BACHELOR

Burendiagram van een graaf

Cheung, C.K.

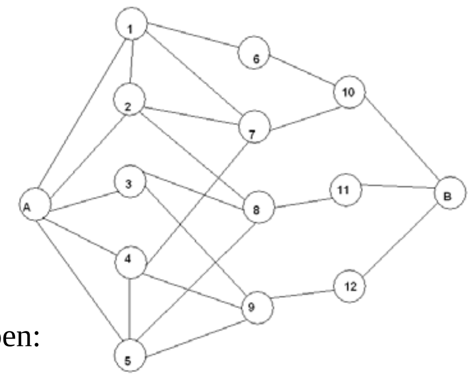
Award date:
2009

Burendiagram van een graaf
C.K. Cheung
Technische Wiskunde,
Technische Universiteit Eindhoven
2009

In mijn bachelorproject heb ik me beziggehouden met het bestuderen van de structuur van grafen. Een graaf is een verzameling van punten die worden verbonden door een of meerdere lijnen. Je kunt je hierbij voorstellen als een wegennet tussen een groot aantal steden. De structuur van een graaf kun je weergeven met een burendiagram. Het nut hiervan is dat men makkelijk inzicht kan krijgen van een graaf over o.a. het aantal directe buren, de langste afstanden tussen twee verschillende punten. Om het geheel te verduidelijken wordt het volgende voorbeeld gebruikt.

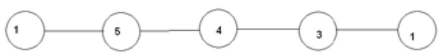
Stel, je bevindt je ergens in het deel van een land waar er veel kleine dorpjes zijn die ver van elkaar liggen en alle verbonden zijn met wegen. Je wilt vanuit dorpje A in het uiterste westen van het land fietsen naar een ander dorpje B in het uiterste oosten.
We zijn geïnteresseerd in de vraag hoeveel verschillende dorpjes je minimaal moet passeren om vanuit A naar B te fietsen.

We nemen het volgende geval als voorbeeld met 14 dorpjes (A, B en de dorpen 1 tot en met 12). Zie de figuur hiernaast.



Om te bepalen wat het minimaal aantal dorpjes is dat gepasseerd wordt van A naar B gaan we stap voor stap te werk.

We gaan eerst kijken wat de directe buren van dorp A, in dit geval zijn het de dorpen 1, 2, 3, 4 en 5.
Daarna zoeken we naar de directe buren van de dorpen 1, 2, 3, 4 en 5 die we niet eerder gevonden hebben:
voor dorp 1 zijn het dorp 6 en 7,
voor dorp 2 zijn het dorp 7 en 8,
voor dorp 3 zijn het dorp 8 en 9, voor dorp 4 zijn het dorp 7 en 9 en voor dorp 5 zijn het dorp 8 en 9. Dus de dorpen 6, 7, 8 en 9 liggen 'twee dorpen' verder dan A.
Dezelfde procedure passen we toe op de dorpen 6, 7, 8 en 9 en hieruit volgt dat de dorpen 10, 11 en 12 liggen 'drie dorpen' verder van A.
Ten slotte zien we dat dorp B de enige directe buur is van de dorpen 10, 11 en 12.

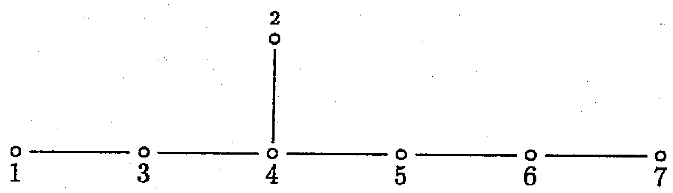
Het burendiagram van dit probleem is dan: 

Zo kun je zien dat men minimaal drie verschillende dorpen moet passeren om vanuit A in B te bereiken.

Als je dit toepast in een veel ingewikkelder netwerk van bijvoorbeeld wegen met ieder willekeurig begin- en eindpunt, kun je een heel fascinerende structuur krijgen van het wegennet, waardoor je in staat bent om optimale routes voor automobilisten te bepalen.

Coxetergroep van E_7

De Coxetergroep van het type E_7 , $W(E_7)$, is een groep die wordt voortgebracht door zeven elementen, te noemen r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 en r_7, van lineaire transformaties met karakteristiek 2 en de relaties $(r_i r_j)^m = 1$. Deze groep is weer te geven met het volgende Coxeterdiagram.



