

## BACHELOR

### Oplossen en neerslaan van een zout in een poreus medium

Bogers, J.J.P.

*Award date:*  
2009

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

# Zouttransport door poriën

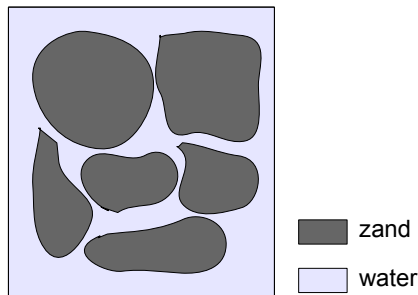
TU/e. Technische Wiskunde. Bachelorproject

Jeroen Bogers

13 juli 2009

Het bachelorproject waar ik mee bezig ben geweest, gaat over vloeistoftransport door poreuze gebieden. Een poreus gebied kan het beste voorgesteld worden als een gebied dat bestaat uit veel kleine openingen (gaatjes). Door deze openingen stroomt een vloeistof.

In de natuur komt dergelijk transport op verschillende plaatsen voor. Denk hierbij bijvoorbeeld aan grondwatertransport, hetgeen schematisch is weergegeven in het plaatje. Dit grondwater-



transport is een vorm van poreus transport: het grondwater stroomt tussen kleine openingen van de zandkorrels waaruit de bodem is opgebouwd.

Ook bij bijvoorbeeld het zeven van een vloeistof met daarin korreltjes vaste stof, speelt poreus transport een rol. In dit geval stellen de gaatjes in de zeef de poriën voor.

In dit project wordt (onder andere) onderzocht wat de transportsnelheid van de vloeistof in een poreus gebied is. Zo kan bijvoorbeeld bepaald worden hoe snel het grondwater door de zandkorrels stroomt of hoe lang het zeven van een vloeistof duurt.

In mijn project bevat de vloeistof die door het poreuze gebied stroomt zoutionen (vandaar de term zouttransport). Bij de precieze beschrijving van het transportproces dient men dan rekening te houden met twee processen: neerslaan en oplossen. De zoutionen in de vloeistof kunnen door een chemische reactie omgezet worden tot zoutkristallen. Deze kunnen aan de rand van het poreuze gebied blijven plakken (bij grondwatertransport kunnen zoutkristallen aan de zandkorrels blijven plakken), waardoor de vloeistof minder ruimte krijgt. Dit proces wordt neerslaan genoemd. Het omgekeerde proces is ook mogelijk: eenmaal neergeslagen zoutkristallen kunnen door een chemische reactie omgezet worden tot zoutionen die in de vloeistof opgenomen worden. Dit proces, waarbij de vloeistof meer ruimte krijgt, wordt oplossen genoemd.

Rekening houden met deze processen is wiskundig moeilijk vanwege twee redenen: ten eerste krijg je te maken met veel vergelijkingen die het oplos- en neerslagproces beschrijven, waardoor je te maken krijgt met veel rekenwerk. Ten tweede verandert de ruimte waarin de vloeistof kan stromen steeds van vorm en grootte (binnen de wiskunde wordt een dergelijk probleem aangeduid als 'vrije-rand probleem'), hetgeen ook voor moeilijkheden zorgt.

In mijn project heb ik onderzoek gedaan naar drie grootheden. Dit zijn de stromingssnelheid van de vloeistof, de concentratie van zoutionen in de vloeistof en de vorm van het poreuze gebied. Door gebruik te maken van een wiskundige techniek, lopende golven genaamd, kan onder andere vastgesteld worden met welke snelheid het gebied van vorm verandert (veroorzaakt door neerslaan en oplossen) en met welke snelheid de concentratie zoutionen verandert. Verkregen resultaten kunnen vergeleken worden met eerder onderzoek. Door academici op de TU/e is namelijk al veel onderzoek gedaan naar zouttransport in poreuze gebieden.

# Oplossen en neerslaan van een zout in een poreus medium

Auteur: Jeroen Bogers  
Begeleider: Tycho van Noorden

14 juli 2009

## Samenvatting

Crystal transport through porous media shows up in various contexts such as biology, physics and chemistry. To study this process a two-dimensional micro-model is developed. In this model, the porous domain is modelled as a perforated domain. This model contains a free boundary and therefore allows changes in the pore volume. Using the formal homogenization procedure in *Crystal precipitation and dissolution in a porous medium: effective equations and numerical experiments*, T.L. van Noorden, 2008, results in a system of effective partial differential equations, valid on a fixed domain. These equations allow for travelling wave solutions. Under certain circumstances, existence and uniqueness of travelling wave solutions are proven. Next, a more general system of effective partial equations is studied. This system describes crystal transport for various geometries of the pore space, including the earlier studied geometry and the thin-strip geometry studied in *Crystal precipitation and dissolution in a thin strip*, T.L. van Noorden, 2007. Again, under certain circumstances existence and uniqueness of travelling wave solutions are proven.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Model</b>	<b>4</b>
2.1	Modelvergelijkingen . . . . .	4
2.2	Dimensieloze vorm . . . . .	7
2.3	Homogenisatie door middel van asymptotische expansies . . . . .	8
2.4	Voorwaarden, eisen en vereenvoudigingen . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Analyse van het gehomogeniseerde stelsel</b>	<b>11</b>
3.1	Lopende golven . . . . .	11
3.2	Existentie van dissolutiegolven . . . . .	17
3.3	Uniciteit van dissolutiegolven . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Veralgemeinering</b>	<b>23</b>
4.1	Lopende golven van het algemene stelsel . . . . .	23
4.2	Existentie . . . . .	30
4.3	Uniciteit . . . . .	33
4.4	Vergelijking met eerdere resultaten . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Opzet voor verder onderzoek</b>	<b>36</b>
<b>6</b>	<b>Conclusie</b>	<b>38</b>
<b>A</b>	$q_* > (1 - \pi R_{min}^2)a > 0$	<b>39</b>
<b>B</b>	$q_* > \phi_{max}a > 0$	<b>41</b>
<b>C</b>	$f(u)$ stijgend voor $u > 0$	<b>43</b>
<b>D</b>	$g(u)$ dalend voor $u > 0$	<b>44</b>

# 1 Inleiding

In dit artikel wordt gekeken naar het transport van een zoutoplossing door een poreus medium (een medium met kleine gaatjes). Dergelijk transport komt op verschillende plaatsen in de natuur voor, denk bijvoorbeeld aan het zeven van een vloeistof. Ook in de biologie en bij verschillende chemische processen, speelt dit transport een rol.

Het precies beschrijven van dit proces is wiskundig niet gemakkelijk. Bij de beschrijving van dergelijk transport moet namelijk rekening gehouden worden met een neerslagproces: zoutionen kunnen aan de randen van de poriën blijven 'plakken'. Ook moet rekening worden gehouden met het omgekeerde proces, oplossen: neergeslagen zoutionen kunnen loslaten van de randen van de poriën en kunnen op deze manier weer in de vloeistof oplossen. Het zal duidelijk zijn dat een model dat rekening houdt met bovenstaande processen vrij veel (partiële differentiaal) vergelijkingen zal bevatten. Dit is niet het enige probleem: door het oplos- en neerslagproces veranderen de poriën steeds van vorm. Zodoende verandert het gebied waarop deze (partiële differentiaal) vergelijkingen geldig zijn, ook steeds van vorm. Binnen de analyse staat een dergelijk probleem bekend als een zogenaamd vrije-randprobleem ('free boundary problem'). Deze vrije-randproblemen vormen een populair onderwerp voor hedendaags onderzoek op het gebied van partiële differentiaalvergelijkingen.

In de loop der jaren zijn er modellen ontwikkeld die rekening houden met het oplos- en neerslagproces, maar geen rekening houden met de veranderingen van de poriën. Deze modellen kunnen globaal inzicht in het gedrag van het zouttransport door poreuze media geven, erg precies zijn ze echter niet. Voor informatie over dergelijk onderzoek wordt verwezen naar [2], [5] en [6].

Onderzoek waarbij wel rekening gehouden wordt met de verandering van de vorm van de poriën is ook al uitgevoerd. Zo wordt in [1] één porie gemodelleerd als dunne strip en worden partiële differentiaalvergelijkingen opgesteld die de processen neerslaan, oplossen en transport beschrijven, rekening houdend met de verandering van de vorm van de porie. Vervolgens worden de existentie en uniciteit van zogenaamde neerslaggolven bewezen.

In dit artikel wordt ook rekening gehouden met de verandering van de vorm van de poriën. Het poreuze gebied wordt hier niet gemodelleerd als verzameling dunne strips, maar als geperforeerd domein. Voor deze geometrie zullen de existentie en uniciteit van lopende golven aangetoond worden.

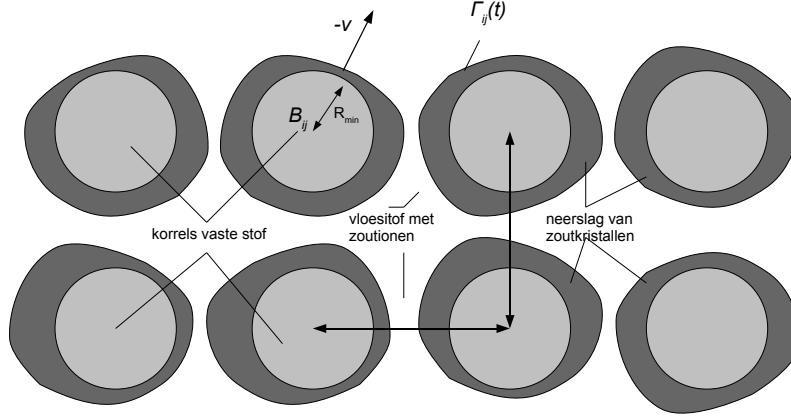
Na beschouwing van een specifieke modellering van het poreuze medium (als geperforeerd domein), ontstaat genoeg inzicht om over te gaan op een algemener porie-model, waarvoor ook uniciteit en existentie van lopende golven aangetoond kunnen worden.

De opbouw van dit artikel is als volgt: in sectie 2 wordt het gekozen (micro)-model uitgelegd. Bovendien wordt het bijbehorende stelsel partiële differentiaalvergelijkingen weergegeven. Ook wordt in deze sectie aangegeven hoe gebruik makend van asymptotische expansies een stelsel zonder vrije rand ontstaat. In sectie 3 wordt gezocht naar lopende golven behorende bij het stelsel differentiaalvergelijkingen verkregen in sectie 2. Hiertoe wordt het stelsel eerst omgeschreven tot een stelsel vergelijkbaar met artikel [1] en worden de randvoorwaarden en eisen voor de verschillende parameters en functies vastgelegd. Vervolgens worden de existentie en uniciteit van een golfoplossing van bepaald type aangetoond. In sectie 4 wordt een algemener stelsel differentiaalvergelijkingen gepresenteerd dat het zouttransportproces niet slechts voor één porie-geometrie beschrijft, maar voor een hele klasse geometriën (waarbij het stelsel uit sectie 2 in deze klasse valt) en worden de existentie en uniciteit van lopende golven van dit stelsel bewezen. Dit alles wordt in sectie 6 afgesloten met een conclusie.

## 2 Model

In het micro-model dat hier centraal staat, wordt de begrensde ruimte met poriën gemodelleerd als een tweedimensionaal geperforeerd gebied. Dit begrensde geperforeerde gebied wordt  $\Omega$  genoemd en heeft als rand  $\Gamma$ . Een deel van het gemodelleerde gebied wordt schematisch weergegeven in figuur 2.1. Deze figuur komt (enigszins aangepast) uit [3].

Het principe van de gekozen modellering die zichtbaar is in figuur 2.1, is als volgt: het hele



**Figuur 2.1:** Schematische weergave poreuze medium

gebied wordt verdeeld in een grid van vierkantjes. In het midden van ieder van deze vierkantjes bevindt zich een evengrote cirkelvormige korrel vaste stof (deze worden geïdentificeerd met  $B_{ij}$ , waarbij iedere korrel straal  $R_{min}$  heeft). De vloeistof met daarin opgeloste zoutkristallen stroomt tussen deze korrels door (dus in het witte gebied in figuur 2.1). Doordat de vloeistof zoutkristallen bevat, is het mogelijk dat neerslagvorming aan de korrels plaatsvindt (deze neerslag wordt in figuur 2.1 weergegeven door het donkergrijze gebied). Het omgekeerde proces kan ook plaatsvinden; eenmaal ontstane neerslag kan oplossen in de vloeistof. Door het neerslagproces (of het omgekeerde proces) verandert de grens tussen de vloeistof en neergeslagen zoutkristallen, aangegeven met  $\Gamma_{ij}(t)$ , steeds van vorm en positie.

In dit model wordt aangenomen dat verschillende gebieden neergeslagen zout elkaar niet overlappen. Mathematisch komt dit neer op het eisen van:  $\Gamma_{ij}(t) \cap \Gamma_{kl}(t) = \emptyset$  als  $i \neq k$  of  $j \neq l$ . Bovendien wordt aangenomen dat er geen zoutneerslag buiten het gebied  $\Omega$  is. Dit betekent dus dat  $\Gamma \cap \Gamma_{ij}(t) = \emptyset$  voor alle  $i$  en  $j$ .

### 2.1 Modelvergelijkingen

Om dit model met vergelijkingen te beschrijven, wordt analoog aan artikel [1] gewerkt.

De (differentiaal)vergelijkingen die opgesteld zullen worden, zijn geldig in het gebied waarin zich vloeistof met zoutionen bevindt (noem dit gebied  $\Omega(t)$ ). Dit is dus het gebied buiten de grenzen  $\Gamma_{ij}$  (noem deze grenslijn  $\Gamma(t)$ ). Het gebied  $\Omega(t)$  is dus het witte gebied in figuur 2.1, terwijl  $\Gamma(t)$  de grenslijn tussen het witte en donkere gebied is.

Het gebied  $\Omega(t)$  en de rand  $\Gamma(t)$  kunnen beschreven worden door middel van een level-set functie. Het gebruik van een level-set functie zorgt ervoor dat handig omgegaan kan worden met de vrije

randen in het model (de randen hoeven niet volledig geparаметriseerd te worden). Stel deze level-set functie wordt  $S$  genoemd en de rand  $\Gamma(t)$  wordt geïdentificeerd met het nulniveau van de level-set functie, dan geldt voor  $\Omega(t)$  en  $\Gamma(t)$ :

$$\Omega(t) = \{x \in \Omega \mid S(x, t) < 0\},$$

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega \mid S(x, t) = 0\}$$

Bovendien wordt de ontwikkeling van  $\Gamma(t)$  dan beschreven door onderstaande level-set vergelijking (waarbij  $v_n$  de normaalsnelheid van  $\Gamma(t)$  voorstelt):

$$\partial_t S + v_n |\nabla S| = 0 \tag{2.1}$$

Eerst wordt het neerslagproces (en het omgekeerde proces) met behulp van convectie-diffusievergelijkingen beschreven. Dit werkt als volgt: voor het vormen van één molecuul neerslag zijn zowel een aantal (zeg  $n_1$ ) negatieve ionen (cationen) van een zout als een aantal (zeg  $n_2$ ) positieve ionen van een zout nodig (anionen). Hierbij hebben de cationen en anionen in het algemeen verschillende molaire concentraties, deze worden  $c_1$  respectievelijk  $c_2$  genoemd.

In  $\Omega(t)$  voldoen  $c_1$  en  $c_2$  dan aan de volgende convectie-diffusie vergelijkingen:

$$\partial_t c_1 = \nabla \cdot (D_1 \nabla c_1 - q c_1)$$

$$\partial_t c_2 = \nabla \cdot (D_2 \nabla c_2 - q c_2)$$

Hierin zijn  $D_1, D_2$  de diffusie coëfficiënten voor de verschillende opgeloste ionen en de totale vloeistof.  $q$  stelt de snelheid van de vloeistof voor.

