_n-1} \binom{n}{k} (n-k) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0}{\sum_{k=s_n}^{n-1} (n-k) \binom{n}{k} \frac{k!}{s_n!} S_n^{s_n-k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{s_n-1} (n-k) P_k}{\sum_{k=s_n}^{n-1} (n-k) P_k}. \end{aligned}$$

Vervolgens wordt de hele formule berekend:

$$\begin{aligned}
\frac{D_n}{B_n} \left(1 + \frac{A_n}{B_n}\right)^{-1} &= e^{-s_n \mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n \mu T)^j}{j!} \cdot \left(1 + \frac{\sum_{k=0}^{s_n-1} (n-k) P_k}{\sum_{k=s_n}^{n-1} (n-k) P_k}\right)^{-1} \\
&= e^{-s_n \mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n \mu T)^j}{j!} \cdot \left(\frac{\sum_{k=0}^{s_n-1} (n-k) P_k + \sum_{k=s_n}^{n-1} (n-k) P_k}{\sum_{k=s_n}^{n-1} (n-k) P_k}\right)^{-1} \\
&= e^{-s_n \mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n \mu T)^j}{j!} \cdot \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k}{\sum_{k=s_n}^{n-1} (n-k) P_k}\right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n (n-k) P_k\right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=s_n}^n P_k (n-k) e^{-s \mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n \mu T)^j}{j!}\right) \\
&= \mathcal{B}_n(s, T) .
\end{aligned}$$

C Herschrijven A_n , B_n en D_n

A_n :

$$\begin{aligned}
 A_n &= n \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} P(X_n \leq s_n - 1) \\
 &= n \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{s_n-1} \binom{n-1}{k} r_k \bar{r}^{n-1-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{s_n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1-k} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{s_n-1} \binom{n}{k} (n-k) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1} \left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{s_n-1} \binom{n}{k} (n-k) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k .
 \end{aligned}$$

B_n :

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{n!}{s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\binom{\lambda}{\mu}}{s_n}\right)^{n-1} e^{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}} \cdot P(Y_n \leq n - s_n - 1) \\
 &= \frac{n!}{s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\binom{\lambda}{\mu}}{s_n}\right)^{n-1} e^{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}} \sum_{k=0}^{n-s_n-1} \binom{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}^k \frac{1}{k!} e^{\frac{-s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}} \\
 &= \frac{n!}{s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\binom{\lambda}{\mu}}{s_n}\right)^{n-1} \sum_{n-k-1=0}^{n-s_n-1} \binom{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}^{n-k-1} \frac{1}{(n-k-1)!} \\
 &= \sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{n!}{s_n!(n-k-1)!} s_n^{s_n} \left(\frac{\binom{\lambda}{\mu}}{s_n}\right)^k .
 \end{aligned}$$

D_n :

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{n!}{s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\binom{\lambda}{\mu}}{s_n} \right)^{n-1} e^{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}} \cdot P(Z_n \leq n - s_n - 1) \\
&= \frac{n!}{s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\binom{\lambda}{\mu}}{s_n} \right)^{n-1} e^{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}} \left(\sum_{k=0}^{n-s_n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-s_n-k-1} \left(\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}} \right)^k \frac{1}{k!} \frac{(s_n \mu T)^j}{j!} e^{-\left(\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}} + s_n \mu T\right)} \right) \right) \\
&= \sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)! s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\binom{\lambda}{\mu}}{s_n} \right)^{n-1} \left(\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}} \right)^{n-k-1} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n \mu T)^j}{j!} e^{-s_n \mu T} \\
&= \sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)! s_n!} s_n^{s_n} \left(\frac{\binom{\lambda}{\mu}}{s_n} \right)^k e^{-s_n \mu T} \sum_{j=0}^{k-s_n} \frac{(s_n \mu T)^j}{j!} .
\end{aligned}$$

D Kansen in de limiet berekend

A_n:

$$P(X_n \leq s_n - 1) = P\left(\frac{X_n - (n-1)r}{\sqrt{(n-1)r\bar{r}}} \leq \frac{S_n - 1 - (n-1)r}{\sqrt{(n-1)r\bar{r}}}\right).$$

Er geldt dat $\frac{X_n - (n-1)r}{\sqrt{(n-1)r\bar{r}}}$ in de limiet standaard normaal verdeeld is.

De personeelsbezetting is gekozen via de regel van de Véricourt en Jennings ($(\frac{s_n}{n} - \hat{r}_T) \sqrt{n} \rightarrow \beta$). Hieruit volgt dat $s_n = \frac{rn}{1+r\mu T} + o(n)$.

Hieruit volgt:

$$\frac{s_n - 1 - (n-1)r}{\sqrt{(n-1)r\bar{r}}} \rightarrow -\infty \quad \text{als } n \rightarrow \infty.$$

Dit betekent dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - (n-1)r}{\sqrt{(n-1)r\bar{r}}} \leq \frac{S_n - 1 - (n-1)r}{\sqrt{(n-1)r\bar{r}}}\right) = 0.$$

En dus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq s_n - 1) = 0.$$

B_n:

$$P(Y_n \leq n - s_n - 1) = P\left(\frac{Y_n - \frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}}{\sqrt{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}}} \leq \frac{n - 1 - \frac{s_n}{r}}{\sqrt{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}}}\right).$$

Er geldt dat $\frac{n - 1 - \frac{s_n}{r}}{\sqrt{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}}}$ in de limiet standaard normaal verdeeld is.