Ieder punt in dit diagram stelt elke voortbrenger van de groep voor en de kanten geven de relatie, de orde, aan van elk tweetal voortbrengers. Voor dit diagram geldt dat $(r_i r_j)^2 = 1$ als i en j niet verbonden zijn en $(r_i r_j)^3 = 1$ als i en j wel verbonden zijn. Deze relaties kunnen weergegeven worden in de Coxetermatrix M.

```
DE7 := {{1, 2, 3, 2, 2, 2, 2}, {2, 1, 2, 3, 2, 2, 2}, {3, 2, 1, 3, 2, 2, 2},
   {2, 3, 3, 1, 3, 2, 2}, {2, 2, 2, 3, 1, 3, 2}, {2, 2, 2, 2, 3, 1, 3}, {2, 2, 2, 2, 2, 3, 1}};
Print["M = ", MatrixForm[DE7]]
```

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Laat V een reële vectorruimte zijn met basis $< e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 >$ en B de symmetrische bilineaire vorm op V , gedefinieerd door $B(e_i, e_j) = -2\cos(\pi / m_{ij})$, met m_{ij} elementen uit M. De lineaire transformties $r_i : V \to V$ wordt gedefinieerd door $r_i : x \to x - B(x, e_i)\, e_i$.

Dus B en de lineaire transformaties van $W(E_7)$ zijn :

```
B = Table[-2 * Cos[Pi / DE7[[i, j]]], {i, 7}, {j, 7}];
Print["B = ", MatrixForm[B]]
```

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
Eenheid := IdentityMatrix[7]
r[i_] := ReplacePart[Eenheid, Eenheid[[i]] - B[[i]], i]
For[i = 1, i < 8, i++, Print["r[", i, "]=" MatrixForm[r[i]]]]
```

$$r[1]=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r[2]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r[3]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r[4]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r[5]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r[6]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r[7]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verder willen we verfiëren dat de volgende beweringen kloppen voor B en r_i.

(i.) $B(e_i, e_i) = 2$ en $B(e_i, e_j) \leq 0$ voor alle $i \neq j$.

$B(e_i, e_i) = -2\cos(\pi/m_{ii}) = -2\cos(\pi/1) = 2$ en
voor alle $i \neq j$ geldt $m_{ij} = 2$ of $m_{ij} = 3$, dus $B(e_i, e_j) = -2\cos(\pi/m_{ij}) = -2\cos(\pi/2) = 0$ of
$B(e_i, e_j) = -2\cos(\pi/m_{ij}) = -2\cos(\pi/3) = -1$.

(ii.) Het hypervlak $e_i^L := \{x \in V \mid B(x, e_i) = 0\}$ in V is puntgewijs vastgelegd door r_i en $r_i(e_i) = -e_i$.

Als $x \in e_i^L$, dan is $r_i(x) = x - B(x, e_i)\, e_i = x$. Omdat $e_i \notin e_i^L$, dan geldt $r_i(e_i) = e_i - B(e_i, e_i)\, e_i = e_i - 2\, e_i = -e_i$.

(iii.) Voor alle $x, y \in V$ geldt $B(r_i\, x, r_i\, y) = B(x, y)$.

```
Table[Transpose[r[i]].B.r[i] == B, {i, 7}]
```

```
{True, True, True, True, True, True, True}
```

(iv.) De orde van $r_i\, r_j$ is gelijk aan $m_{ij.}$

```
MEva := Table[MatrixPower[r[i].r[j], DE7[[i, j]]] == Eenheid, {i, 7}, {j, 7}]
MatrixForm[MEva]
```

$$\begin{pmatrix} \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\ \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\ \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\ \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\ \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\ \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \\ \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} \end{pmatrix}$$

Baan

Beschouw nu de ondergroep van W (E_7) die wordt voortgebracht door $< r_1, r_2, r_3, r_4,$
$r_5, r_6 >$. Deze elementen houden een unieke vector vast. Dat betekent dat voor i = 1, ...,
6 geldt $r_i.v = v$. Om deze vector te bepalen moeten we het stelsel van de vergelijkingen
$r_i.v = v$ oplossen voor i = 1, ...,
6. Door substitutie hebben we uiteindelijk de volgende vergelijking : $r_1.r_2.r_3.r_4.r_5.r_6.v = v$ oplossen.