Er wordt nu verondersteld dat de diffusiecoëfficiënten gelijk zijn:

$$D := D_1 = D_2$$

Bovendien wordt verondersteld dat de concentratie van de ionen in de vloeistof klein is. Als dit gedaan wordt, dan is de som van de molaire concentraties van de cationen, anionen en neergeslagen zout, constant. Als de molaire concentratie van het neergeslagen zout  $c_f$  genoemd wordt en de constante molaire concentratie  $\rho_f$  wordt genoemd, dan geldt dus:

$$c_f + c_1 + c_2 \equiv \rho_f \tag{2.2}$$

Op de grens tussen vloeistof en neerslag (dus op  $\Gamma(t)$ ) geldt wegens massabehoud (Rankine-Hugoniot voorwaarde) van de anionen en cationen:

$$\nu \cdot (D \nabla c_i - q c_i) = v_n (n_i \rho_c - c_i) \text{ op } \Gamma(t) \tag{2.3}$$

Hierin stelt  $\rho_c$  de dichtheid van de kristalvloeistof voor, en is  $\nu$  de naar buiten gerichte normaal. Voor  $\nu$  geldt:

$$\nu = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \tag{2.4}$$

De in (2.3) geïntroduceerde grootheid  $v_n$  is de normaalsnelheid van het interface in  $m/s$ . Behoud van de totale massa (Rankine-Hugoniot voorwaarde) levert:

$$\nu \cdot (-q \rho_f) = v_n ((n_1 + n_2) \rho_c - \rho_f), \text{ op } \Gamma(t) \tag{2.5}$$

Verder geldt dat de normaalsnelheid van het interface (dus van de grens  $\Gamma(t)$ ) evenredig is met het lokale verschil tussen de dissolutie- en precipitatie-snelheden. Dit verband wordt gegeven door (zie bijvoorbeeld [7]):

$$\rho_c v_n(c_1, c_2, x) = -(k_p r(c_1, c_2) - k_d w(x)) \tag{2.6}$$

In deze uitdrukking zegt de functie  $r(c_1, c_2)$  iets over de snelheid waarmee zoutionen neerslaan.  $k_d$  en  $k_p$  zijn positieve constanten. De functie  $w(x)$  wordt gegeven door:

$$w(x) \in H(|x - B|)$$

Hierin wordt  $H$  (verzamelingswaardige heaviside functie) gegeven door:

$$H(u) = \begin{cases} \{0\}, & \text{als } u < 0 \\ [0, 1], & \text{als } u = 0 \\ \{1\}, & \text{als } u > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Volgens (2.1) geldt voor de normaal  $v_n$ :

$$v_n = -\frac{\partial_t S}{|\nabla S|} \quad (2.8)$$

Door (2.8) en (2.6) met elkaar te combineren (en te veronderstellen dat  $k_p = k_d$ ), wordt de volgende vergelijking gevonden:

$$\rho_c \partial_t S \in k(r(c_1, c_2) - H(|x - B|))|\nabla S| \quad (2.9)$$

Om de stroming van de vloeistof te beschrijven worden de vergelijkingen van Stokes gebruikt. Er wordt verondersteld dat de druk niet al te hoog is, zodat de vloeistof incompressibel (onsaamendrukbaar) verondersteld kan worden. De vergelijkingen luiden dan:

$$\begin{aligned} \mu \Delta q &= \Delta p \\ \Delta \cdot q &= 0 \end{aligned}$$

Hierin is  $q$  de stroomsnelheid in  $m/s$ ,  $p$  de druk in  $kg/ms^2$  en  $\mu$  de viscositeit in  $kg/ms$ . (2.5) levert een randvoorwaarde voor  $q$ . Als aangenomen wordt dat er no-slip is langs het randgebied  $\Gamma(t)$  (resultierend in een stroom loodrecht op dit grensgebied), dan geldt:

$$q = K v_n \nu, \text{ op } \Gamma(t), \text{ met } K = \frac{\rho_f - (n_1 + n_2)\rho_c}{\rho_f} \quad (2.10)$$

De randconditie voor  $q$  op  $\Gamma$  moeten consistent zijn met  $\nabla \cdot q = 0$ . Zodoende wordt aangenomen dat  $q = q_b$  op  $\Gamma(t)$ , waarbij voor  $q_b$  geldt:

$$\int_{\Gamma(t)} \nu \cdot q = - \int_{\Gamma(t)} K v_n$$

De vergelijkingen en condities die in deze sectie gevonden zijn, kunnen samengevoegd worden tot onderstaand stelsel partiële differentiaalvergelijkingen (onder de aannamen dat  $c_1(x, y, t) = c_2(x, y, t) = c(x, y, t)$  en  $n_1 = n_2 = n$ )

$$\begin{cases} \partial_t c = \nabla \cdot (D \nabla c - qc), \\ \mu \Delta q = \nabla p, \\ \nabla \cdot q = 0, \end{cases} \quad \text{in } \Omega(t) \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \partial_t S = k(r(u) - w)|\nabla S|, \\ w \in H(|x - B|), \end{cases} \quad \text{in } \Omega \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \nu \cdot (D \nabla c - qc) = -k(r(c) - w)(\rho - c), \\ q = -K k(r(c) - w)\nu, \end{cases} \quad \text{op } \Gamma(t) \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} c(x, t) = c_b(x, t), \\ q(x, t) = q_b(x, t), \end{cases} \quad \text{op } \Gamma \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} c(x, 0) = c_I(x), \\ S(x, 0) = S_I(x), \end{cases} \quad (2.15)$$



## 2.2 Dimensieloze vorm

Alvorens asymptotische expansies te gebruiken, wordt stelsel 2.11 eerst in dimensieloze vorm gebracht. Er worden referentie waarden  $t_{ref}, x_{ref} := L$  en  $y_{ref} := L$  voor de tijd- en ruimtevariabelen  $t, x$  en  $y$  geïntroduceerd. Ook worden er een referentiewaarde  $c_{ref}$  voor de concentratie  $c$ , een referentiewaarde  $q_{ref}$  voor de vloeistofsnelheid gegeven door  $q_{ref} := L/t_{ref}$  en een referentiewaarde voor de druk gegeven door  $p_{ref}$ , geïntroduceerd.

Vervolgens worden onderstaande dimensieloze grootheden gedefinieerd:

$$\begin{aligned} t &:= t/t_{ref}, x := x/x_{ref}, y := y/y_{ref}, \epsilon := l/L, \\ u^\epsilon &:= c/c_{ref}, S^\epsilon := S/l, q^\epsilon := q/q_{ref}, p^\epsilon := p/p_{ref}, \rho_f := \rho_f/c_{ref}, u_f := c_f/c_{ref} \\ \rho &:= \frac{n_1 \rho_c}{c_{ref}}, r(u) := \frac{k_p}{k_d} r(c_{ref} u), k := \frac{k_d t_{ref}}{\rho c l}, D := \frac{D t_{ref}}{L^2}, \mu := \frac{\mu L q_{ref}}{l^2 p_{ref}} \end{aligned}$$

Het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen blijft dan over:

$$\begin{cases} u_t^\epsilon = \nabla \cdot (D \nabla u^\epsilon - q^\epsilon u^\epsilon) \\ \epsilon^2 \mu \Delta q^\epsilon = \nabla p^\epsilon \\ \Delta \cdot q^\epsilon = 0, \end{cases} \quad \text{in } \Omega^\epsilon(t) \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} S_t^\epsilon k(r(\bar{u}^\epsilon) - w^\epsilon) |\nabla S^\epsilon|, \\ w^\epsilon \in H(|x - B^\epsilon|), \end{cases} \quad \text{in } \Omega \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \nu^\epsilon \cdot (D \nabla u^\epsilon - q^\epsilon u^\epsilon) = -\epsilon k(r(u^\epsilon) - w^\epsilon)(\rho - u^\epsilon) \\ q^\epsilon = -\epsilon K k(r(u^\epsilon) - w^\epsilon) \nu^\epsilon \end{cases} \quad \text{op } \Gamma^\epsilon(t) \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} u^\epsilon(x, t) = u_b(x, t) \\ q^\epsilon(x, t) = q_b(x, t) \end{cases} \quad \text{op } \Gamma \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} u^\epsilon(x, 0) = u_I(x) \\ S^\epsilon(x, 0) = S_I(x) \end{cases} \quad (2.20)$$

Hierbij geldt voor de gebieden  $\Omega^\epsilon(t)$  en  $\Gamma^\epsilon(t)$  het volgende:

$$\Omega^\epsilon(t) := \{x \in \Omega | S^\epsilon(x, t) < 0\}, \quad (2.21)$$

$$\Gamma^\epsilon(t) := \{x \in \Omega | S^\epsilon(x, t) = 0\}, \quad (2.22)$$

Uit (2.2) volgt:

$$u_f + 2u = \rho_f \quad (2.23)$$

Omdat  $u_f > 0$  (fysische redenen) geldt  $u_s < \rho_f/2$ . In combinatie met (2.10) wordt dan de volgende eis gevonden:

$$\frac{u_s - \rho}{u_s} < K < 1 \quad (2.24)$$

Voor de bewijzen die zullen volgen, blijkt deze ongelijkheid (iets) te zwak te zijn. Zodoende wordt verondersteld dat er een  $\delta > 0$  is zodanig dat geldt:

$$\frac{u_s + \delta - \rho}{u_s + \delta} < K < 1 \quad (2.25)$$

Dit is een redelijke eis wegens (2.23).

Bovendien wordt de volgende veronderstelling gemaakt:

$$0 \leq u_I < \min(\rho, \rho_f/2) \quad (2.26)$$

### 2.3 Homogenisatie door middel van asymptotische expansies

Nu het stelsel partiële vergelijkingen dat het model beschrijft dimensieloos gemaakt is, kan homogenisatie uitgevoerd worden, waardoor effectieve vergelijkingen afgeleid kunnen worden. Het uitgangspunt van deze methode is het veronderstellen van de volgende asymptotische expansies voor de functies  $u^\epsilon$ ,  $S^\epsilon$ ,  $q^\epsilon$  en  $p^\epsilon$ :

$$u^\epsilon(x, t) = u_0(x, x/\epsilon, t) + \epsilon u_1(x, x/\epsilon, t) + \epsilon^2 u_2(x, x/\epsilon, t) + \dots$$

$$S^\epsilon(x, t) = S_0(x, x/\epsilon, t) + \epsilon S_1(x, x/\epsilon, t) + \epsilon^2 S_2(x, x/\epsilon, t) + \dots$$

$$q^\epsilon(x, t) = q_0(x, x/\epsilon, t) + \epsilon q_1(x, x/\epsilon, t) + \epsilon^2 q_2(x, x/\epsilon, t) + \dots$$

$$p^\epsilon(x, t) = p_0(x, x/\epsilon, t) + \epsilon p_1(x, x/\epsilon, t) + \epsilon^2 p_2(x, x/\epsilon, t) + \dots$$

De details van deze methode zijn nogal bewerkelijk, hiervoor wordt verwezen naar [3]. Slechts het belangrijkste resultaat, een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen op een vast gebied  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  met rand  $\Gamma$ , wordt hier gegeven. Dit stelsel is geldig onder de belangrijke aanname dat de vorm van de neerslag rondom de korrels met vaste stof op  $t = 0$  cirkelvormig is. Uit [3] blijkt dat deze vorm dan voor iedere  $t > 0$  cirkelvormig blijft.

Het stelsel ziet er dan als volgt uit (na het weglaten van sub- en superscripts):

$$\begin{cases} (i) \partial_t R = k(r(u) - w) \\ (ii) w \in H(R - R_{min}) \\ (iii) \partial_t((1 - \pi R^2)u + \pi(R^2 - R_{min}^2)K\rho) = \nabla_x \cdot (DA(R)\nabla_x u - qu) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \Omega, t > 0\} \\ (iv) q = -\frac{1}{\mu} \mathcal{K}(R) \nabla_x p \\ (v) \nabla_x \cdot q = \pi K \partial_t R^2 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} u(x, t) = u_b(x, t) \\ q(x, t) = q_b(x, t) \end{cases} \quad \text{in } \partial\Omega_1 \times (0, \infty) = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0\} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_I(x) \\ R(x, 0) = R_I(x) \end{cases} \quad \text{voor } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.29)$$

In bovenstaand stelsel stellen  $A(R)$  en  $\mathcal{K}(R)$  tensoren voor. Het is makkelijk in te zien dat deze tensoren in feite gewoon coëfficiënten zijn, dit volgt namelijk uit symmetrie.

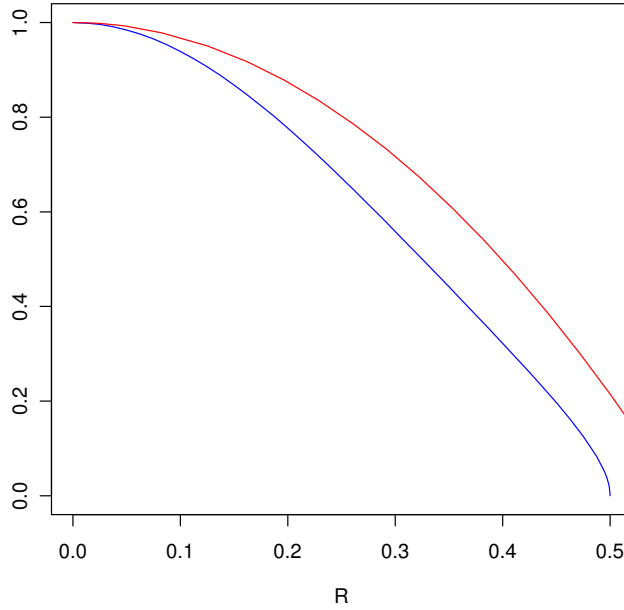
In [3] is numeriek onderzoek gedaan naar de vorm van deze tensor (afhankelijkheid van  $R$ ). In figuur 2.2 zijn grafische resultaten van dit numeriek onderzoek zichtbaar (dit is de blauwe lijn in de figuur). De geplotte rode lijn hoort bij de functie  $f(r) := 1 - \pi R^2$ . Uit het gedane onderzoek volgen de volgende eigenschappen voor de tensor  $A(R)$ :

- strikt dalend in  $R$
  - $A(R) \geq 0$  voor  $0 \leq R \leq 1/2$
  - $A(R)$  continu en differentieerbaar op  $\mathbb{R}$
  - $A(R) < 1 - \pi R^2$  voor  $0 \leq R \leq 1/2$
- (2.30)

Eenzelfde numeriek onderzoek is gedaan naar de tensor  $\mathcal{K}$  (in [3]). Later zal blijken dat (2.27)(iv) geen belangrijke rol speelt bij het zoeken van lopende golven die afhankelijk zijn van één plaatscoördinaat, waardoor de eigenschappen van  $\mathcal{K}$  voor het vervolg niet belangrijk zijn en zodoende niet opgesomd worden.

### 2.4 Voorwaarden, eisen en vereenvoudigingen

In dit stelsel partiële differentiaalvergelijkingen komen vijf onbekende functies voor, namelijk de straal  $R$ , de concentratie  $u$ , de snelheid  $q$ , de druk  $p$  en de hulpfunctie  $w$ . Ieder van deze functies



**Figuur 2.2:** De functie  $f(R) := 1 - \pi R^2$  (rode lijn) en numerieke resultaten behorende bij de tensor  $A(R)$  als functie van  $R$  (blauwe lijn)

hangt zowel van de plaats  $\mathbf{x}$  als de tijd  $t$  af.

Een aantal parameters speelt een rol in dit stelsel vergelijkingen. Deze parameters zijn de precipitatie snelheid  $k$ , de diffusiecoëfficiënt  $D$ , de dichtheid  $\rho$ , de viscositeit  $\mu$ , de constante  $K$  en de straal  $R_{min}$ .

Verder spelen de functies  $r$  en  $H$  en de tensoren  $A(R)$  en  $\mathcal{K}(R)$  een rol.

De eisen voor deze parameters en functies volgen uit fysische voorwaarden. Deels zijn ze al aan bod gekomen in deze sectie, maar hier wordt voor de volledigheid een opsomming van deze voorwaarden gegeven:

*Eisen op parameters:*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & 0 < R_{min} < 1/2 \\
 (ii) \quad & \rho > 0 \\
 (iii) \quad & k > 0 \\
 (iv) \quad & \frac{u_s - \rho}{u_s} < K < 1 \\
 (v) \quad & \mu > 0 \\
 (vi) \quad & D > 0
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Eisen op functies en tensoren:

- (i)  $1/2 > R \geq R_{min}$
- (ii)  $u \geq 0$
- (iii)  $H$  is de verzamelings Heavyside functie,gegeven door:

$$H(u) = \begin{cases} \{0\}, & \text{als } u < 0 \\ [0, 1], & \text{als } u = 0 \\ \{1\}, & \text{als } u > 0 \end{cases}$$

- (iv)  $w \geq 0$   
 $w \in H(R - R_{min})$

(v) De functie  $r$  : (2.32)

- $r : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  is lokaal Lipschitz
- Er bestaat een unieke  $u_s \in [0, \rho)$  zodanig dat  $r(u) = 0$  voor alle  $u \leq u_-$  en  $r(u)$  strikt stijgend als  $u > u_-$
- Er bestaat een unieke  $u_s \in (u_-, \rho)$  zodanig dat  $r(u_s) = 1$

- (vi)  $A(R)$  :
  - strikt dalend in  $R$
  - $A(R) \geq 0$  voor  $0 \leq R \leq 1/2$
  - $A(R)$  continu en differentieerbaar op  $\mathbb{R}$
  - $A(R) < 1 - \pi R^2$  voor  $0 \leq R \leq 1/2$

Er wordt nu verondersteld dat slechts één plaatsafhankelijke coördinaat  $x$  een rol speelt (in plaats van de vector  $\mathbf{x}$ ). Door deze veronderstelling transformeert (2.27)(iv) tot:

$$q = -\frac{1}{\mu} K(R) \partial_x p$$

Deze vergelijking geeft een eenvoudig verband tussen de snelheid  $q$  en de druk  $p$ . Als een uitdrukking voor de snelheid  $q$  gevonden is, kan door eenmaal integreren  $p$  bepaald worden. Zodoende is (2.27)(iv) eigenlijk overbodig voor het oplossen van het stelsel en wordt in het vervolg buiten beschouwing gelaten (als er niet verondersteld wordt dat slechts één plaatsafhankelijke coördinaat een rol speelt, dan kun je deze vergelijking niet buiten beschouwing laten).

Het volgende stelsel ééndimensionale partiële differentiaalvergelijkingen, voor  $x \in \mathbb{R}$  en  $t > 0$ , blijft over:

$$\begin{cases} \partial_t R = k(r(u) - w) \\ w \in H(R - R_{min}) \\ \partial_t((1 - \pi R^2)u + \rho\pi(R^2 - R_{min}^2)) = \partial_x(DA(R)\nabla_x u - qu) \\ \partial_x q = \pi K \partial_t R^2 \end{cases} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R} \text{ en } t > 0 \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} u(+\infty, t) = u_{b1} \\ u(-\infty, t) = u_{b2} \\ q(-\infty, t) = q_b \end{cases} \quad \text{voor } t > 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_I(x) \\ R(x, 0) = R_I(x) \end{cases} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

### 3 Analyse van het gehomogeniseerde stelsel

In deze sectie worden lopende golfoplossingen gezocht van het eendimensionale partiële stelsel differentiaalvergelijkingen dat ontstaat is na homogenisatie door middel van asymptotische expansies.