Er was al bekend dat $s_n = \frac{rn}{1+r\mu T} + o(n)$.

Hieruit volgt:

$$\frac{n - 1 - \frac{s_n}{r}}{\sqrt{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}}} \rightarrow \infty \quad \text{als } n \rightarrow \infty.$$

Dit betekent dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - \frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}}{\sqrt{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}}} \leq \frac{n - 1 - \frac{s_n}{r}}{\sqrt{\frac{s_n}{\binom{\lambda}{\mu}}}}\right) = 1.$$

En dus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq n - s_n - 1) = 1.$$

\underline{D}_n :

$$P(Z_n \leq n - s_n - 1) = P\left(\frac{Z_n - s_n(\frac{1}{\bar{\Delta}}) + \mu T}{\sqrt{s_n(\frac{1}{\bar{\Delta}}) + \mu T}} \leq \frac{n - 1 - s_n(\frac{1}{\bar{r}} + \mu T)}{\sqrt{s_n(\frac{1}{\bar{\Delta}}) + \mu T}}\right).$$

Er geldt dat $\frac{n-1-s_n(\frac{1}{\bar{r}}+\mu T)}{\sqrt{s_n(\frac{1}{\bar{\Delta}})+\mu T}}$ standaard normaal verdeeld is.

Er was al bekend dat $s_n = \frac{rn}{1+r\mu T} + o(n)$.

En daarmee geldt ook: $\frac{s_n}{n} \rightarrow \hat{r}_T$ als $n \rightarrow \infty$.

Ook was al bekend dat $\left(\frac{s_n}{n} - \hat{r}_T\right) \sqrt{n} \rightarrow \beta$.

En daarmee geldt ook: $\left(1 - \frac{s_n}{n\hat{r}_T}\right) \sqrt{n} \rightarrow -\frac{\beta}{\hat{r}_T}$ als $n \rightarrow \infty$.

Deze wijsheden worden toegepast (zie Appendix E). En dan volgt:

$$\frac{n - 1 - s_n(\frac{1}{\bar{r}} + \mu T)}{\sqrt{s_n(\frac{1}{\bar{\Delta}}) + \mu T}} \rightarrow -\frac{\beta}{\bar{r}} \sqrt{\frac{(1 + r\mu T)^3}{\bar{r} + r\mu T}} \quad \text{als } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Dit betekent dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n - s_n(\frac{1}{\bar{\Delta}}) + \mu T}{\sqrt{s_n(\frac{1}{\bar{\Delta}}) + \mu T}} \leq \frac{n - 1 - s_n(\frac{1}{\bar{r}} + \mu T)}{\sqrt{s_n(\frac{1}{\bar{\Delta}}) + \mu T}}\right) = \Phi\left(-\frac{\beta}{\bar{r}} \sqrt{\frac{(1 + r\mu T)^3}{\bar{r} + r\mu T}}\right).$$

En dus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq n - s_n - 1) = \Phi\left(-\frac{\beta}{\bar{r}} \sqrt{\frac{(1 + r\mu T)^3}{\bar{r} + r\mu T}}\right).$$

E Toelichting formule 3

$$\frac{n - 1 - s_n(\frac{1}{r} + \mu T)}{\sqrt{s_n(\frac{1}{\mu} + \mu T)}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}} + (1 - \frac{s_n}{n\hat{r}_T})\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{s_n}{n}(\frac{1}{\mu} + \mu T)}} \rightarrow \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\beta}{\hat{r}_T}}{\sqrt{\hat{r}_T(\frac{\bar{r}}{r} + \mu T)}}$$

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\beta}{\hat{r}_T}}{\sqrt{\hat{r}_T(\frac{\bar{r}}{r} + \mu T)}} &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}} - \beta}{\sqrt{\hat{r}_T^3(\frac{\bar{r}}{r} + \mu T)}} = \frac{-\beta}{\sqrt{(\frac{r}{1+r\mu T})^3(\frac{\bar{r}+r\mu T}{r})}} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0\right) \\ &= \frac{-\beta}{\sqrt{r^2(\frac{1}{1+r\mu T})^3(\bar{r} + r\mu T)}} \\ &= -\frac{\beta}{r} \sqrt{\frac{(1+r\mu T)^3}{\bar{r} + r\mu T}} \end{aligned}$$

Literatuurlijst

- [1] Halfin, S., W. Whitt, (1981). Heavy-traffic limits for queues with many exponential servers. *Oper. Res.* 29 567 – 588.
- [2] de Véricourt, F., O. Jennings, (2011). Nurse staffing in medical units: a queueing perspective. *Oper. Res.* 29 1320 – 1331.