```
Solve[{r[1].r[2].r[3].r[4].r[5].r[6].{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7} ==
    {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}}, {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}];
V = Flatten[{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7} /. % /. {x7 → 3}]

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

{2, 3, 4, 6, 5, 4, 3}
```

Laat $W = W(E_7)$ zijn en W_6 de ondergroep van W voortgebracht door $< r_1, r_2, r_3, r_4,$
$r_5, r_6 >$. We willen bewijzen dat de $W/W_6 \cong X$, waar X de W − baan van de vector v is.

Bewijs :

Deze stelling kunnen we ook bewijzen door te laten zien dat $|W|/|W_6| = |X|$.
Als W transitief is op X en H de stabilisator van v in W $(H = \{g \in W \mid g.v = v\})$,
dan geldt $W/H \cong X$ en dus ook $|W|/|H| = |X|$. We moeten dus laten zien dat $W_6 = H$.

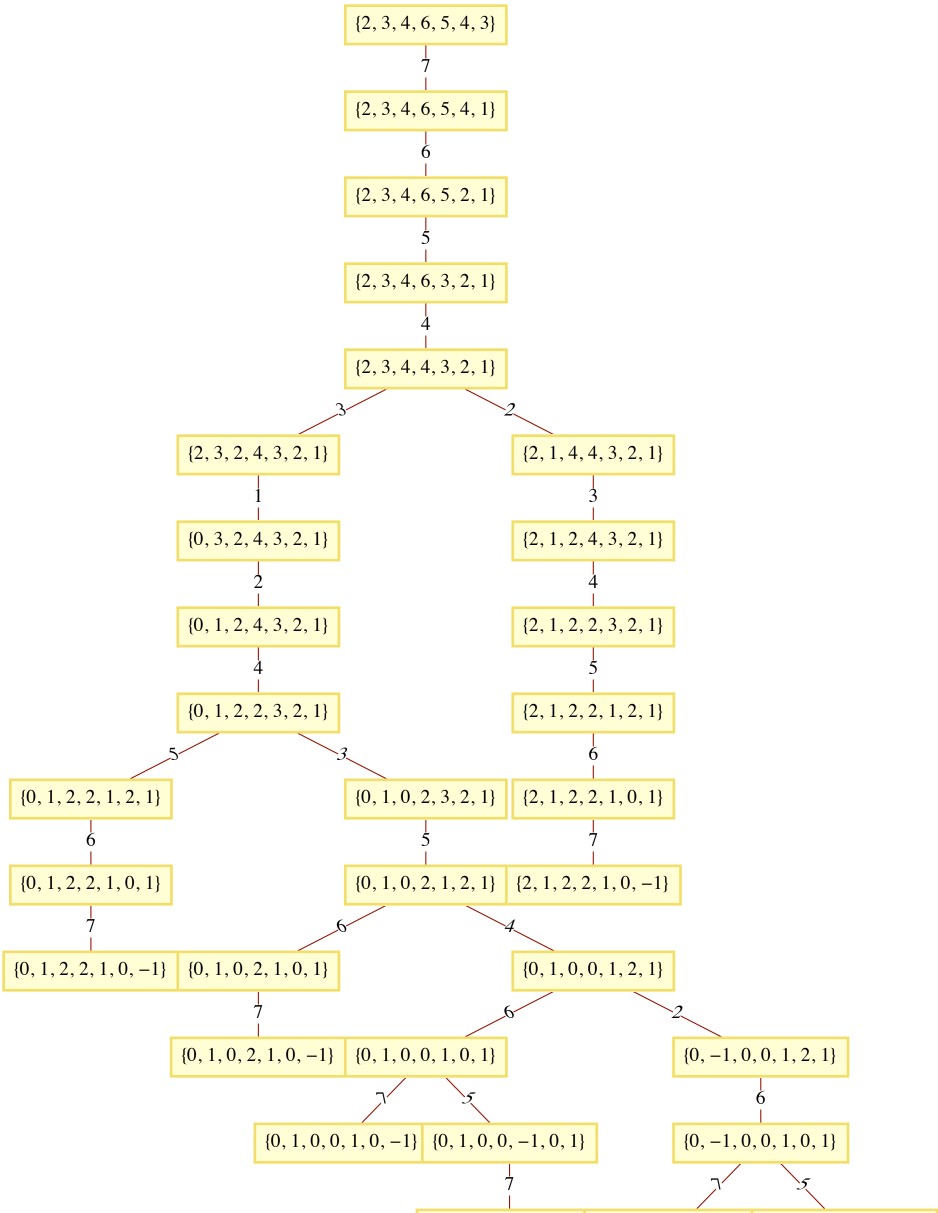
De W − baan van v kunnen we bepalen door de voortbrengers van W te laten werken op v, zodat

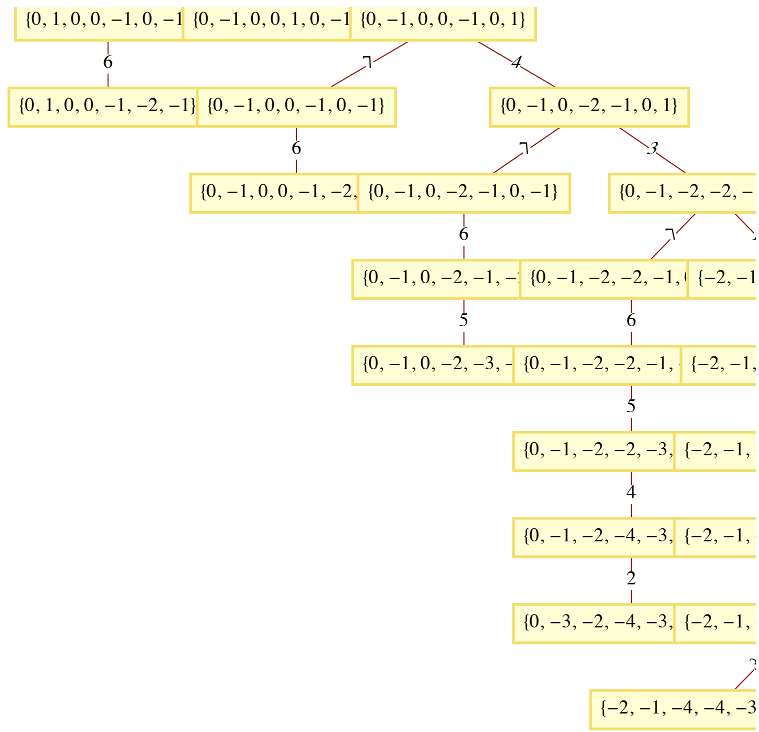
```
Baan = {};
Nieuw = {V1};
While[Length[Nieuw] > 0,
  {Baan = Union[Baan, Nieuw];
   Nieuw =
    Complement[Flatten[Table[r[i].Nieuw[[j]], {i, 7}, {j, Length[Nieuw]}], 1], Baan]}];
B = Reverse[Baan]
Length[B]