#### 3.1 Lopende golven

Dit stelsel ziet er als volgt uit:

$$\begin{cases} \partial_t R = k(r(u) - w) \\ w \in H(R - R_{min}) \\ \partial_t((1 - \pi R^2)u + \rho\pi(R^2 - R_{min}^2)) = \partial_x(DA(R)\nabla_x u - qu) \\ \partial_x q = \pi K \partial_t R^2 \end{cases} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R} \text{ en } t > 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u(+\infty, t) = u_{b1} \\ u(-\infty, t) = u_{b2} \\ q(-\infty, t) = q_b \end{cases} \quad \text{voor } t > 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_I(x) \\ R(x, 0) = R_I(x) \end{cases} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

Met zoeken naar lopende golven wordt mathematisch het volgende bedoeld: er wordt gezocht naar functies  $R(\eta)$ ,  $u(\eta)$  en  $q(\eta)$ , waarbij  $\eta = x - at$ , die voldoen aan (3.1). De parameter  $a$  wordt de golfsnelheid van de lopende golf genoemd. Voor de randvoorwaarden wordt verondersteld:

$$\begin{aligned} u(-\infty) &= u_*, u(\infty) = u^* \\ R(-\infty) &= R_*, R(\infty) = R^* \\ q(-\infty) &= q_* \end{aligned} \quad (3.4)$$

Na substitutie van de veronderstelde golfoplossingen  $R(\eta)$ ,  $q(\eta)$  en  $u(\eta)$  in (3.1), blijft een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen over:

$$\begin{cases} -aR' = k(r(u) - w) \\ w \in H(R - R_{min}) \\ -a((1 - \pi R^2)u + \rho\pi R^2)' = (DA(R)u' - qu)' \\ q' = -\pi(R^2)'Ka \end{cases} \quad \text{met } \eta \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} u(-\infty) = u_*, u(\infty) = u^* \\ R(-\infty) = R_*, R(\infty) = R^* \\ q(-\infty) = q_* \end{cases} \quad (3.6)$$

Een lopende golfoplossing van het systeem wordt nu analoog aan [1] gedefinieerd:

**Definitie 3.1** *De verzameling  $(u, R, w, q, a)$  met  $u, R, w$  en  $q$  functies op  $\mathbb{R}$  en  $a$  een reëel getal, wordt een lopende golf genoemd als:*

- (i)  $u \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $R \in C_{pw}^1(\mathbb{R})$ ,  $q \in C_{pw}^1(\mathbb{R})$ ,  $w \in C_{pw}(\mathbb{R})$
- (ii)  $u, w \geq 0$  en  $0 \leq R_{min} < R \leq 1/2$
- (iii)  $q' = -\pi(R^2)'Ka$

(iv)  $-a[(1 - \pi R^2)u + \rho\pi(R^2 - R_{min}^2)]' = (DA(R)u' - qu)'$

(v)  $-aR' = k(r(u) - w)$

(vi)  $u, q, R$  voldoen aan de randvoorwaarden.

(vii)  $0 \leq w \leq 1$ ,  $w = 1$  op  $R > R_{min}$

Om deze vergelijkingen op te lossen, wordt begonnen met definitie (3.1)(iii). Eenmaal integreren levert:

$$q = \pi K a (R_*^2 - R^2) + q_* \quad (3.7)$$

Voor de constante  $q^*$  (de concentratie als  $\eta \rightarrow \infty$ ):

$$q^* = \pi K a (R_*^2 - R^{*2}) + q_* \quad (3.8)$$

Op deze manier wordt de concentratie  $q$  dus uitgedrukt in de wanddikte  $R$ , dus als  $R$  bekend is, kan  $q$  bepaald worden.

Vervolgens wordt gekeken naar definitie (3.1)(iv). Eenmaal integreren levert:

$$-a[(1 - \pi R^2)u + \rho\pi(R^2 - R_{min}^2)] = (DA(R)u' - qu) + C_1 \quad (3.9)$$

Hierin is  $C_1$  een constante die door de beginvoorwaarden bepaald wordt. Door de beginvoorwaarden te gebruiken, worden de volgende twee vergelijkingen gevonden:

$$-a[(1 - \pi R^{*2})u^* + \rho\pi(R^{*2} - R_{min}^2)] = -q^*u^* + C_1$$

$$-a[(1 - \pi R_*^2)u_* + \rho\pi(R_*^2 - R_{min}^2)] = -q_*u_* + C_1$$

Er worden zo dus twee vergelijkingen voor twee onbekenden (de golfsnelheid  $a$  en de constante  $C_1$ ) gevonden. Deze kunnen opgelost worden, zodat  $a$  en  $C_1$  bepaald kunnen worden.

Voor  $a$  wordt gevonden:

$$a = \frac{\Delta u}{(\pi\rho + \pi K u^*)\Delta R^2 + \Delta((1 - \pi R^2)u)} q^* \quad (3.10)$$

Hierin geldt  $\Delta u := u_* - u^*$ ,  $\Delta R^2 := R_*^2 - R^{*2}$  en  $\Delta((1 - \pi R^2)u) := (1 - \pi R_*^2)u_* - (1 - \pi R^{*2})u^*$

Voor  $C_1$  vinden we:

$$C_1 = q_* u_* - a[(1 - \pi R_*^2)u_* + \rho\pi(R_*^2 - R_{min}^2)] \quad (3.11)$$

Door de uitdrukkingen voor  $C_1$  (vergelijking (3.11)) en  $q$  (vergelijking (3.7)) in vergelijking (3.9) in te vullen, wordt gevonden:

$$DA(R)u' = (q_* - a)(u - u_*) - \pi a(\rho + Ku)(R^2 - R_*^2) + \pi a(R^2 u - R_*^2 u_*) \quad (3.12)$$

Als lopende golven bestaan, dan moeten de gestelde condities voor  $u$  en  $R$  op  $\infty$  en  $-\infty$  evenwichtspunten van het systeem zijn. Er moet dus gelden:  $u(\pm\infty)' = 0$  en  $R(\pm\infty)' = 0$ . Zodoende levert vergelijking (v):

$$0 \in k(H(R^* - R_{min}) - r(u^*)) \quad (3.13)$$

$$0 \in k(H(R_* - R_{min}) - r(u_*)) \quad (3.14)$$

Nu wordt onderzocht voor welke mogelijke combinaties van randvoorwaarden lopende golfoplossingen kunnen bestaan.

- Stel  $R_*, R^* > R_{min}$  en  $R_* \neq R^*$ . Dan volgt uit (3.13) dat  $u^* = u_s$  (omdat  $H(R^* - R_{min}) = 1$ ). Dan volgt bovendien uit (3.14) dat  $u_* = u_s$  (omdat  $H(R_* - R_{min}) = 1$ ). Dus we zitten in de situatie dat  $u_* = u^* = u_s$ . De vergelijking voor de golfsnelheid  $a$  (zie (3.10)) levert dan  $a = 0$ . Dit is als volgt in te zien: de teller van eqrefgolfsnelheid is gelijk aan nul. Bovendien reduceert de noemer als  $u_* = u^* = u_s$  tot:

$$\pi(\rho + Ku_s - u_s)(R_*^2 - R^{*2})$$

Wegens (2.24) is de noemer dus ongelijk aan nul. Zodoende is de golfsnelheid  $a = 0$ . Door substitutie van  $a = 0$  reduceert (3.12) tot:

$$DA(R)u' = q_*(u - u_*) \quad (3.15)$$

Om aan te tonen dat hieruit volgt  $u = u_s$  op heel  $\mathbb{R}$ , wordt vanuit het ongerijmde geredeneerd. Stel dus dat er een  $\eta_0$  is zodanig dat  $u(\eta_0) \neq u_s$ . Neem aan dat  $u(\eta_0) > u_s$  (het geval  $u(\eta_0) < u_s$  gaat analoog), dan volgt uit (3.15) dat  $u'(\eta_0) > 0$  (omdat  $A(R(\eta_0)) > 0$ ). Hieruit volgt dan dat  $u(\eta) > u(\eta_0) > u_s$  voor alle  $\eta > \eta_0$ , hetgeen in tegenspraak is met de voorwaarde  $u^* = u_s$ .

Het gaat hierbij om de situatie van een stationaire kristal verdeling (een verdeling die niet in de tijd verandert) in aanwezigheid van een verzadigde stroom. Omdat we alleen geïnteresseerd zijn in niet triviale oplossingen, laten we deze combinatie van randvoorwaarden verder buiten beschouwing.

- Stel  $R_* = R^* = R_{min}$  en  $u_* \neq u^*$ . Dan wordt voor de golfsnelheid  $a$  gevonden:

$$a = \frac{q_*}{(1 - \pi R_{min}^2)}$$

Er worden nu twee gevallen bekeken: eerst het geval dat  $R = R_{min}$  op heel  $\mathbb{R}$ . Door de gevonden golfsnelheid  $a$  en  $R = R_* = R^* = R_{min}$  in vergelijking (3.12) in te vullen, wordt dan gevonden:

$$DA(R_{min})u' = (q_* - \frac{q_*}{1 - \pi R_{min}^2})(u - u_*) + \frac{\pi q_*}{1 - \pi R_{min}^2}(R_{min}^2(u - u_*)) = 0$$

Hieruit volgt dus  $u = u_s$  hetgeen in tegenspraak is met de voorwaarde  $u_* = u^*$ .

Het tweede geval dat bekeken wordt, is het geval dat  $R$  niet overal gelijk is aan  $R_{min}$ . Omdat  $R^* = R_* = R_{min}$ , is er in dit geval een  $\eta_0 \in \mathbb{R}$  zodat  $R(\eta_0) > R_{min}$  en  $R'(\eta_0) = 0$ . Uit definitie (3.1)(v) volgt dan  $r(u(\eta_0)) = w(\eta_0)$ . Omdat  $w \in H(R - R_{min})$ , waarbij nu  $R(\eta_0) > R_{min}$ , volgt  $w = 1$  en dus  $u(\eta_0) = u_s$ .

Door substitutie van  $R_* = R_{min}$ ,  $u(\eta_0) = u_s$  en  $a = \frac{q_*}{1 - \pi R_{min}^2}$  in (3.12) wordt gevonden:

$$DA(R(\eta_0))u'(\eta_0) = \frac{\pi q_*}{1 - \pi R_{min}^2}(\rho + Ku_s - u_s)(R(\eta_0)^2 - R_{min}^2)$$

Wegens  $R(\eta_0) > R_{min}$  en (2.24) volgt dus  $u'(\eta_0) < 0$ .

Het idee is nu om te laten zien dat  $u(\eta) > u_s$  als  $\eta < \eta_0$ . Dit gaat als volgt, vanuit het ongerijmde:

bekijk de verzameling  $S$  die bestaat uit alle waarden  $\eta < \eta_0$  met als eigenschap  $u(\eta) \leq u_s$ . Dus  $S$  wordt gedefinieerd als:

$$S := \{\eta < \eta_0 | u(\eta) \leq u_s\}$$

Bekijk nu  $\eta_1 := \max S$ . Omdat  $u(\eta_0) > u_s$ , is er een  $\eta_2 \in (\eta_1, \eta_0)$ , zodanig dat  $u(\eta_2) = u_s$  en  $u'(\eta_2) > 0$ .

(3.12) reduceert na substitutie van  $a = \frac{q_*}{(1 - \pi R_{min}^2)}$ ,  $u(\eta_2) = u_s$  en  $R_* = R_{min}$  echter tot:

$$DA(R(\eta_2))u'(\eta_2) = \frac{\pi q_*}{1 - \pi R_{min}^2}(\rho + K u_s - u_s)(R_{min}^2 - R^2)$$

Volgens (2.24) levert bovenstaande vergelijking dus  $u'(\eta_2) < 0$  hetgeen een tegenspraak levert. Zodoende geldt  $u(\eta) < u_s$  voor  $\eta < \eta_0$ , waardoor direct volgt dat  $u_* > u_s$ . Dit is in tegenspraak met (3.13) (omdat  $r(u_*) > 1$ , waardoor  $0 \notin k(r(u_*) - H(R - R_{min}))$ )

De volgende combinaties van randvoorwaarden worden niet bekeken:

$$R_* = R^* = R_{min} \text{ en } u^* = u_* \leq u_s$$

$$R_* = R^* > R_{min}$$

In beide gevallen wordt de golfsnelheid  $a$  niet uniek bepaald (zowel de teller als de noemer van (3.10) zijn in beide gevallen gelijk aan nul). Net als in [1] en [2] wordt aangenomen dat er in deze situaties geen niet-triviale oplossingen zijn, maar deze kunnen op het moment niet uitgesloten worden.

Om niet triviale lopende golven te vinden, moet dan dus precies één van de randvoorwaarden voor  $R$  gelijk zijn aan  $R_{min}$ . We houden dus de volgende twee typen lopende golven over:

- $R_* = R_{min}$  en  $R^* > R_{min}$ .  
 Uit (3.13) en (3.14) volgt dan  $0 \leq u_* < u_s$  en  $u^* = u_s$
- $R^* = R_{min}$  en  $R_* > R_{min}$ .  
 Uit (3.13) en (3.14) volgt dan  $0 \leq u^* < u_s$  en  $u_* = u_s$

Samenvattend blijven dus de volgende twee nader te onderzoeken klassen golfoplossingen over:

$$I = \begin{cases} R^* > R_{min}, R_* = R_{min} \\ u^* = u_s, 0 \leq u_* < u_s \end{cases} \quad (3.16)$$

$$II = \begin{cases} R_* > R_{min}, R^* = R_{min} \\ u_* = u_s, 0 \leq u^* < u_s \end{cases} \quad (3.17)$$

In appendix A wordt bewezen dat  $q_* > (1 - \pi R_{min}^2)a > 0$  voor beide golfklassen.

Het is handig om een fysische voorstelling te maken bij beide klassen: bij lopende golven van type II vindt neerslagvormig plaats (in de tijd). Dit is als volgt in te zien: voor dit type golven geldt voor  $\eta \rightarrow \infty$  (hetgeen bij vaste positie  $x$  overeenkomt met  $t \rightarrow -\infty$ )  $R(x - at) = R_{min}$ . Voor  $\eta \rightarrow -\infty$  (en dus  $t \rightarrow \infty$ ), geldt  $R(x - at) > R_{min}$ . In de loop van de tijd wordt de hoeveelheid neerslag rondom de korrels vaste stof dus groter. Dit type golven wordt zodoende ook wel precipitatiegolven (neerslaggolven) genoemd.

Bij golven van type I vindt het tegenovergestelde proces plaats; in de loop van de tijd wordt de hoeveelheid neerslag rondom de korrels vaste stof kleiner. Zodoende worden deze golven ook wel dissolutiegolven (oplossingsgolven) genoemd.

Om te bewijzen dat precipitatiegolven (golven van type II) niet kunnen bestaan, wordt de volgende propositie geformuleerd (analoog aan [2]).

**Propositie 3.2** *Stel  $(u, R, w, q, a)$  is een lopende golf met randvoorwaarden uit klasse I of II. Dan:*



**i**  $u < u_s$  op  $\mathbb{R}$

**ii**  $R$  is continu differentieerbaar en  $R' > 0$  in  $\{R > R_{min}\}$

*Bewijs:* (i) Om te laten zien dat  $u < u_s$  op  $\mathbb{R}$  wordt eerst aangetoond dat  $u \leq u_s$  en wordt vervolgens strikte ongelijkheid aangetoond. Om aan te tonen dat  $u \leq u_s$  wordt vanuit het ongerijmde geredeneerd. Stel dus dat er een  $\eta_*$  is zodanig dat  $u(\eta_*) > u_s$ . De randvoorwaarden voor golven van type I ( $u_* < u^* = u_s$ ) en voor golven van type II ( $u^* < u_* = u_s$ ) garanderen dan voor ieder (niet te grote)  $\delta > 0$  een  $\eta_0$  zodat  $u'(\eta_0) < 0$  en  $u(\eta_0) = u_s + \delta$ .

Door (3.12) op twee manieren te schrijven, wordt gevonden:

$$DA(R)u' = (q_* - a)(u - u_*) - \pi a(\rho + Ku)(R^2 - R_*^2) + \pi a(R^2u - R_*^2u_*) \quad (3.18)$$

$$DA(R)u' = (q^* - a)(u - u^*) - \pi a(\rho + Ku)(R^2 - R^{*2}) + \pi a(R^2u - R^{*2}u^*) \quad (3.19)$$

Door substitutie van  $u = u(\eta_0)$  en  $u'(\eta_0) < 0$  volgt:

$$(q_* - a)(u(\eta_0) - u_*) - \pi a(\rho + Ku(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R_*^2) + \pi a(R(\eta_0)^2u(\eta_0) - R_*^2u_*) < 0 \quad (3.20)$$

$$(q^* - a)(u(\eta_0) - u^*) - \pi a(\rho + Ku(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R^{*2}) + \pi a(R(\eta_0)^2u(\eta_0) - R^{*2}u^*) < 0 \quad (3.21)$$

Eerst wordt aangetoond dat zowel voor golven van type I als voor golven van type II volgt:  $R(\eta_0) > R_*$  en  $R(\eta_0) > R^*$ .

Voor golven van type II geldt volgens appendix A:

$$q_* - (1 - \pi R_*^2)a > q_* - (1 - \pi R_{min}^2)a > 0$$

Dit kan gebruikt worden in (3.20), samen met  $u_* = u_s$ , zodat geldt:

$$(q_* - a)(u(\eta_0) - u_s) - \pi a(\rho + Ku(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R_*^2) + \pi a(R(\eta_0)^2u(\eta_0) - R_*^2u_s) < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(q_* - (1 - \pi R_*^2)a)(u(\eta_0) - u_s) - \pi R_*^2 a (u(\eta_0) - u_s) - \pi a(\rho + Ku(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R_*^2) + \pi a(R(\eta_0)^2u(\eta_0) - R_*^2u_s) < 0$$

Omdat  $q_* - (1 - \pi R_*^2)a > 0$  en  $a > 0$ , moet gelden:

$$R_*^2(u(\eta_0) - u_s) + (\rho + Ku(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R_*^2) - (R(\eta_0)^2u(\eta_0) - R_*^2u_s) > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(R(\eta_0)^2 - R_*^2)(\rho + Ku(\eta_0) - u(\eta_0)) > 0$$

Omdat  $u(\eta_0) = u_s + \delta$  met  $\delta$  willekeurig klein, geldt wegens (2.25)  $R(\eta_0) > R_*$ . Omdat voor golven van type II bovendien geldt  $R_* > R^* = R_{min}$ , volgt dus:  $R(\eta_0) > R_* > R^*$

Voor golven van type I kan als volgt aangetoond worden dat  $R(\eta_0) > R^* > R_* = R_{min}$ : volgens appendix A en (3.8) geldt

$$q^* - \pi K a (R_{min}^2 - R^{*2}) - (1 - \pi R_{min}^2)a = q_* - (1 - \pi R_{min}^2)a > 0 \quad (3.22)$$

Dit kan gebruikt worden in (3.21), zodat moet gelden:

$$(q^* - a + \pi R_{min}^2 a - \pi K a (R_{min}^2 - R^{*2}))(u(\eta_0) - u_s) + (\pi K a (R_{min}^2 - R^{*2}) - \pi R_{min}^2 a)(u(\eta_0) - u_s)$$

$$- \pi a(\rho + Ku(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R^{*2}) + \pi a(R(\eta_0)^2u(\eta_0) - R^{*2}u_s) < 0$$

Wegens (3.22) moet nu ook gelden:

$$(\pi K a (R_{min}^2 - R^{*2}) - \pi R_{min}^2 a)(u(\eta_0) - u_s) - \pi a(\rho + Ku(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R^{*2}) + \pi a(R(\eta_0)^2u(\eta_0) - R^{*2}u_s) < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi a(K-1)(R_{min}^2 - R^{*2})(u(\eta_0) - u_s) - \pi a(\rho + Ku(\eta_0) - u(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R^{*2}) < 0$$

Omdat  $R^* > R_{min}$ ,  $u(\eta_0) > u_s$ ,  $a > 0$  en  $K < 1$ , geldt:

$$\pi a(K-1)(R_{min}^2 - R^{*2})(u(\eta_0) - u_s) > 0$$

Zodoende moet gelden:

$$-\pi a(\rho + Ku(\eta_0) - u(\eta_0))(R(\eta_0)^2 - R^{*2}) < 0$$

Wegens (2.25) geldt  $\rho + Ku(\eta_0) - u(\eta_0) > 0$ , zodat ook moet gelden  $R(\eta_0) > R^*$ .

Omdat voor golven van type I bovendien geldt  $R^* > R_* = R_{min}$ , volgt dus:  $R(\eta_0) > R^* > R_*$ .

Uit definitie (3.1)(v) volgt nu dat  $w(\eta_0) = 1$  (want  $w \in H(R - R_{min})$ ) en  $R'(\eta_0) < 0$ . Omdat  $R(-\infty) = R_*$  moet er nu een punt  $\eta_1 < \eta_0$  zijn, zodanig dat  $R(\eta) > R(\eta_0)$  en  $R'(\eta) < 0$  voor alle  $\eta \in (\eta_1, \eta_0)$ , waarbij  $R'(\eta_1) = 0$ . Uit definitie (3.1)(v) volgt dan dat  $w = 1$  en  $u > u_s$  op  $(\eta_1, \eta_0)$  (omdat hier geldt  $R'(\eta) < 0$ ). Ook volgt dat  $u(\eta_1) = u_s$  (omdat  $R'(\eta_1) = 0$ ).

Uit bovenstaande gegevens volgt zowel voor golven van type I als voor golven van type II dat  $u'(\eta_1) < 0$ . Dit is als volgt in te zien:

door substitutie van  $u(\eta_1) = u_s$  reduceert (3.18) voor golven van type I ( $u^* = u_s$ ) tot:

$$DA(R(\eta_1))u'(\eta_1) = -\pi a(\rho + Ku_s - u_s)(R(\eta_1)^2 - R^{*2})$$

Wegens  $R(\eta_1) > R^*$  volgt dus  $u'(\eta_1) < 0$ .

Door substitutie van  $u(\eta_1) = u_s$  reduceert (3.18) voor golven van type II ( $u_* = u_s$ ) tot:

$$DA(R(\eta_1))u'(\eta_1) = -\pi a(\rho + Ku_s - u_s)(R(\eta_1)^2 - R_*^2)$$

Wegens  $R(\eta_1) > R_*$  volgt dus  $u'(\eta_1) < 0$ .

Het feit dat  $u'(\eta_1) < 0$  geeft een tegenspraak met  $u > u_s$  op  $(\eta_1, \eta_0)$ , zodat geldt  $u \leq u_s$ .

Om strikte ongelijkheid te verkrijgen ( $u < u_s$ ), wordt weer vanuit het ongerijmde geredeneerd. Stel dus dat  $u(\eta_0) = u_s$  voor zekere  $\eta_0 \in \mathbb{R}$ . Omdat bij (i) bewezen is dat  $u \leq u_s$  geldt dus  $u'(\eta_0) = 0$ . Stel we hebben een golf van type I. Dan geldt volgens vergelijking (3.19) dat  $R(\eta_0) = R^*$  (waarbij  $R^* > R_{min}$ ). Bij een golf van type II geldt volgens vergelijking (3.18) dat  $R(\eta_0) = R_*$  (waarbij  $R_* > R_{min}$ ). Dus  $R(\eta_0)$  is voor beide typen golven strikt groter dan  $R_{min}$ , in een omgeving van  $\eta_0$ . Bovendien volgt dat  $w = 1$  in een omgeving van  $\eta_0$ . Zodoende hebben definities (3.1)(iv) en (3.1)(v)  $u = u_s$  en  $R = R(\eta_0)$  als unieke oplossing in hun omgeving. Dus dan volgt de niet interessante constante oplossing.

(ii) Om te bewijzen dat geldt  $R' > 0$  als  $R > R_{min}$  wordt definitie (3.1)(v) bekeken. Als  $R > R_{min}$  dan is  $w = 1$ , waardoor de vergelijking reduceert tot:

$$R' = \frac{k}{a}(1 - r(u))$$

Omdat net is bewezen dat  $u < u_s$ , volgt uit de voorwaarden die aan  $r(u)$  gesteld zijn dat  $R' > 0$   $\square$

Uit stelling (3.2)(ii) volgt nu direct:

**Gevolg 3.3** *Er bestaan geen lopende golven met randvoorwaarden uit klasse II.*

Om nog iets meer te kunnen zeggen over de vorm van de lopende golfoplossingen uit klasse I, wordt de volgende stelling geformuleerd (analoog aan [2]):

**Stelling 3.4** *Er is een  $L \in \mathbb{R}$  zodanig dat:*

$$R(\eta) = \begin{cases} R_{min} & \text{als } -\infty < \eta \leq L \\ > R_{min} & \text{als } \eta > L \end{cases}$$

*Bewijs:* Voor lopende golven uit klasse I geldt  $R^* > R_{min}$ . Zodoende kan niet gelden  $R = R_{min}$  op heel  $\mathbb{R}$ . Als nu aangetoond kan worden dat ook niet kan gelden  $R > R_{min}$  op heel  $\mathbb{R}$  dan volgt de stelling met behulp van bewering 3.2.

Stel dus  $R > R_{min}$  op heel  $\mathbb{R}$ . Dan geldt  $w \in H(R - R_{min}) = 1$  op  $\mathbb{R}$ . Uit vergelijking (3.12)(v) volgt nu (d.m.v. invullen van  $w$ ):

$$R' = -\frac{k}{a}(r(u) - 1)$$

Voor  $n \rightarrow -\infty$  volgt:

$$R'_* = -\frac{k}{a}(r(u_*) - 1)$$

Wegens de randvoorwaarde  $0 \leq u_* < u_s$  (behorende bij golven van type I) volgt nu:  $R'_* > 0$ . Dit levert een tegenspraak met  $R_* = R_{min}$ .  $\square$

### 3.2 Existentie van dissolutiegolven

Nu zijn we voorzien van genoeg bagage om de existentie van lopende golfoplossingen van type I aan te tonen.

**Stelling 3.5** *Voor iedere verzameling randcondities van klasse I bestaat er een lopende golfoplossing.*

*Bewijs:* Door gebruik te maken van translatie wordt  $L$  van stelling 3.4 op  $L = 0$  gezet. De oplossingen van het systeem moeten dan voldoen aan:

$$R(\eta) > R_{min} \text{ als } \eta > 0$$

$$R(\eta) = R_{min} \text{ als } \eta \leq 0$$

$$w(\eta) = 1 \text{ als } \eta > 0$$

Het op te lossen stelsel differentiaalvergelijkingen kan gesplitst worden in twee stelsels differentiaalvergelijkingen (één stelsel voor  $\eta > 0$  en één stelsel voor  $\eta \leq 0$ ). Deze stelsels bevatten de functies  $u, R$  en  $w$ . Het stelsel behorende bij de situatie  $\eta > 0$  wordt  $P^+$  en het stelsel dat hoort bij  $\eta \leq 0$  wordt  $P_-$  genoemd. Voor  $P^+$  en  $P_-$  wordt dan gevonden:

$$P^+ \begin{cases} u' = \frac{(q_* - a)(u - u_*) - a\pi R^2(\rho - u(1 - K)) + \pi a R_{min}^2(\rho + Ku - u_*)}{DA(R)} =: f_1(u, R) & \text{als } \eta > 0, \\ R' = \frac{k}{a}(1 - r(u)) =: f_2(u, R) & \text{als } \eta > 0, \\ u(0) = u_0 \in (u_*, u_s), & \text{en } R(0) = R_{min} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$P_- \begin{cases} u' = \frac{(q_* - a)(u - u_*) + \pi a(u - u_*)R_{min}^2}{DA(R_{min})} & \text{als } \eta < 0 \\ w = r(u) & \text{als } \eta < 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Om existentie van dit probleem aan te tonen, wordt eerst aangetoond dat er een beginwaarde  $u_0$  is zodat voor probleem  $P^+$  geldt:

$$(u(\eta), R(\eta)) \rightarrow (u_s, R^*) \text{ voor } \eta \rightarrow \infty$$

Vervolgens wordt voor deze waarde van  $u_0$  het probleem ( $P_-$ ) opgelost.

Eerst wordt gekeken naar het teken van de functies  $f_1$  en  $f_2$ . De functie  $f$  wordt gedefinieerd als:

$$f(u) := \sqrt{\frac{(q_* - a)(u - u_*) + \pi a R_{min}^2 (\rho + Ku - u_*)}{a\pi(\rho - u(1 - K))}} \quad (3.25)$$

Voor alle  $u \in [u_*, u_s]$  en  $R \in [R_{min}, R^*]$  geldt dan:

$$f_1(u, R) > 0 (\text{resp. } < 0) \Leftrightarrow f(u) > R (\text{resp. } < R) \quad (3.26)$$

$$f_2(u, R) > 0 \Leftrightarrow u < u_s$$

Eerst worden nu een aantal eigenschappen voor de gedefinieerde functie  $f$  afgeleid.

- $f$  is stijgend voor  $u > 0$ . Dit wordt aangetoond in appendix C.
- $f(u_*) = R_{min}$ , dit volgt direct door invullen van  $u = u_*$  in de uitdrukking voor  $f$ .
- $f(u_s) = R^*$ . Uit vergelijking (3.10) en appendix A volgt namelijk:

$$\begin{aligned} f(u_s)^2 &= \frac{(q_* - a)(u_s - u_*) + \pi a R_{min}^2 (\rho + Ku_s - u_*)}{a\pi(\rho - u_s(1 - K))} \\ &= \frac{[(\rho + Ku_s)(-R_{min}^2 + R^{*2}) + R_{min}^2 u_* - R^{*2} u_s] + R_{min}^2 (\rho + Ku_s - u_*)}{\pi(\rho - u_s(1 - K))} \\ &= R^{*2} \end{aligned}$$

Vervolgens wordt de verzameling  $S$  als volgt gedefinieerd:

$$S := \{(u, R) | u_* < u < u_s, R_* < R < f(u)\}.$$

We bekijken de volgende delen van de rand van  $S$ .

$$\partial S_1 := \{(u, R) | u_* < u < u_s, R = f(u)\},$$

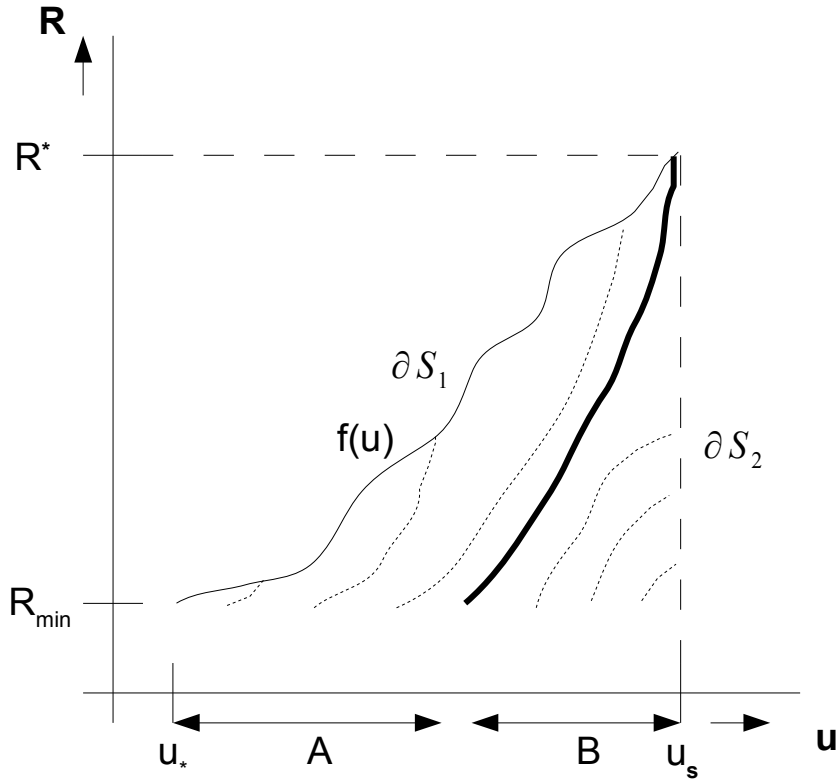
$$\partial S_2 := \{(u, R) | u = u_s, 0 < R < R^*\}.$$

In het interval  $(u_*, u_s)$  beschouwen we twee deelverzamelingen  $A$  en  $B$ . Deze worden als volgt gedefinieerd. We zeggen dat  $\alpha \in A$ , als de oplossing van het probleem ( $P^+$ ) met  $u(0) = \alpha$  en  $R(0) = R_{min}$  de verzameling  $S$  verlaat door  $\partial S_1$ . De verzameling  $B$  wordt op vergelijkbare manier gedefinieerd. We zeggen  $\beta \in B$ , als de oplossing van het probleem ( $P^+$ ) met  $u(0) = \beta$  en  $R(0) = R_{min}$  de verzameling  $S$  verlaat via het randstuk  $\partial S_2$ .

Uit de afgeleide eigenschappen voor de gedefinieerde functies  $f$ ,  $f_1$  en  $f_2$  kunnen analoog aan [4] de volgende drie eigenschappen van de verzamelingen  $A$  en  $B$  nu aangetoond worden:

- $A$  en  $B$  zijn niet leeg.
- $A$  en  $B$  zijn open.
- $A$  en  $B$  zijn geordend.

Er geldt dus  $\sup A =: \bar{\alpha} \leq \bar{\beta} := \inf B$ , waarbij  $\bar{\alpha} \notin A$  en  $\bar{\beta} \notin B$ . Dit betekent dat voor iedere  $u_0 \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$  de half-baan behorende bij het probleem  $P^+$  in het punt  $(u_s, R^*)$  uitkomt (voor  $\eta \rightarrow \infty$ ). Om dit technische bewijs visueel zichtbaar te maken, is figuur 3.1 gemaakt. Hierin is een mogelijke vorm van de functie  $f$  weergegeven. Bovendien zijn de randstukken  $\partial S_1$  en  $\partial S_2$



**Figuur 3.1:** Een mogelijke vorm van de functie  $f$ , de randstukken  $\partial S_1$  en  $\partial S_2$  en enkele mogelijke banen vanuit de verzamelingen  $A$  en  $B$ . De dikke lijn hoort bij een  $u_0$  zodanig dat  $(u(\eta), R(\eta)) \rightarrow (u_s, R^*)$  als  $\eta \rightarrow \infty$

zichtbaar, evenals enkele mogelijke banen vanuit de verzamelingen  $A$  en  $B$ . Een mogelijke  $u_0$  (met bijbehorende baan) is ook weergegeven.