{{2, 3, 4, 6, 5, 4, 3}, {2, 3, 4, 6, 5, 4, 1}, {2, 3, 4, 6, 5, 2, 1},
 {2, 3, 4, 6, 3, 2, 1}, {2, 3, 4, 4, 3, 2, 1}, {2, 3, 2, 4, 3, 2, 1}, {2, 1, 4, 4, 3, 2, 1},
 {2, 1, 2, 4, 3, 2, 1}, {2, 1, 2, 2, 3, 2, 1}, {2, 1, 2, 2, 1, 2, 1}, {2, 1, 2, 2, 1, 0, 1},
 {2, 1, 2, 2, 1, 0, -1}, {0, 3, 2, 4, 3, 2, 1}, {0, 1, 2, 4, 3, 2, 1}, {0, 1, 2, 2, 3, 2, 1},
 {0, 1, 2, 2, 1, 2, 1}, {0, 1, 2, 2, 1, 0, 1}, {0, 1, 2, 2, 1, 0, -1}, {0, 1, 0, 2, 3, 2, 1},
 {0, 1, 0, 2, 1, 2, 1}, {0, 1, 0, 2, 1, 0, 1}, {0, 1, 0, 2, 1, 0, -1}, {0, 1, 0, 0, 1, 2, 1},
 {0, 1, 0, 0, 1, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 1, 0, -1}, {0, 1, 0, 0, -1, 0, 1},
 {0, 1, 0, 0, -1, 0, -1}, {0, 1, 0, 0, -1, -2, -1}, {0, -1, 0, 0, 1, 2, 1},
 {0, -1, 0, 0, 1, 0, 1}, {0, -1, 0, 0, 1, 0, -1}, {0, -1, 0, 0, -1, 0, 1},
 {0, -1, 0, 0, -1, 0, -1}, {0, -1, 0, 0, -1, -2, -1}, {0, -1, 0, -2, -1, 0, 1},
 {0, -1, 0, -2, -1, 0, -1}, {0, -1, 0, -2, -1, -2, -1}, {0, -1, 0, -2, -3, -2, -1},
 {0, -1, -2, -2, -1, 0, 1}, {0, -1, -2, -2, -1, 0, -1}, {0, -1, -2, -2, -1, -2, -1},
 {0, -1, -2, -2, -3, -2, -1}, {0, -1, -2, -4, -3, -2, -1}, {0, -3, -2, -4, -3, -2, -1},
 {-2, -1, -2, -2, -1, 0, 1}, {-2, -1, -2, -2, -1, 0, -1}, {-2, -1, -2, -2, -1, -2, -1},
 {-2, -1, -2, -2, -3, -2, -1}, {-2, -1, -2, -4, -3, -2, -1}, {-2, -1, -4, -4, -3, -2, -1},
 {-2, -3, -2, -4, -3, -2, -1}, {-2, -3, -4, -4, -3, -2, -1}, {-2, -3, -4, -6, -3, -2, -1},
 {-2, -3, -4, -6, -5, -2, -1}, {-2, -3, -4, -6, -5, -4, -1}, {-2, -3, -4, -6, -5, -4, -3}}