Als eenmaal bekend is voor welke  $u_0$  geldt dat:

$$(u(\eta), R(\eta)) \rightarrow (u_s, R^*) \text{ voor } \eta \rightarrow \infty$$

kan deze waarde van  $u_0$  gebruikt worden om het probleem  $P_-$  expliciet op te lossen. Er is namelijk sprake van een eerste orde gewone differentiaalvergelijking, welke met bijvoorbeeld scheiding van variabelen opgelost kan worden. De homogene vergelijking ziet er als volgt uit:

$$u' = \frac{(q_* - a + \pi a R_{min}^2)u}{DA(R_{min})}$$

Als deze opgelost wordt met scheiding van variabelen, vinden we;

$$u = C_1 \exp\left(\eta \frac{q_* - a + \pi a R_{min}^2}{DA(R_{min})}\right)$$

Een oplossing van de particuliere vergelijking is  $u_*$ .

De totale oplossing wordt dus gegeven door:

$$u = C_1 \exp\left(\eta \frac{q_* - a + \pi a R_{min}^2}{DA(R_{min})}\right) + u_*$$

Uit  $u(\eta = 0) = u_0$  volgt voor de constante  $C_1$ :

$$C_1 = u_0 - u_*$$

Dus de oplossing voor  $\eta < 0$  voor het probleem  $P_-$  wordt gegeven door:

$$u(\eta) = (u_0 - u_*) \exp\left(\eta \frac{q_* - a + \pi a R_{min}^2}{DA(R_{min})}\right) + u_* \quad (3.27)$$

Bovendien volgt na substitutie van  $R = R_{min}$  in (3.7) dat voor  $\eta < 0$  geldt:

$$q = q_*$$

Nu kan makkelijk aangetoond worden dat aan alle voorwaarden van definitie (3.1) voldaan is.  $\square$

### 3.3 Uniciteit van dissolutiegolven

Nu de existentie van lopende golfoplossingen van type I aangetoond is, kan uniciteit (onder bepaalde voorwaarden) bewezen worden. Preciezer:

**Stelling 3.6** *Stel er bestaan twee lopende golfoplossingen uit klasse I, waarbij deze oplossingen gekarakteriseerd worden door  $(u_1, R_1, w_1, q_1)$  en  $(u_2, R_2, w_2, q_2)$  en beide oplossingen dezelfde randvoorwaarden hebben. Als geldt:*

$$R^{*2} < R^2 - \frac{2A(R)R}{A'(R)} \text{ voor } R \in [R_{min}, R^*] \quad (3.28)$$

Dan is er een  $\eta_0 \in \mathbb{R}$  zodanig dat:

$$(u_1(\cdot), R_1(\cdot), w_1(\cdot), q_1(\cdot)) = (u_2(\cdot + \eta_0), R_2(\cdot + \eta_0), w_2(\cdot + \eta_0), q_2(\cdot + \eta_0))$$

*Bewijs:* Beide golfoplossingen worden getransleerd, zodanig dat:

$$R_1(\eta), R_2(\eta) > R_{min} \text{ als } \eta > 0$$

$$R_1(\eta) = R_2(\eta) = R_{min} \text{ voor } \eta \leq 0$$

Als dit gedaan wordt, geldt:

$$w_1(\eta) = w_2(\eta) = 1 \text{ voor } \eta > 0$$

Zonder verlies van algemeenheid kan aangenomen worden dat  $u_1(0) > u_2(0)$ . Stel dat  $u_1(\eta) \geq u_2(\eta)$  voor alle  $\eta > 0$ , dan volgt uit definitie (3.1)(v):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} R_1(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta \frac{k}{a} (1 - r(u_1(\theta))) d\theta < \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta \frac{k}{a} (1 - r(u_2(\theta))) d\theta = \lim_{\eta \rightarrow \infty} R_2(\eta)$$

Omdat  $R_1(\eta) = R_2(\eta)$  als  $\eta \rightarrow \infty$ , levert dit dus een tegenspraak.

Dit betekent dat er een  $\eta^* \in \mathbb{R}$  moet bestaan, met  $\eta^* > 0$  zodanig dat  $u_1(\eta^*) < u_2(\eta^*)$ . Omdat  $u_1$  en  $u_2$  continu differentieerbaar zijn moet er dan ook een  $\eta_* \in \mathbb{R}$  bestaan (met  $\eta_* > 0$ ), zodanig dat:

$$u_1(\eta_*) = u_2(\eta_*) \quad (3.29)$$

$$u_1(\eta) \geq u_2(\eta) \text{ voor } \eta \in [0, \eta_*] \quad (3.30)$$

$$u_1'(\eta_*) \leq u_2'(\eta_*) \quad (3.31)$$

Merk op dat uit (3.30) volgt dat  $R_1(\eta_*) < R_2(\eta_*)$ . Uit de eisen gesteld aan de tensor  $A(R)$  (strikt dalend in  $R$ ), volgt dan ook dat  $A(R_1(\eta_*)) > A(R_2(\eta_*))$ .

Het idee is nu om vergelijking (3.29) in combinatie met vergelijking (3.12) te gebruiken, zodat er een tegenspraak ontstaat met vergelijking (3.31). Als we dit voor elkaar kunnen krijgen, zien we dus dat  $u_1(0) > u_2(0)$  (en  $u_1(0) < u_2(0)$ ) niet kan gelden, zodat  $u_1(0) = u_2(0)$  en dus  $u_1 = u_2$ . Om de gewenste tegenspraak te creëren wordt voovaarde (3.29) in vergelijking (3.12) ingevuld. Na vereenvoudiging wordt gevonden:

$$u_1' - u_2' = ([A(R_2(\eta_*)) - A(R_1(\eta_*))][(q_* - a)(u_1(\eta_*) - u_*) + \pi a R_*^2(\rho + K u_1(\eta_*) - u_*)] + \pi a(-\rho + u_1(\eta_*) - K u_1(\eta_*))[A(R_2(\eta_*))R_1^2(\eta_*) - A(R_1(\eta_*))R_2^2(\eta_*)])/DA(R_1(\eta_*))A(R_2(\eta_*)) \quad (3.32)$$

Aantonen dat inderdaad geldt  $u_1' - u_2' > 0$  kan gedaan worden door aan te tonen dat  $\frac{d}{d\eta}u(R, u(\eta_*))$  een dalende functie in  $R$  is (we weten immers dat  $R_1 < R_2$ ), waarbij  $\frac{d}{d\eta}u(R, u(\eta_*))$  gegeven wordt door:

$$\frac{d}{d\eta}u(R, u(\eta_*)) := \frac{(q_* - a)(u(\eta_*) - u_*) - a\pi R^2(\rho - u(\eta_*)(1 - K)) + \pi a R_{min}^2(\rho + K u(\eta_*) - u_*)}{DA(R)} \quad (3.33)$$

Voor het gemak wordt de teller van (3.33) gesplitst in een constant deel (noem dit deel  $C$ ) en een deel dat kwadratisch is in  $R$  (noem dit deel  $B$ ). We schrijven dus:

$$\frac{d}{d\eta}u(R, u(\eta_*)) = \frac{C - BR^2}{A(R)} \quad (3.34)$$

Waarbij  $C$  gegeven wordt door:

$$C = (q_* - a)(u(\eta_*) - u_*) + \pi a R_{min}^2(\rho + K u(\eta_*) - u_*)$$

En waarbij  $B$  gegeven wordt door:

$$B = a\pi R^2(\rho - u(\eta_*)(1 - K))$$

Wegens (2.24) volgt  $B > 0$ .

Om aan te tonen dat  $\frac{d}{d\eta}u(R, u(\eta_*))$  dalend is in  $R$ , moet aangetoond worden dat de afgeleide naar  $R$  kleiner is dan nul. Er geldt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR}\left(\frac{C - BR^2}{A(R)}\right) &= \frac{-2RBA(R) - \frac{d}{dR}A(R)(C - BR^2)}{A(R)^2} \\ &\Leftrightarrow \\ -2RBA(R) - \frac{d}{dR}A(R)(C - BR^2) &= -\frac{d}{dR}A(R)\left(C - B(R^2 - \frac{2A(R)R}{\frac{d}{dR}A(R)})\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{C}{B} &< R^2 - \frac{2A(R)R}{\frac{d}{dR}A(R)} \text{ omdat } A(R) \text{ dalend in } R \end{aligned}$$

Vervolgens wordt opgemerkt dat de uitdrukking  $\frac{C}{B}$  precies hetzelfde is als  $f(u(\eta_*))$ , met  $f$  de functie gedefinieerd in (3.25). Uit de eigenschappen die voor  $f$  bewezen zijn, volgt  $\frac{C}{B} < R^*$ . We zijn dus klaar als we kunnen laten zien dat:

$$R^{*2} < R^2 - \frac{2A(R)R}{\frac{d}{dR}A(R)}$$

Dit is precies de aanname die in de stelling staat. Er geldt dus  $u_1(0) = u_2(0)$  en dus  $u_1 = u_2$ ,  $R_1 = R_2$ ,  $w_1 = w_2$  en  $q_1 = q_2$  op  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Het is niet à priori duidelijk in hoeverre de voldoende voorwaarde gegeven door (3.28) beperkingen vormt. Dit komt omdat we alleen beschikking hebben over numerieke resultaten omtrent de tensor  $A(R)$ , waardoor het moeilijk is om iets te zeggen over de afgeleide  $\frac{d}{dR}A(R)$ . Door integratie kan  $\frac{d}{dR}A(R)$  als volgt geëlimineerd worden:

$$\begin{aligned} R^{*2} < R^2 - \frac{2A(R)R}{\frac{d}{dR}A(R)} & \quad \forall R \in [R_{min}, R^*] \\ \Leftrightarrow \\ \frac{\frac{d}{dR}A(R)}{A(R)} > \frac{2R}{R^2 - R^{*2}} & \quad \forall R \in [R_{min}, R^*] \\ \Leftrightarrow \\ \int_x^y \frac{\frac{d}{dR}A(R)}{A(R)} dR > \int_x^y \frac{2R}{R^2 - R^{*2}} dR & \quad \forall x, y : R_{min} \leq x < y \leq R^* \\ \Leftrightarrow \\ \ln\left(\frac{A(y)}{R^{*2} - y^2}\right) > \ln\left(\frac{A(x)}{R^{*2} - x^2}\right) & \quad \forall x, y : R_{min} \leq x < y \leq R^* \\ \Leftrightarrow \\ \ln\left(\frac{A(R)}{R^{*2} - R^2}\right) \text{ stijgend } \forall R \in [R_{min}, R^*] & \quad (3.35) \end{aligned}$$

Uit (3.35) volgt sowieso dat niet iedere combinatie van beginvoorwaarden voldoet aan eis (3.28). Stel namelijk  $R_{min} = 0$  en  $R^* = 1/2$ . Dan geldt:

$$\ln\left(\frac{A(R_{min})}{R^{*2} - R_{min}^2}\right) = \ln(4)$$

Als aan (3.28) voldaan wordt, dan moet dus gelden:

$$\ln(4) < \ln\left(\frac{A(R)}{1/4 - R^2}\right) \text{ voor alle } \forall R \in [0, 1/2]$$

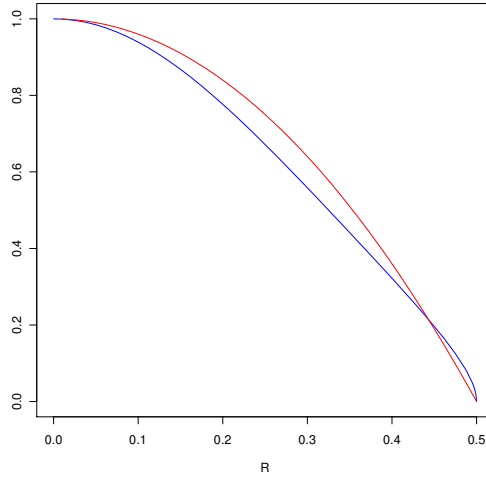
Omdat de logaritme bij positief argument een stijgende functie is, moet dan dus gelden:

$$A(R) > 1 - 4R^2$$

In figuur 3.2 zijn de functies  $f(R) := 1 - 4R^2$  en  $A(R)$  (waarbij de numerieke data gebruikt is) geplot als functie van  $R$ . Uit het snijpunt van de twee grafieken volgt dus dat  $R_{min} = 0$  en  $R^* = 1/2$  niet voldoen aan (4.35).

Door de functie  $g(R) := \ln\left(\frac{A(R)}{R^{*2} - R^2}\right)$  te plotten voor verschillende waarden van  $R^*$  en vervolgens te kijken of deze functie stijgend is, kan bepaald worden welke randvoorwaarden aan (3.28) voldoen. Met het 'blote oog' kan vastgesteld worden dat voor  $R^* \in [0, 0.4]$  aan (3.28) voldaan is. In figuur 3.3 is de functie  $g(R)$  geplot voor  $R^* = 0.4$ . Voor  $R \in [0, 0.4]$  is deze functie nog net stijgend en voldoet dus aan (3.28).





**Figuur 3.2:** De numerieke data (blauw) en de functie  $f(R) := 1 - 4R^2$  (rood) als functie van  $R$

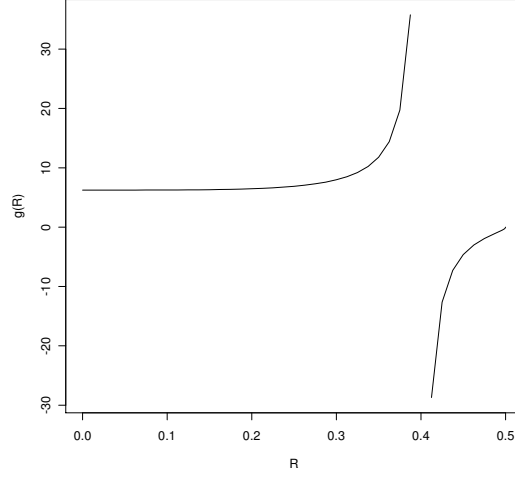
## 4 Veralgemeinering

In sectie 3 is voor de gekozen porieconfiguratie de uniciteit en existentie van bepaalde soorten lopende golven aangetoond. In [1] is hetzelfde gedaan, waarbij een porie gemodelleerd is als dunne strip. De stelsels partiële differentiaalvergelijkingen die het systeem beschrijven (na homogenisatie door middel van asymptotische expansies), lijken erg op elkaar, hoewel er toch een heel andere modellering op microschaal is gekozen.

In deze sectie wordt een stelsel differentiaalvergelijkingen geformuleerd, waarvan het stelsel in zowel sectie 3 als [1] een speciaal geval van zijn. Vervolgens wordt gezocht naar existentie en uniciteit van lopende golven van dit algemene stelsel. Als deze existentie en uniciteit bewezen kunnen worden, worden de bewijzen uit [1] en sectie 3 hierin gevangen. Bovendien is uniciteit en existentie van lopende golfoplossingen van niet nader gespecificeerde poriegeometriën die aan het algemene stelsel voldoen dan bewezen.

### 4.1 Lopende golven van het algemene stelsel

Het algemene stelsel dat in deze sectie centraal staat, ziet er als volgt uit:



**Figuur 3.3:** De functie  $g(R) := \ln\left(\frac{A(R)}{R^{*2} - R^2}\right)$  als functie van  $R$  (bij  $R^* = 0.4$ )

$$\begin{cases} \partial_t(\phi u + (1 - \phi - \phi_g)\rho) = \partial_x(DA(\phi)\partial_x u - qu) \\ \partial_t \phi = f(\phi)(r(u) - w) \\ w \in H(\phi_{max} - \phi) \\ \partial_x q = -\partial_t \phi K \end{cases} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R} \text{ en } t > 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u(+\infty, t) = u_{b1} \\ u(-\infty, t) = u_{b2} \\ q(-\infty, t) = q_{b2} \end{cases} \quad \text{voor } t > 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_I(x) \\ \phi(x, 0) = \phi_I(x) \end{cases} \quad \text{voor } -\infty < x < \infty \quad (4.3)$$

Het grootste verschil met eerdere stelsels is de geïntroduceerde poriefunctie  $\phi$ .

In dit stelsel differentiaalvergelijkingen gelden voor de parameters  $\rho, k, K, \mu$  en  $D$  weer dezelfde voorwaarden als eerder (zie (2.31)). De eerder gestelde voorwaarden voor de functies  $u, q, r$  en  $H$  blijven ook hetzelfde (zie (2.32)). Aan de functies  $f, A$  en  $\phi$  en aan de parameter  $\phi_{max}$  worden de volgende eisen gesteld:

$$0 < \phi \leq \phi_{max} < 1 \quad (4.4)$$

$$f(\phi) < 0 \text{ voor alle } \phi \quad (4.5)$$

$$A(\phi) > 0 \text{ voor alle } \phi \text{ en } A(\phi) \text{ stijgend voor alle } \phi \quad (4.6)$$

Allereerst laten we zien dat de stelsels in [1] en sectie 3 een speciaal geval zijn van (4.1)

Het stelsel eindimensionale partiële differentiaalvergelijkingen (na homogenisatie door middel van asymptotische expansies) dat centraal staat in [1] ziet er als volgt uit (waarbij de voorwaarden aan de rand en de voorwaarden op  $t = 0$  niet aangegeven zijn, omdat deze geheel vergelijkbaar zijn met (4.1)):

$$\begin{cases} \partial_t((1-2d)u + 2\rho d) - \partial_x((1-2d)D\partial_x u - qu) = 0, & \text{voor } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \partial_t d \in k(r(u) - H(d)), \\ \partial_x q - 2K\partial_t d = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Stel nu  $\phi = 1 - 2d$ . Dan volgt het volgende stelsel voor  $\phi, q$  en  $u$ .

$$\begin{cases} \partial_t(\phi u + \rho(1-\phi)) - \partial_x(\phi D\partial_x u - qu) = 0, & \text{voor } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \partial_t \phi \in -2k(r(u) - H(1-\phi)), \\ \partial_x q + K\partial_t \phi = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Door de volgende keuzes voor  $A(\phi), f(\phi), \phi_{max}$  en  $\phi_g$  gaat (4.8) over in het algemene stelsel (4.1).

$$\begin{aligned} \cdot A(\phi) &= \phi \\ \cdot f(\phi) &= -2k \\ \cdot \phi_{max} &= 1 \\ \cdot \phi_g &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Deze keuzes voldoen aan voorwaarden (4.4), (4.5) en (4.6).

Het stelsel eindimensionale partiële differentiaalvergelijkingen dat centraal staat in sectie 2 ziet er als volgt uit (waarbij de voorwaarden aan de rand en de voorwaarden op  $t = 0$  niet aangegeven zijn, omdat deze geheel vergelijkbaar zijn met (4.1)):

$$\begin{cases} \partial_t \pi R^2 u + \rho \pi (R^2 - R_{min}^2) - \partial_x (DA^*(R)\partial_x u - qu) = 0, \\ \partial_t R \in k(r(u) - H(R - R_{min})), \\ \partial_x q - K\partial_t R = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Stel nu  $\phi = 1 - \pi R^2$ . Dan volgt het volgende stelsel voor  $\phi, q$  en  $u$ .

$$\begin{cases} \partial_t(\phi u + \rho(1-\phi - \pi R_{min}^2)) - \partial_x(A^*(\sqrt{\frac{1-\phi}{\pi}})D\partial_x u - qu) = 0, \\ \partial_t \phi \in -2\pi\sqrt{\frac{1-\phi}{\pi}}k(r(u) - H(1 - \pi R_{min}^2 - \phi)), \\ \partial_x q + K\partial_t \phi = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Door de volgende keuzes voor  $A(\phi), f(\phi), \phi_{max}$  en  $\phi_g$  gaat (4.11) over in (4.1).

$$\begin{aligned} \cdot A(\phi) &= A^*(\sqrt{\frac{1-\phi}{\pi}}) \\ \cdot f(\phi) &= -2\pi\sqrt{\frac{1-\phi}{\pi}}k \\ \cdot \phi_{max} &= 1 - \pi R_{min}^2 \\ \cdot \phi_g &= \pi R_{min}^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Deze keuzes voldoen aan (4.4), (4.5) en (4.6).

Nu zal analoog aan sectie 3 gekeken worden naar lopende golfoplossingen. De bewijzen voor de verschillende (hulp)stellingen gaan grotendeels analoog aan de bewijzen geleverd in sectie 3. Voor de volledigheid zullen deze stellingen echter toch allemaal bewezen worden.

Om lopende golven van (4.1) te vinden, wordt weer verondersteld:  $\phi = \phi(\eta)$ ,  $u = u(\eta)$  en  $q = q(\eta)$ , waarbij  $\eta = x - at$ . Bovendien worden de volgende randvoorwaarden verondersteld:

$$\begin{aligned} u(-\infty) &= u_*, u(+\infty) = u^* \\ \phi(-\infty) &= \phi_*, \phi(+\infty) = \phi^* \\ q(-\infty) &= q_* \end{aligned} \quad (4.13)$$

Als dit gedaan wordt, kan stelsel (4.1) geschreven worden als:

$$\begin{cases} (i) & -a(\phi u + (1 - \phi - \phi_g)\rho)' = (DA(\phi)u' - qu)' \\ (ii) & -a\phi' \in f(\phi)(r(u) - H(\phi_{max} - \phi)) \\ (iii) & q' = \phi' aK \end{cases} \quad \text{op } \mathbb{R} \quad (4.14)$$

Allereerst wordt (4.14)(iii) geïntegreerd, om een uitdrukking voor de functie  $q$  en  $q^* = q(+\infty)$  te vinden. Er wordt gevonden:

$$q = q_* + (\phi - \phi_*)Ka \quad (4.15)$$

$$q^* = q_* + (\phi^* - \phi_*)Ka \quad (4.16)$$

Door vergelijking (4.14)(i) te integreren, wordt voor zekere  $C_1$  gevonden:

$$-a(\phi u + (1 - \phi - \phi_g)\rho) = DA(\phi)u' - qu + C_1 \quad (4.17)$$

Door de bekende randvoorwaarden voor  $\eta \rightarrow \pm\infty$  in te vullen, worden uitdrukkingen gevonden voor de golfsnelheid  $a$  en de randvoorwaarde  $C_1$ :

$$a = \frac{q_*(u_* - u^*)}{\phi_*u_* - \phi^*u^* + (\phi^* - \phi_*)(Ku^* + \rho)} \quad (4.18)$$

$$C_1 = -a[\phi_*u_* + \rho(1 - \phi_* - \phi_0)] + q_*u_* \quad (4.19)$$

Door (4.19) en (4.15) in te vullen in (4.17), wordt de volgende vergelijking voor  $u$  gevonden:

$$DA(\phi)u' = q_*(u - u_*) + a(\phi_*u_* - \phi u) - a[(\phi_* - \phi)(\rho + Ku)] \quad (4.20)$$

Lopende golven kunnen alleen bestaan als de randvoorwaarden voor  $u$  en  $\phi$  evenwichtspunten in het stelsel differentiaalvergelijkingen vormen. Door gebruik te maken van (4.14) worden dan de volgende twee voorwaarden gevonden:

$$0 \in f(\phi_*)(r(u_*) - H(\phi_{max} - \phi_*)) \quad (4.21)$$

$$0 \in f(\phi^*)(r(u^*) - H(\phi_{max} - \phi^*)) \quad (4.22)$$

Er wordt nu voor een aantal combinaties van randvoorwaarden aangetoond dat lopende golven niet kunnen bestaan.

- Stel  $\phi_*, \phi^* < \phi_{max}$  en  $\phi_* \neq \phi^*$ . Omdat  $f(\phi_*) \neq 0$ , levert (4.21)  $r(u_*) - 1 = 0$ . Hieruit volgt dus  $u_* = u_s$ . Omdat  $f(\phi^*) \neq 0$ , levert (4.22)  $r(u^*) - 1 = 0$ . Hieruit volgt dus  $u^* = u_s$ . Zodoende geldt dus  $u_* = u^* = u_s$ . Uit (4.18) volgt dan  $a = 0$ . Dit kan als volgt ingezien worden: de teller van (4.18) is nul. De noemer reduceert na invullen van  $u_* = u^* = u_s$  tot:

$$(\phi^* - \phi_*)(Ku_s + \rho - u_s)$$

De voorwaarde (2.24) zorgt er dus voor dat deze noemer ongelijk is aan nul.

Door substitutie van  $a = 0$  en  $u_* = u_s$  reduceert (4.20) tot:

$$DA(\phi)u' = q_*(u - u_s) \quad (4.23)$$

Om aan te tonen dat hieruit volgt  $u = u_s$ , wordt vanuit het ongerijmde geredeneerd. Stel dus dat er een  $\eta_0$  is zodanig dat  $u(\eta_0) \neq u_s$ . Neem aan dat  $u(\eta_0) > u_s$  (het geval  $u(\eta_0) < u_s$  gaat analoog), dan volgt uit (4.23) dat  $u'(\eta_0) > 0$ . Hieruit volgt dan dat  $u(\eta) > u(\eta_0) > u_s$  voor alle  $\eta > \eta_0$ , hetgeen in tegenspraak is met de voorwaarde  $u^* = u_s$ .

De situatie waarin  $u = u_s$  beschrijft de situatie van een stationaire (tijdsonafhankelijke) kristalverdeling en is fysisch niet interessant. Daarom wordt geconcludeerd dat bij deze combinatie van randvoorwaarden geen (interessante) lopende golven bestaan.

- Stel  $\phi_* = \phi^* = \phi_{max}$  en  $u_* \neq u^*$ .  
In dit geval reduceert (4.18) tot:

$$a = \frac{q_*}{\phi_{max}}$$

Er wordt nu een onderscheid gemaakt in twee gevallen:

- a)  $\phi = \phi_{max}$  op heel  $\mathbb{R}$ . Door substitutie van  $a = \frac{q_*}{\phi_{max}}$  en  $\phi = \phi^* = \phi_* = \phi_{max}$  reduceert (4.20) dan tot:

$$DA(\phi)u' = 0$$

Hieruit volgt dus  $u = u_s$  op heel  $\mathbb{R}$ . Dit is in tegenspraak met de randvoorwaarde  $u_* \neq u^*$ .

- b) Er bestaat een  $\eta_0$  zodanig dat  $\phi(\eta_0) < \phi_{max}$  en  $\phi'(\eta_0) = 0$ . Uit (4.14)(ii) volgt dan:

$$0 = (\phi(\eta_0))(r(u(\eta_0)) - 1)$$

Hieruit volgt dus dat  $u(\eta_0) = u_s$ .

Zoende reduceert (4.20) na substitutie  $a = \frac{q_*}{\phi_{max}}$ ,  $\phi_* = \phi_{max}$  en  $u = u_s$  tot:

$$DA(\phi(\eta_0))u'(\eta_0) = -q_*(1 - \frac{\phi(\eta_2)}{\phi_{max}})(\rho + Ku_s - u_s)$$

Wegens voorwaarden (2.24) en  $0 < \phi < \phi_{max}$  volgt dus  $u'(\eta_0) < 0$ .

Voorwaarde (2.25) zorgt nu voor  $u(\eta) > u_s$  als  $\eta < \eta_0$ . Dit is als volgt in te zien (redeneer vanuit het ongerijmde). Bekijk de verzameling  $S$  die bestaat uit alle waarden van  $\eta < \eta_0$  met als eigenschap  $u(\eta) \leq u_s$ . Dus  $S$  wordt gedefinieerd als:

$$S := \{\eta < \eta_0 | u(\eta) \leq u_s\}$$

Bekijk nu  $\eta_1 := \max S$ . Omdat  $u(\eta_0) > u_s$ , is er een  $\eta_2 \in (\eta_1, \eta_0)$ , zodanig dat  $u(\eta_2) = u_s$  en  $u'(\eta_2) > 0$ . Door substitutie van  $a = \frac{q_*}{\phi_{max}}$  en  $u(\eta_2) = u_s$  reduceert (4.20) echter tot:

$$DA(\phi(\eta_0))u'(\eta_2) = -q_*(1 - \frac{\phi(\eta_2)}{\phi_{max}})(\rho + Ku_s - u_s)$$

Uit (2.24) volgt nu dat  $u'(\eta_2) < 0$ , hetgeen een tegenspraak levert.

Als  $u(\eta) > u_s$  voor  $\eta < \eta_0$ , dan volgt  $u_* > u_s$ . Dit levert een tegenspraak met voorwaarde (4.21) (omdat in dit geval  $r(u_*) > 1$ , waardoor  $0 \notin k(r(u_*) - H(\phi_{max} - \phi_*))$ )

De volgende combinaties randvoorwaarden worden niet bekeken:

$$\phi_* = \phi^* = \phi_{max} \text{ en } u_* = u^*$$

$$\phi_* = \phi^* < \phi_{max}$$

In beide gevallen wordt de golfsnelheid  $a$  namelijk niet uniek bepaald (zowel de teller als de noemer van (4.18) zijn gelijk aan nul). Net als in sectie 3 wordt aangenomen dat er geen niet-triviale lopende golfoplossingen bestaan, maar dit kan hier nog niet bewezen worden.

Om niet triviale lopende golven van (4.1) te vinden, moet dus precies één van de randvoorwaarden voor  $\phi$  gelijk zijn aan  $\phi_{max}$ . We houden dus de volgende twee typen lopende golven over:

- $\phi_* = \phi_{max}$  en  $\phi^* < \phi_{max}$ .  
Uit (4.21), volgt dan  $u^* = u_s$  en  $0 \leq u_* < u_s$
- $\phi^* = \phi_{max}$  en  $\phi_* < \phi_{max}$ .  
Uit (4.22), volgt dan  $u_* = u_s$  en  $0 \leq u^* < u_s$

Samenvattend blijven de volgende twee nader te onderzoeken klassen over:

$$I = \begin{cases} \phi^* < \phi_{max}, \phi_* = \phi_{max} \\ u^* = u_s, 0 \leq u_* < u_s \end{cases} \quad (4.24)$$

$$II = \begin{cases} \phi_* < \phi_{max}, \phi^* = \phi_{max} \\ u_* = u_s, 0 \leq u^* < u_s \end{cases} \quad (4.25)$$

In appendix B wordt aangetoond dat voor beide klassen golven geldt:  $q_* > \phi_{max}a > 0$ , zodat dit later gebruikt kan worden.

Om iets te kunnen zeggen over het gedrag van golven van type I en golven van type II (en om vervolgens één van deze typen uit te kunnen sluiten), wordt de volgende propositie geformuleerd en bewezen:

**Propositie 4.1** *Laat  $(u, \phi, w, q, a)$  een lopende golf zijn met randvoorwaarden uit klasse I of klasse II. Dan geldt:*

- (i)  $u < u_s$  op heel  $\mathbb{R}$
- (ii)  $\phi$  is continu differentieerbaar en  $\phi' < 0$  als  $\phi < \phi_{max}$ .

*Bewijs:*

(i) Om te bewijzen dat  $u < u_s$  op heel  $\mathbb{R}$ , wordt eerst bewezen  $u \leq u_s$  op  $\mathbb{R}$  en vervolgens wordt strikte ongelijkheid aangetoond. Om te bewijzen dat  $u \leq u_s$ , wordt geredeneerd vanuit het ongerijmde. Stel dus er is een  $\eta_*$  zodanig dat  $u(\eta_*) > u_s$ . De randvoorwaarden voor golven van type I ( $u_* < u^* = u_s$ ) en voor golven van type II ( $u^* < u_* = u_s$ ) garanderen voor iedere (niet te grote)  $\delta > 0$  een  $\eta_0$  zodat  $u'(\eta_0) < 0$  en  $u(\eta_0) = u_s + \delta$ .

Door (4.20) op twee manieren te interpreteren, volgen de volgende twee vergelijkingen:

$$DA(\phi)u' = q_*(u - u_*) + a(\phi_*u_* - \phi u) - a[(\phi_* - \phi)(\rho + Ku)] \quad (4.26)$$

$$DA(\phi)u' = q^*(u - u^*) + a(\phi^*u^* - \phi u) - a[(\phi^* - \phi)(\rho + Ku)] \quad (4.27)$$

Door substitutie van  $u(\eta_0)$  en  $u'(\eta_0) < 0$  volgt dus:

$$q_*(u(\eta_0) - u_*) + a(\phi_*u_* - \phi(\eta_0)u(\eta_0)) - a[(\phi_* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0))] < 0 \quad (4.28)$$

Of:

$$q^*(u(\eta_0) - u^*) + a(\phi^*u^* - \phi(\eta_0)u(\eta_0)) - a[(\phi^* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0))] < 0 \quad (4.29)$$

We laten nu eerst zien dat zowel voor golven van type I als voor golven van type II volgt:  $\phi(\eta_0) < \phi_*$  en  $\phi(\eta_0) < \phi^*$ .