56
```

$|X| = 56$, dan is $|W|/|W_6| = |X| = 56 = |W|/|H|$ en dus $|W_6| = |H|$.

De bijbehorende Schreierboom is

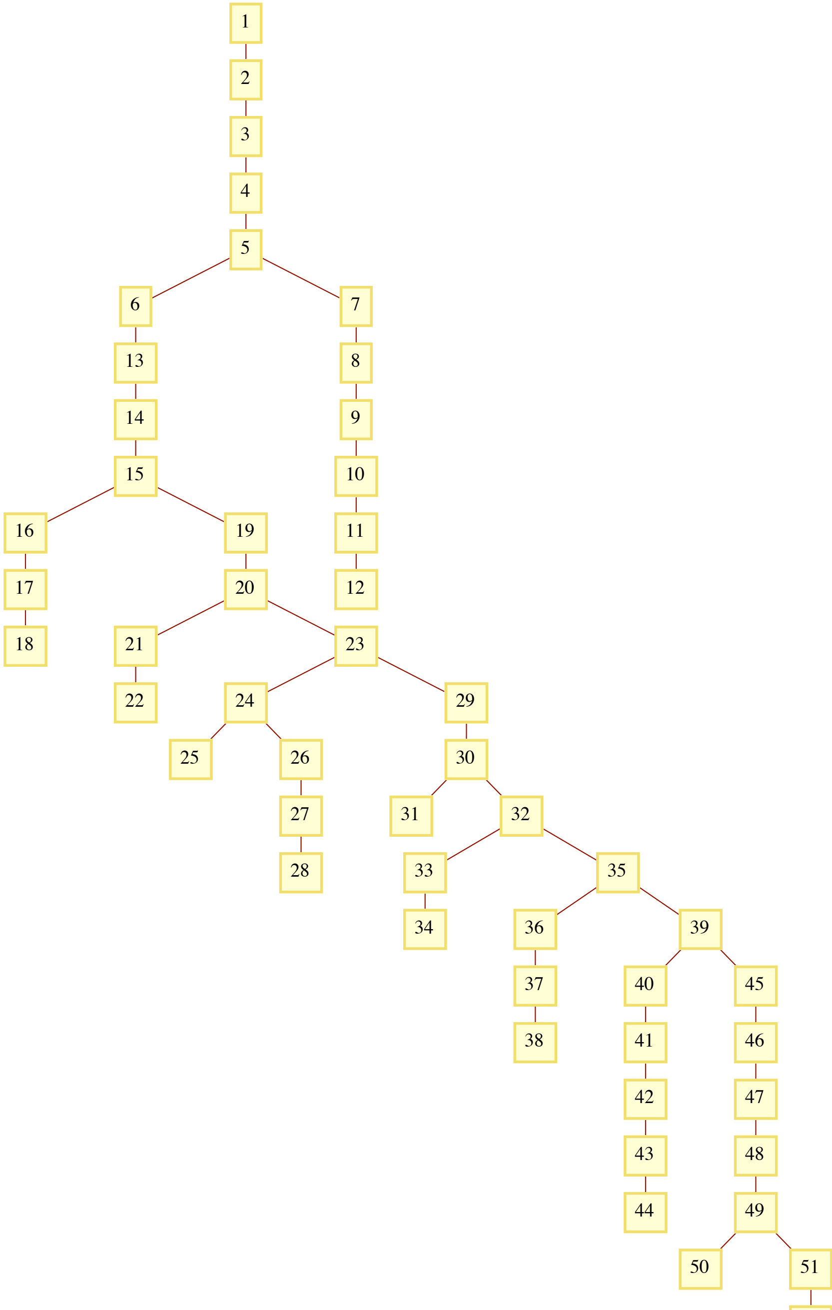
```
TreePlot[{{B[[1]] → B[[2]], 7}, {B[[2]] → B[[3]], 6}, {B[[3]] → B[[4]], 5},
  {B[[4]] → B[[5]], 4}, {B[[5]] → B[[6]], 3}, {B[[5]] → B[[7]], 2}, {B[[7]] → B[[8]], 3},
  {B[[6]] → B[[13]], 1}, {B[[8]] → B[[9]], 4}, {B[[9]] → B[[10]], 5},
  {B[[10]] → B[[11]], 6}, {B[[11]] → B[[12]], 7}, {B[[13]] → B[[14]], 2},
  {B[[14]] → B[[15]], 4}, {B[[15]] → B[[16]], 5}, {B[[15]] → B[[19]], 3},
  {B[[16]] → B[[17]], 6}, {B[[17]] → B[[18]], 7}, {B[[19]] → B[[20]], 5},
  {B[[20]] → B[[21]], 6}, {B[[20]] → B[[23]], 4}, {B[[21]] → B[[22]], 7},
  {B[[ 23]] → B[[24]], 6}, {B[[23]] → B[[29]], 2}, {B[[ 24]] → B[[25]], 7},
  {B[[24]] → B[[26]], 5}, {B[[ 26]] → B[[27]], 7}, {B[[27]] → B[[28]], 6},
  {B[[29]] → B[[30]], 6}, {B[[30]] → B[[31]], 7}, {B[[30]] → B[[32]], 5},
  {B[[32]] → B[[33]], 7}, {B[[ 32]] → B[[35]], 4}, {B[[33]] → B[[34]], 6},
  {B[[ 35]] → B[[36]], 7}, {B[[ 35]] → B[[39]], 3}, {B[[36]] → B[[37]], 6},
  {B[[37]] → B[[38]], 5}, {B[[ 39]] → B[[40]], 7}, {B[[ 39]] → B[[45]], 1},
  {B[[ 40]] → B[[41]], 6}, {B[[41]] → B[[42]], 5}, {B[[42]] → B[[43]], 4},
  {B[[ 43]] → B[[44]], 2}, {B[[ 45]] → B[[46]], 7}, {B[[46]] → B[[47]], 6},
  {B[[ 47]] → B[[48]], 5}, {B[[48]] → B[[49]], 4}, {B[[49]] → B[[50]], 3},
  {B[[49]] → B[[51]], 2}, {B[[51]] → B[[52]], 3}, {B[[52]] → B[[53]], 4},
  {B[[53]] → B[[54]], 5}, {B[[54]] → B[[55]], 6}, {B[[55]] → B[[56]], 7}},
 Automatic, root = B[[1]], VertexLabeling → True]
```


{2, 3, 4, 6, 5, 4, 3}
7
{2, 3, 4, 6, 5, 4, 1}
6
{2, 3, 4, 6, 5, 2, 1}
5
{2, 3, 4, 6, 3, 2, 1}
4
{2, 3, 4, 4, 3, 2, 1}
3
2
{2, 3, 2, 4, 3, 2, 1}
{2, 1, 4, 4, 3, 2, 1}
1
3
{0, 3, 2, 4, 3, 2, 1}
{2, 1, 2, 4, 3, 2, 1}
2
4
{0, 1, 2, 4, 3, 2, 1}
{2, 1, 2, 2, 3, 2, 1}
4
5
{0, 1, 2, 2, 3, 2, 1}
{2, 1, 2, 2, 1, 2, 1}
5
3
6
{0, 1, 2, 2, 1, 2, 1}
{0, 1, 0, 2, 3, 2, 1}
{2, 1, 2, 2, 1, 0, 1}
6
5
7
{0, 1, 2, 2, 1, 0, 1}
{0, 1, 0, 2, 1, 2, 1}
{2, 1, 2, 2, 1, 0, −1}
7
6
4
{0, 1, 2, 2, 1, 0, −1}
{0, 1, 0, 2, 1, 0, 1}
{0, 1, 0, 0, 1, 2, 1}
7
6
2
{0, 1, 0, 2, 1, 0, −1}
{0, 1, 0, 0, 1, 0, 1}
{0, −1, 0, 0, 1, 2, 1}
7
5
6
{0, 1, 0, 0, 1, 0, −1}
{0, 1, 0, 0, −1, 0, 1}
{0, −1, 0, 0, 1, 0, 1}
7
7
5



We geven hier een vereenvoudigde versie van de Schreierboom. De getallen geven het i'de element van de baan aan.