Eerst wordt dit aangetoond voor golven van type II. Volgens appendix B geldt:

$$q_* - \phi_*a > q_* - \phi_{max}a > 0$$

Dit kan als volgt gebruikt worden in (4.28):

$$q_*(u(\eta_0) - u_s) + a(\phi_*u_s - \phi(\eta_0)u(\eta_0)) - a[(\phi_* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0))] < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(q_* - \phi_* a)(u(\eta_0) - u_s) + \phi_* a(u(\eta_0) - u_*) + a(\phi_* u_s - \phi(\eta_0)u(\eta_0)) - a[(\phi_* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0))] < 0$$

Omdat de term  $(q_* - \phi_* a)(u(\eta_0) - u_s)$  groter dan nul is, moet ook gelden:

$$(\phi_* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0)) - \phi_*(u(\eta_0) - u_*) - (\phi_* u_s + \phi(\eta_0)u(\eta_0)) > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(\phi_* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0) - u(\eta_0)) > 0$$

Omdat  $u(\eta_0) = u_s + \delta$  met  $\delta$  willekeurig klein, levert (2.25) dat  $\phi(\eta_0) < \phi_*$ . Voor golven van type II geldt bovendien  $\phi_* < \phi^* = \phi_{max}$ , zodat gevonden wordt:

$$\phi(\eta_0) < \phi_* < \phi^*.$$

Voor golven van type I kan als volgt aangetoond worden dat  $\phi(\eta_0) < \phi^* < \phi_*$ : wegens (4.16) en appendix B geldt:

$$q^* - Ka\phi^* + (K - 1)\phi_{max} = q_* - \phi_{max}a > 0$$

Dit kan als volgt gebruikt worden in (4.29):

$$q^*(u(\eta_0) - u^*) + a(\phi^* u^* - \phi(\eta_0)u(\eta_0)) - a[(\phi^* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0))] < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(q^* - Ka\phi^* + (K - 1)\phi_{max}a)(u(\eta_0) - u_s) + (Ka\phi^* - (K - 1)\phi_{max}a)(u(\eta_0) - u_s) + a(\phi^* u_s - \phi(\eta_0)u(\eta_0)) - a[(\phi^* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0))] < 0$$

Omdat  $(q^* - Ka\phi^* + (K - 1)\phi_{max}a)(u(\eta_0) - u_s) > 0$ , moet ook gelden:

$$(\phi^* - \phi)(\rho + Ku(\eta_0)) - (\phi^* u_s - \phi(\eta_0)u(\eta_0)) - K\phi^*(u(\eta_0) - u_s) + (K - 1)\phi_{max}(u(\eta_0) - u_s) > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(\phi^* - \phi)(\rho + Ku(\eta_0) - u(\eta_0)) + (\phi^* - \phi_{max})(1 - K)(u(\eta_0) - u_s) > 0$$

Omdat  $\phi^* < \phi_{max}$ ,  $K < 1$  en  $u(\eta_1) > u_s$ , geldt:

$$(\phi^* - \phi_{max})(1 - K)(u(\eta_0) - u_s) < 0$$

Zodoende moet dus gelden:

$$(\phi^* - \phi(\eta_0))(\rho + Ku(\eta_0) - u(\eta_0)) > 0$$

Omdat  $u(\eta_0) = u_s + \delta$  met  $\delta$  willekeurig klein, levert (2.25) dat  $\phi(\eta_0) < \phi^*$ . Voor golven van type I geldt bovendien  $\phi^* < \phi_* = \phi_{max}$ , zodat gevonden wordt:

$$\phi(\eta_0) < \phi^* < \phi_*.$$

Het gegeven  $\phi(\eta_0) < \phi_*$  en  $\phi(\eta_0) < \phi^*$  (voor beide typen golven), kan gebruikt worden in (4.14)(ii). Er wordt dan gevonden  $w(\eta_0) = 1$  (omdat  $\phi(\eta_0) < \phi_{max}$ ). Bovendien wordt gevonden dat  $\phi'(\eta_0) > 0$ . Dit laatste is te begrijpen doordat geldt  $\phi'(\eta_0) = f(\phi(\eta_0))(r(u(\eta_0)) - w) / -a$ . Omdat  $u(\eta_0) > u_s$  (waardoor  $r(u(\eta_0)) > 1$ ) en omdat  $f(\phi(\eta_0)) < 0$ , geldt dus  $\phi'(\eta_0) > 0$ . Omdat  $\phi(-\infty) = \phi_*$ , moet er een punt  $\eta_1 < \eta_0$  zijn, zodanig dat  $\phi(\eta) < \phi(\eta_0)$  en  $\phi'(\eta) > 0$  voor alle  $\eta \in (\eta_1, \eta_0)$  en  $\phi'(\eta_1) = 0$ .

Uit (4.14)(ii), volgt dan  $w = 1$  en  $u > u_s$  op  $(\eta_1, \eta_0)$ , met  $u(\eta_1) = u_s$ . Als deze observaties in (4.28) en (4.29) gesubstitueerd worden, dan wordt gevonden  $u'(\eta_1) < 0$ , hetgeen een tegenspraak levert met  $u > u_s$  op  $(\eta_1, \eta_0)$ . Dus  $u \geq u_s$ .

Om te bewijzen dat geldt  $u < u_s$  wordt weer vanuit het ongerijmde geredeneerd. Er is niet bewezen dat geldt  $u \leq u_s$ , dus er wordt aangenomen dat er een  $\eta_0$  is zodanig dat  $u(\eta_0) = u_s$ . Omdat  $u \leq u_s$  geldt dan bovendien  $u'(\eta_0) = 0$ .

Stel we hebben een golf van type I. Dan geldt volgens (4.26) dat  $\phi(\eta_0) = \phi^*$ . Bij een golf van type II geldt wegens (4.27)  $\phi(\eta_0) = \phi_*$ . Voor beide typen golven geldt dus  $\phi(\eta_0) < \phi_{max}$ . Bovendien volgt  $w = 1$  in een omgeving van  $\eta_0$ . Zodoende zijn  $u = u_s$  en  $\phi = \phi(\eta_0)$  de unieke oplossingen in een omgeving van  $\eta_0$ , hetgeen een tegenspraak levert.

(ii) Om te bewijzen dat  $\phi' < 0$  als  $\phi < \phi_{max}$ , wordt (4.14)(ii) gebruikt (met  $w = 1$  omdat  $\phi < \phi_{max}$ ). Deze vergelijking reduceert dan tot:

$$\phi' = \frac{f(\phi)}{a}(1 - r(u))$$

Omdat  $u(\eta) < u_s$  voor alle  $\eta$ , is  $r(u(\eta)) < 1$  voor alle  $\eta$ . Gecombineerd met de aanname dat  $f(\phi(\eta)) < 0$  voor alle  $\eta$ , wordt dus gevonden:  $\phi'(\eta) < 0$ .  $\square$

Uit propositie 4.1(ii) volgt meteen dat er geen lopende golven met randcondities uit klasse II bestaan.

Om iets te kunnen zeggen over het gedrag van golven van type I, wordt de volgende propositie geformuleerd:

**Propositie 4.2** *Er is een  $L \in \mathbb{R}$  zodanig dat geldt:*

$$\phi(\eta) = \begin{cases} \phi_{max} & \text{als } -\infty < \eta \leq L \\ < \phi_{max} & \text{als } \eta > L \end{cases}$$

*Bewijs:*

Voor lopende golven van type I geldt  $\phi^* < \phi_{max}$ . Zodoende kan niet gelden:  $\phi = \phi_{max}$  op heel  $\mathbb{R}$ . Als aangetoond kan worden dat voor golven van type I ook niet kan gelden  $\phi(\eta) < \phi_{max}$  voor alle  $\eta$ , dan volgt de propositie door gebruik te maken van propositie 4.1(ii).

Stel dat er wel geldt  $\phi(\eta) < \phi_{max}$  op  $\mathbb{R}$ . Dan is  $w = 1$  op  $\mathbb{R}$ . Dan reduceert (4.14)(ii) tot:

$$\phi' = \frac{f(\phi)}{a}(1 - r(u))$$

Voor  $\phi \rightarrow -\infty$  wordt dan gevonden:

$$\phi'_* = \frac{f(\phi_*)}{a}(1 - r(u_*))$$

Omdat voor golven van type I geldt  $u_* < u_s$  volgt  $\phi'_* > 0$ , hetgeen een tegenspraak levert.  $\square$

## 4.2 Existentie

Nu golven van type II uitgesloten zijn en bovendien enig inzicht in de vorm van golven van type I is verkregen, kan existentie van golven van type I aangetoond worden.

**Stelling 4.3** *Voor iedere combinatie van randvoorwaarden van klasse I, is er een lopende golfoplossing.*

*Bewijs:*

Allereerst wordt de  $L$  uit propositie 4.2 op  $L = 0$  gezet. Dit betekent dat voor een lopende golfoplossing moet gelden:

$$\phi(\eta) < \phi_{max} \text{ voor } \eta > 0$$



$$\begin{aligned}\phi(\eta) &= \phi_{max} \text{ voor } \eta \leq 0 \\ w(\eta) &= 1 \text{ voor } \eta > 0\end{aligned}$$

Het stelsel differentiaalvergelijkingen dat geldt voor  $\eta \in \mathbb{R}$  (4.14) wordt nu gesplitst in een stelsel vergelijkingen dat geldig is voor  $\eta > 0$  (dit stelsel wordt  $P^+$  genoemd) en een stelsel dat geldig is voor  $\eta \leq 0$  (dit stelsel wordt  $P_-$  genoemd).

De stelsels  $P^+$  en  $P_-$  zien er dan als volgt uit:

$$P^+ \begin{cases} u' = \frac{q_*(u-u_*)+a(\phi_{max}u_*-\phi u)-a[(\phi_{max}-\phi)(\rho+Ku)]}{DA(\phi)} : f_1(u, \phi) \text{ als } \eta > 0, \\ \phi' = \frac{f(\phi)}{a}(1-r(u)) := f_2(u, \phi) \text{ als } \eta > 0 \\ u(0) = u_0 \in (u_*, u_s), \text{ en } \phi(0) = \phi_{max} \end{cases} \quad (4.30)$$

$$P_- \begin{cases} u' = \frac{q_*(u-u_*)+a\phi_{max}(u_*-u)}{DA(\phi_{max})} \text{ als } \eta < 0 \\ w = r(u) \text{ als } \eta < 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Om existentie aan te tonen, wordt eerst aangetoond dat er een beginwaarde  $u_0$  is, zodanig dat voor probleem  $P^+$  geldt:

$$(u(\eta), \phi(\eta)) \rightarrow (u_s, \phi^*) \text{ als } \eta \rightarrow \infty$$

Vervolgens kan deze waarde voor  $u_0$  gebruikt worden om probleem  $P_-$  expliciet op te lossen, waardoor de existentie van (4.14) aangetoond is.

Om aan te tonen dat er een dergelijke  $u_0$  bestaat, wordt eerst gekeken naar het teken van de functies  $f_1$  en  $f_2$ . De functie  $g$  wordt als volgt gedefinieerd:

$$g(u) := \frac{q_*(u-u_*)+a\phi_{max}(u_*-\rho-Ku)}{a(u-\rho-Ku)} \quad (4.32)$$

Voor  $u \in [u_*, u_s]$  en  $\phi \in [\phi^*, \phi_{max}]$  geldt:

$$f_1(u, \phi) > 0 \text{ (resp. } < 0) \Leftrightarrow g(u) < \phi \text{ (resp. } > 0)$$

$$f_2(u, \phi) < 0 \Leftrightarrow u < u_s$$

Allereerst worden de volgende eigenschappen afgeleid voor de gedefinieerde functie  $g$ :

- $g(u)$  is dalend voor  $u > 0$ . Dit wordt aangetoond in appendix D.
- $g(u_*) = \phi_{max}$ . Dit volgt direct door invullen van  $u = u_*$  in de functie  $g$ .
- $g(u_s) = \phi^*$ . Dit volgt direct door gebruik te maken van (4.18).

Vervolgens wordt de verzameling  $S$  als volgt gedefinieerd:

$$S := \{(u, \phi) | u_* < u < u_s, g(u) < \phi < \phi_{max}\}$$

We bekijken de randstukken  $\partial S_1$  en  $\partial S_2$ , die als volgt gedefinieerd zijn.

$$\partial S_1 := \{(u, \phi) | u_* < u < u_s, \phi = g(u)\}$$

$$\partial S_2 := \{(u, \phi) | u = u_s, \phi_* < \phi < \phi_{max}\}$$

In het interval  $(u_*, u_s)$  bekijken we twee deelverzamelingen ( $A$  en  $B$ ), waarbij elementen van  $A$  en  $B$  als volgt gedefinieerd zijn.

We zeggen  $\alpha \in A$  als de baan behorende bij de oplossing van probleem  $P^+$ , met randvoorwaarden  $u(0) = \alpha$  en  $\phi(0) = \phi_{max}$ , de verzameling  $S$  verlaat via  $\partial S_1$ .

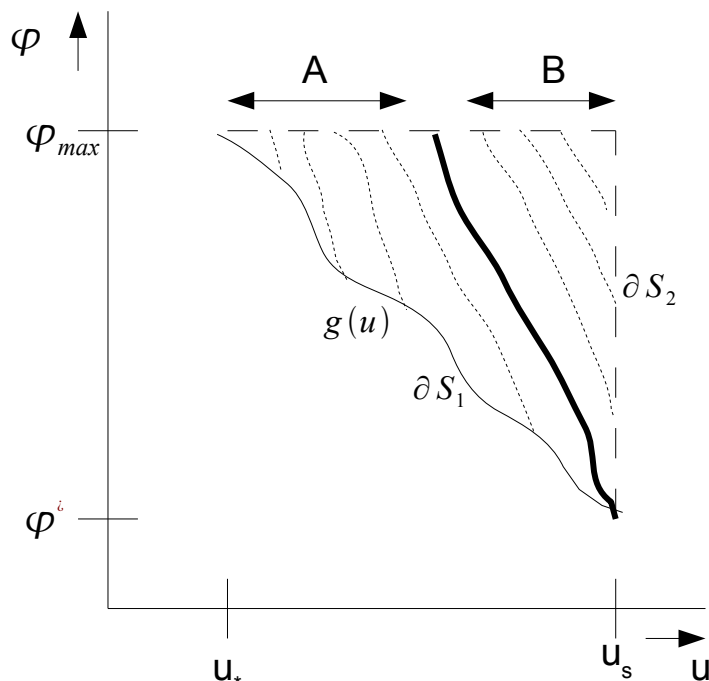
We zeggen  $\beta \in B$  als de baan behorende bij de oplossing van probleem  $P_-$ , met randvoorwaarden  $u(0) = \beta$  en  $\phi(0) = \phi_{max}$ , de verzameling  $S$  verlaat via  $\partial S_2$ .

Analoog aan [4] kan nu aangetoond worden:

- A en B zijn niet leeg.
- A en B zijn open.
- A en B zijn geordend.

Dit betekent dus dat voor iedere  $u_0 \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$  de baan behorende bij het probleem  $P^+$  eindigt in het punt  $(u_s, \phi^*)$  als  $\eta \rightarrow \infty$ .

Om dit technische bewijs visueel zichtbaar te maken, is figuur 4.1 gemaakt. Hierin wordt een



**Figuur 4.1:** Een mogelijke vorm van de functie  $g$ , de randstukken  $\partial S_1$  en  $\partial S_2$  en enkele mogelijke banen vanuit de verzamelingen  $A$  en  $B$ . De dikke lijn hoort bij een  $u_0$  zodanig dat  $(u(\eta), \phi(\eta)) \rightarrow (u_s, \phi^*)$  als  $\eta \rightarrow \infty$

mogelijke vorm van de functie  $g$  weergegeven. Bovendien zijn de randstukken  $\partial S_1$  en  $\partial S_2$  zichtbaar, evenals enkele mogelijke banen vanuit de verzamelingen  $A$  en  $B$ . Een mogelijke  $u_0$  (met bijbehorende baan) is ook weergegeven.

Nu bekend is dat er zo'n  $u_0$  is, kan voor deze  $u_0$  probleem  $P_-$  expliciet opgelost worden. Er is namelijk sprake van een eerste orde gewone differentiaalvergelijking, welke met bijvoorbeeld scheiding van variabelen opgelost kan worden. De homogene vergelijking ziet er als volgt uit:

$$DA(\phi_{max})u' = u(q_* - a\phi_{max})$$

Als deze opgelost wordt met scheiding van variabelen, vinden we;

$$u = C_1 \exp\left(\frac{q_* - a\phi_{max}}{DA(\phi_{max})}\eta\right)$$

Een oplossing van de particuliere vergelijking is  $u_*$ .  
De totale oplossing wordt dus gegeven door:

$$u = C_1 \exp\left(\frac{q_* - a\phi_{max}}{DA(\phi_{max})}\eta\right) + u_*$$

Uit  $u(\eta = 0) = u_0$  volgt voor de constante  $C_1$ :

$$C_1 = u_0 - u_*$$

Dus de oplossing voor  $\eta < 0$  voor het probleem  $P_-$  wordt gegeven door:

$$u(\eta) = (u_0 - u_*) \exp\left(\frac{q_* - a\phi_{max}}{DA(\phi_{max})}\eta\right) + u_* \quad (4.33)$$

□

### 4.3 Uniciteit

Nu existentie van golven van type I bewezen is, kan ook uniciteit (onder bepaalde randvoorwaarden) bewezen worden.

**Stelling 4.4** *Stel er zijn twee lopende golf oplossingen, gekarakteriseerd door  $(u_1, \phi_1, w_1, q_1)$  en  $(u_2, \phi_2, w_2, q_2)$ , voor dezelfde combinatie van randvoorwaarden van type I. Als geldt:*

$$\phi^* > \phi - \frac{A(\phi)}{\frac{d}{d\phi}A(\phi)} \text{ voor } \phi \in [\phi^*, \phi_{max}] \quad (4.34)$$

Dan is er een  $\eta_0 \in \mathbb{R}$  zodanig dat:

$$(u_1(\cdot), \phi_1(\cdot), w_1(\cdot), q_1(\cdot)) = (u_2(\cdot + \eta_0), \phi_2(\cdot + \eta_0), w_2(\cdot + \eta_0), q_2(\cdot + \eta_0))$$

Bewijs: Eerst wordt de  $L$  uit propositie 4.2 op  $L = 0$  gezet, zodat geldt:

$$\phi_1(\eta), \phi_2(\eta) < \phi_{max} \text{ als } \eta > 0$$

$$\phi_1(\eta) = \phi_2(\eta) = \phi_{max} \text{ als } \eta \leq 0$$

$$w_1(\eta) = w_2(\eta) = 1 \text{ voor } \eta > 0$$

Als we aan kunnen tonen dat  $u_1(0) = u_2(0)$ , dan volgt direct dat  $u_1 = u_2$ ,  $\phi_1 = \phi_2$ ,  $w_1 = w_2$  en  $q_1 = q_2$  op heel  $\mathbb{R}$ .