```
TreePlot[{1 → 2, 2 → 3, 3 → 4, 4 → 5, 5 → 6, 5 → 7, 7 → 8, 6 → 13, 8 → 9, 9 → 10, 10 → 11, 11 → 12,
  13 → 14, 14 → 15, 15 → 16, 15 → 19, 16 → 17, 17 → 18, 19 → 20, 20 → 21, 20 → 23, 21 → 22,
  23 → 24, 23 → 29, 24 → 25, 24 → 26, 26 → 27, 27 → 28, 29 → 30, 30 → 31, 30 → 32, 32 → 33,
  32 → 35, 33 → 34, 35 → 36, 35 → 39, 36 → 37, 37 → 38, 39 → 40, 39 → 45, 40 → 41, 41 → 42,
  42 → 43, 43 → 44, 45 → 46, 46 → 47, 47 → 48, 48 → 49, 49 → 50, 49 → 51, 51 → 52,
  52 → 53, 53 → 54, 54 → 55, 55 → 56}, Automatic, root = 1, VertexLabeling → True]
```


1
2
3
4
5
6
7
13
8
14
9
15
10
16
19
11
17
20
12
18
21
23
22
24
29
25
26
30
27
31
32
28
33
35
34
36
39
37
40
45
38
41
46
42
47
43
48
44
49
50
51


52
53
54
55
56

Distance - distribution diagram

Het distance – distribution diagram geeft de structuur aan van een graaf : de graad, de diameter en de lengte van de kortste cykel. De graaf waarvan het distance – distribution diagram wordt gegeven is $\Gamma(W, W_6, r_7)$. De punten van deze graaf zijn de elementen van de W – baan en elk tweetal punten g.v en h.v zijn buren van elkaar als en alleen als $g^{-1} h \in W_6 r_7 W_6$.

```
Baan1 = {};
Nieuw1 = {B[[2]]};
While[Length[Nieuw1] > 0,
  {Baan1 = Union[Nieuw1, Baan1];
   Nieuw1 = Complement[
     Flatten[Table[G[[i]].Nieuw1[[j]], {i, 6}, {j, Length[Nieuw1]}], 1], Baan1]}];
B1 = Reverse[Baan1]
Length[Baan1]
```

```
{{2, 3, 4, 6, 5, 4, 1}, {2, 3, 4, 6, 5, 2, 1}, {2, 3, 4, 6, 3, 2, 1}, {2, 3, 4, 4, 3, 2, 1},
 {2, 3, 2, 4, 3, 2, 1}, {2, 1, 4, 4, 3, 2, 1}, {2, 1, 2, 4, 3, 2, 1}, {2, 1, 2, 2, 3, 2, 1},
 {2, 1, 2, 2, 1, 2, 1}, {2, 1, 2, 2, 1, 0, 1}, {0, 3, 2, 4, 3, 2, 1}, {0, 1, 2, 4, 3, 2, 1},
 {0, 1, 2, 2, 3, 2, 1}, {0, 1, 2, 2, 1, 2, 1}, {0, 1, 2, 2, 1, 0, 1}, {0, 1, 0, 2, 3, 2, 1},
 {0, 1, 0, 2, 1, 2, 1}, {0, 1, 0, 2, 1, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 1, 2, 1}, {0, 1, 0, 0, 1, 0, 1},
 {0, 1, 0, 0, -1, 0, 1}, {0, -1, 0, 0, 1, 2, 1}, {0, -1, 0, 0, 1, 0, 1}, {0, -1, 0, 0, -1, 0, 1},
 {0, -1, 0, -2, -1, 0, 1}, {0, -1, -2, -2, -1, 0, 1}, {-2, -1, -2, -2, -1, 0, 1}}
```

```
27
```

```
Baan2 = {};
Nieuw2 = {B[[12]]};
While[Length[Nieuw2] > 0,
  {Baan2 = Union[Nieuw2, Baan2];
   Nieuw2 = Complement[
     Flatten[Table[G[[i]].Nieuw2[[j]], {i, 6}, {j, Length[Nieuw2]}], 1], Baan2]}];
B2 = Reverse[Baan2]
Length[Baan2]
```

```
{{2, 1, 2, 2, 1, 0, -1}, {0, 1, 2, 2, 1, 0, -1}, {0, 1, 0, 2, 1, 0, -1},
 {0, 1, 0, 0, 1, 0, -1}, {0, 1, 0, 0, -1, 0, -1}, {0, 1, 0, 0, -1, -2, -1},
 {0, -1, 0, 0, 1, 0, -1}, {0, -1, 0, 0, -1, 0, -1}, {0, -1, 0, 0, -1, -2, -1},
 {0, -1, 0, -2, -1, 0, -1}, {0, -1, 0, -2, -1, -2, -1}, {0, -1, 0, -2, -3, -2, -1},
 {0, -1, -2, -2, -1, 0, -1}, {0, -1, -2, -2, -1, -2, -1}, {0, -1, -2, -2, -3, -2, -1},
 {0, -1, -2, -4, -3, -2, -1}, {0, -3, -2, -4, -3, -2, -1}, {-2, -1, -2, -2, -1, 0, -1},
 {-2, -1, -2, -2, -1, -2, -1}, {-2, -1, -2, -2, -3, -2, -1}, {-2, -1, -2, -4, -3, -2, -1},
 {-2, -1, -4, -4, -3, -2, -1}, {-2, -3, -2, -4, -3, -2, -1}, {-2, -3, -4, -4, -3, -2, -1},
 {-2, -3, -4, -6, -3, -2, -1}, {-2, -3, -4, -6, -5, -2, -1}, {-2, -3, -4, -6, -5, -4, -1}}
```

```
27
```

```
BaanW61 = Flatten[Table[Position[B, B1[[i]]], {i, Length[B1]}]]
BaanW62 = Flatten[Table[Position[B, B2[[i]]], {i, Length[B2]}]]
```

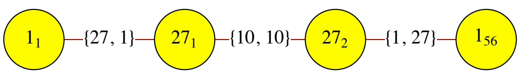
```
{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15,
 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 29, 30, 32, 35, 39, 45}
```

```
{12, 18, 22, 25, 27, 28, 31, 33, 34, 36, 37, 38,
 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55}
```

Dus het distance - distribution diagram ziet eruit als volgt :

In[5]:=
```
GraphPlot[{{1₁ → 27₁, {27, 1}}, {27₁ → 27₂, {10, 10}}, {27₂ → 1₅₆, {1, 27}}},
 VertexRenderingFunction →
  ({EdgeForm[Black], Yellow, Disk[#1, 0.2], Black, Text[#2, #1]} &)]
```

Out[5]=



Een diagram met vier nevenklassen met resp. 1, 27, 27 en 1 elementen,
die elk worden voortgebracht door de elementen W_6. Tussen elke nevenklasse
worden de punten verbonden door r_7. Elk element in de middelste twee nevenklassen
heeft 10 buren met elkaar. Dat is af te leiden uit de Schreierboom van de W − baan :
de elementen {11, 12}, {17, 18}, {21, 22}, {24, 25}, {26, 27}, {30, 31}, {32, 33},
{35, 36}, {39, 40}, {45, 46} zijn alleen verbonden door r_7.