Om aan te tonen dat  $u_1(0) = u_2(0)$  wordt vanuit het ongerijmde geredeneerd. Stel dus zonder verlies van algemeenheid  $u_1(0) > u_2(0)$ . Stel dat  $u_1(\eta) \leq u_2(\eta)$  voor  $\eta > 0$ . (4.14)(ii) reduceert dan tot:

$$\phi' = \frac{f(\phi)}{a}(1 - r(u))$$

Er wordt dus gevonden dat  $\phi'$  dalend is voor  $\eta > 0$ , hetgeen leidt tot onderstaande ongelijkheid:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi_1(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta \frac{f(\theta)}{a}[1 - r(u_1(\theta))]d\theta < \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta \frac{f(\theta)}{a}[1 - r(u_2(\theta))]d\theta = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi_2(\eta)$$

Omdat  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi_1(\eta) = \phi_{max}$  en bovendien  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi_2(\eta) = \phi_{max}$ , levert dit dus een tegenspraak met de randvoorwaarden.

Zodoende bestaat er een  $\eta^* \in \mathbb{R}$ , met  $\eta^* > 0$ , zodanig dat  $u_1(\eta^*) < u_2(\eta^*)$ . Omdat  $u_1$  en  $u_2$  continu differentieerbaar zijn, moet er dan ook een  $\eta_* \in \mathbb{R}$  zijn, met  $\eta_* > 0$ , zodanig dat geldt:

$$u_1(\eta_*) = u_2(\eta_*), \quad (4.35)$$

$$u_1(\eta) \geq u_2(\eta) \text{ als } \eta \in [0, \eta_*], \quad (4.36)$$

$$u'_1(\eta_*) \leq u'_2(\eta_*) \quad (4.37)$$

Door gebruik te maken van (4.36) in combinatie met (4.14)(ii), geldt bovendien  $\phi_1(\eta_*) > \phi_2(\eta_*)$ . Om een tegenspraak te creëren, wordt (4.35) in (4.20) gesubstitueerd. Het doel is om aan te tonen dat  $u'_1(\eta_*) > u'_2(\eta_*)$  zodat een tegenspraak met (4.37) ontstaat.

Omdat  $\phi_1(\eta_*) > \phi_2(\eta_*)$ , is aantonen dat  $u'_1(\eta_*) > u'_2(\eta_*)$  equivalent met het aantonen dat  $\frac{d}{d\eta}u(\phi, u(\eta_*))$  een stijgende functie is van  $\phi$  (voor  $\phi \in [\phi^*, \phi_{max}]$ ).

Hierbij geldt voor  $\frac{d}{d\eta}u(\phi, u(\eta_*))$ :

$$\frac{d}{d\eta}u(\phi, u(\eta_*)) = \frac{q_*(u(\eta_*) - u_*) + a\phi_{max}[u_* - \rho - Ku(\eta_*)] - a\phi[u(\eta_*) - \rho + Ku(\eta_*)]}{DA(\phi)} \quad (4.38)$$

Om rekenwerk te besparen, worden de constanten  $C$  en  $B$  als volgt gedefinieerd:

$$C := \frac{q_*(u(\eta_*) - u_*) + a\phi_{max}(u_* - \rho - Ku(\eta_*))}{D} \quad (4.39)$$

$$B := \frac{a(u(\eta_*) - \rho - Ku(\eta_*))}{D} \quad (4.40)$$

Door substitutie van deze constanten gaat (4.38) over in:

$$\frac{d}{d\eta}u(\phi, u(\eta_*)) = \frac{C - B\phi}{A(\phi)}$$

We kunnen aantonen dat  $\frac{d}{d\eta}u(\phi, u(\eta_*))$  stijgend is in  $\phi$ , door te laten zien dat de afgeleide naar  $\phi$  kleiner dan nul is voor  $\phi \in [\phi^*, \phi_{max}]$ . Er geldt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \frac{C - B\phi}{A(\phi)} &= \frac{-BA(\phi) - (C - B\phi)\frac{d}{d\phi}A(\phi)}{A(\phi)^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \\ -\frac{d}{d\phi}A(\phi)\left(\frac{BA(\phi)}{\frac{d}{d\phi}A(\phi)} + C - B\phi\right) &> 0 \\ &\Leftrightarrow \\ C - B\left(\phi - \frac{A(\phi)}{\frac{d}{d\phi}A(\phi)}\right) &< 0 \text{ (omdat } A(\phi) > 0 \text{ en } A(\phi) \text{ stijgend.)} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{C}{B} > \phi - \frac{A(\phi)}{\frac{d}{d\phi}A(\phi)} &\text{ (omdat } B < 0 \text{ wegens (2.24))} \end{aligned}$$

Vervolgens wordt opgemerkt dat  $\frac{C}{B}$  precies dezelfde uitdrukking is als  $g(u(\eta_*))$  gedefinieerd in (4.32). Uit de bewezen eigenschappen van  $g$  volgt nu  $\frac{C}{B} > \phi^*$ . Er moet dan aangetoond worden:

$$\phi^* > \phi - \frac{A(\phi)}{\frac{d}{d\phi}A(\phi)} \text{ voor } \phi \in [\phi^*, \phi_{max}]$$

Dit geldt wegens de aanname in de stelling 4.34.

Onder bovenstaande voorwaarde geldt dus  $u'_1(\eta_*) > u'_2(\eta_*)$  hetgeen een tegenspraak levert met (4.37), waardoor  $u_1(0) = u_2(0)$  en dus geldt  $u_1 = u_2, \phi_1 = \phi_2, w_1 = w_2$  en  $q_1 = q_2$  op  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Net als bij het stelsel dat hoort bij het tweedimensionale geperforeerde domein, is het niet a priori duidelijk voor welke randvoorwaarden uniciteit van lopende golven nu bewezen is. In het algemeen zal de functie  $A(\phi)$  namelijk niet in gesloten vorm, maar in de vorm van numerieke resultaten, beschikbaar zijn. De term  $\frac{d}{d\phi}$  is dan onbekend. Zodoende wordt (4.34) als volgt omschreven:

$$\begin{aligned}
\phi^* &> \phi - \frac{A(\phi)}{\frac{d}{d\phi}A(\phi)} \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{\frac{d}{d\phi}A(\phi)}{A(\phi)} &< \frac{1}{\phi - \phi^*} \\
&\Leftrightarrow \\
\int_x^y \frac{\frac{d}{d\phi}A(\phi)}{A(\phi)} d\phi &< \int_x^y \frac{1}{\phi - \phi^*} d\phi \quad \forall x, y \in [\phi^*, \phi_{max}] \text{ met } y \geq x \\
&\Leftrightarrow \\
\ln\left(\frac{A(y)}{y - \phi^*}\right) &< \ln\left(\frac{A(x)}{x - \phi^*}\right) \\
&\Leftrightarrow \\
\ln\left(\frac{A(\phi)}{\phi - \phi^*}\right) &\text{ dalend in } \phi, \forall \phi \in [\phi^*, \phi_{max}] \tag{4.41}
\end{aligned}$$

#### 4.4 Vergelijking met eerdere resultaten

Nu kan onderzocht worden of de existentie- en uniciteitsresultaten van het bestudeerde gegeneraliseerde stelsel (4.1) overeenkomen met de existentie- en uniciteitsresultaten behorende bij twee speciale gevallen van het gegeneraliseerde stelsel: de modellering van het poreuze gebied als dunne strip (zie [1]) en als geperforeerd domein (zie hoofdstuk 3).

- In [1] wordt eerst de existentie van dissolutiegolven bewezen. Vervolgens wordt de uniciteit van deze golven bewezen voor iedere toegestane  $d^*$  (dus  $d^* \in [0, 1/2]$ ). In (4.9) is de transformatie van het gegeneraliseerde stelsel (4.1) naar het stelsel in [1] weergegeven. Door substitutie van  $A(\phi) = \phi$ ,  $\phi = 1 - 2d$  en  $\phi^* = 1 - 2d^*$  in (4.34) gaat de voldoende uniciteitsvoorwaarde over in:

$$1 - 2d^* > 0$$

Deze voorwaarde is dus geldig voor ieder toegestane  $d^*$  ( $d^* \in [0, 1/2]$ ).

- In hoofdstuk 3 wordt existentie van dissolutiegolven bewezen. Ook wordt de uniciteit van deze golven bewezen als  $R^* < 0.4$ . In (4.12) is de transformatie van het gegeneraliseerde stelsel (4.1) naar het stelsel in hoofdstuk 3 weergegeven. Door substitutie van  $A(\phi) = A^*(\sqrt{\frac{1-\phi}{\pi}})$ ,  $\phi = 1 - \pi R^2$  en  $\phi^* = 1 - \pi R^{*2}$  in (4.41) gaat de voldoende uniciteitsvoorwaarde over in:

$$\ln\left(\frac{A(R)}{R^{*2} - R^2}\right) \text{ stijgend } \forall \in [R_{min}, R^*]$$

Dit is precies 3.35, zodat uniciteit nu ook weer bewezen is voor  $R^* \in [0, 0.4]$ .

Dus: door alleen (4.1) te analyseren worden precies dezelfde resultaten gevonden als door zowel het stelsel in [1] én het stelsel in hoofdstuk 3 afzonderlijk te analyseren. Wellicht zijn er nog andere poriegeometrieën die voldoen aan (4.1) waarvoor existentie en uniciteit door beschouwing van dit gegeneraliseerde stelsel bewezen zijn.

## 5 Opzet voor verder onderzoek

In deze sectie wordt een stelsel differentiaalvergelijkingen gepresenteerd, dat lijkt op de twee eerder bestudeerde stelsels. In tegenstelling tot de eerder gepresenteerde stelsels, wordt fysisch verwacht dat van dit stelsel precipitatiegolven (neerslaggolven) wel bestaan. Hier wordt het bestaan van deze precipitatiegolven niet ontkracht of bewezen. Er wordt slechts aangegeven waarom het gecreëerde stelsel fysisch (en wiskundig) een ander gedrag vertoont dan de eerder bestudeerde stelsels, zodat het uitsluiten van precipitatiegolven niet analoog aan eerder kan gebeuren. Toekomstig onderzoek zou de existentie van dergelijke precipitatiegolven mogelijk kunnen garanderen.

Het stelsel dat nu bekeken wordt, is een uitbreiding van de eerder onderzochte stelsels en houdt rekening met mogelijke afschuring van het zout door toedoen van de stroomsnelheid. Afschuring van het zout wordt fysisch veroorzaakt door twee zaken: een hoge stromingssnelheid en een klein stromingsoppervlak binnen de poriën. Om dit verschijnsel in het model mee te nemen wordt de term  $\frac{q}{h(\phi)}$  aan de vergelijking  $\partial_t \phi = f(\phi)(r(u) - w)$  toegevoegd. Er wordt dus verondersteld dat het verband tussen stromingssnelheid  $q$  en afschuring lineair is, terwijl de invloed van het stromingsoppervlak geregeld wordt via een functie  $h(\phi)$ . Aan deze laatstgenoemde functie worden de volgende eisen gesteld:

$$h(\phi) = 0 \text{ voor } \phi = \phi_{min} \quad (5.1)$$

$$h(\phi) > 0 \text{ en stijgend voor } \phi > \phi_{min} \quad (5.2)$$

Het stelsel partiële differentiaalvergelijkingen dat dan bekeken moet worden, is als volgt (in dit stelsel gelden dezelfde voorwaarden voor de parameters en functies als eerder):

$$\begin{cases} (i) \partial_t(\phi u + (1 - \phi - \phi_g)\rho) = \partial_x(DA(\phi)\partial_x u - qu) \\ (ii) \partial_t \phi = f(\phi)(r(u) - w) + \frac{q}{h(\phi)} \\ (iii) w \in H(\phi_{max} - \phi) \\ (iv) \partial_x q = -\partial_t \phi K \end{cases} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R} \text{ en } t > 0 \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} u(+\infty, t) = u_{b1}(t) \\ u(-\infty, t) = u_{b2} \\ q(-\infty, t) = q_{b2} \end{cases} \quad \text{voor } t > 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_I(x) \\ \phi(x, 0) = \phi_I(x) \end{cases} \quad \text{voor } -\infty < x < \infty \quad (5.5)$$

Met het zoeken naar precipitatiegolven van 5.3, wordt net als eerder het zoeken naar lopende golven met onderstaande randvoorwaarden bedoeld:

$$\phi_* < \phi_{max} \text{ en } \phi^* = \phi_{max}$$

Het grootste verschil met de eerder onderzochte stelsels is de evenwichtsconcentratie. Met de evenwichtsconcentratie wordt de concentratie bedoeld, zodanig dat  $\phi' = 0$  als  $\phi_{max}$ . In sectie 4 was de evenwichtsconcentratie  $u_s$  constant, terwijl deze concentratie  $\tilde{u}$  nu een functie is van  $\phi$ . Deze functie wordt impliciet gegeven door onderstaande vergelijking (zie (5.3)(ii)):

$$r(\tilde{u}(\phi)) = -\frac{q(\phi)}{h(\phi)f(\phi)} + 1$$

Omdat  $f(\phi) < 0$  en  $q(\phi)$ ,  $h(\phi) > 0$  voor  $\phi > \phi_{max}$ , geldt dus  $\tilde{u}(\phi) > u_s$ .

Het is niet direct duidelijk hoe deze evenwichtsconcentratie zich gedraagt als functie van  $\phi$ . Dit wordt duidelijk gemaakt door de afgeleide:

$$\frac{d}{d\phi} \left( -\frac{q(\phi)}{h(\phi)f(\phi)} \right)$$

$$= \frac{-h(\phi)f(\phi)\frac{d}{d\phi}q(\phi) + q(\phi)\left[\frac{d}{d\phi}h(\phi)f(\phi) + h(\phi)\frac{d}{d\phi}f(\phi)\right]}{(h(\phi)f(\phi))^2}$$

Voor de functies  $h$ ,  $f$  en  $q$  is verondersteld:

- $h(\phi) > 0$  en  $\frac{d}{d\phi}h(\phi) > 0$
- $f(\phi) < 0$  en  $\frac{d}{d\phi}f(\phi) > 0$
- $q(\phi) > 0$  en  $\frac{d}{d\phi}q(\phi) > 0$

Uit deze veronderstellingen kan niets geconcludeerd worden omtrent het gedrag van de afgeleide  $\frac{d}{d\phi}r(\tilde{u}(\phi))$ .

Een gevolg hiervan is dat niet net als eerder geconcludeerd kan worden dat  $u_* > u^*$  voor precipatiegolven.  $u_*$  en  $u^*$  voldoen namelijk aan onderstaande vergelijkingen:

$$0 \in \frac{-1}{a}[f(\phi_*)(r(u_*) - 1) + \frac{q_*}{h(\phi_*)}] \quad (5.6)$$

$$0 \in \frac{-1}{a}[f(\phi^*)(r(u^*) - w) + \frac{q^*}{h(\phi^*)}] \quad (5.7)$$

Uit (4.26) volgt dat  $u_* = \tilde{u}(\phi_*) > u_s$ , maar kan niets gezegd worden over  $u^*$ .

In secties 3 en 4 worden precipatiegolven uitgesloten door aan te tonen dat  $u < u_s$ , waarvoor volgt  $\phi' < 0$  als  $\phi < \phi_{max}$ .

Om dit nu weer te doen, moet de volgend propositie bewezen worden:

**Propositie 5.1** *Laat  $(u, \phi, w, q, a)$  een lopende golf zijn met randvoorwaarden uit klasse I of klasse II. Dan geldt:*

- (i)  $u(\phi) < \tilde{u}(\phi)$  als  $\phi < \phi_{max}$
- (ii)  $\phi$  is continu differentieerbaar en  $\phi' < 0$  als  $\phi < \phi_{max}$ .

Als propositie (5.1)(i) eenmaal bewezen is, dan volgt (5.1)(ii) als volgt:

Stel  $\phi < \phi_{max}$ , dan is  $w = 1$ . Dan reduceert (5.3)(ii) tot:

$$\phi' = -\frac{1}{a}(f(\phi)(r(u) - 1)) + \frac{q(\phi)}{h(\phi)} \quad (5.8)$$

Omdat  $u(\phi) < \tilde{u}(\phi)$  als  $\phi < \phi_{max}$  volgt nu meteen  $\phi' < 0$  als  $\phi < \phi_{max}$

Uit propositie (5.1)(ii) volgt dan meteen dat precipatiegolven niet kunnen bestaan.

Het bewijzen van propositie (5.1)(i) kan echter niet analoog (vanuit het ongerijmde) aan de voorgaande secties.

Het lijkt allereerst belangrijk te zijn om preciezer te weten hoe de evenwichtsconcentratie  $\tilde{u}(\phi)$  zich gedraagt als functie van  $\phi$  (hetgeen samen hangt met de vraag of  $u_* > u^*$ ). Bovendien is  $\tilde{u}(\phi) > u_s$ , zodat (2.24) niet geldt. Deze eis was ook essentieel in de eerder geleverde bewijzen.

Al met al is het duidelijk dat hier nog onderzoek naar gedaan kan worden. Door eventuele aannamen rondom het gedrag van  $\tilde{u}(\phi)$  als functie van  $\phi$  en relaxatie van (2.24) (dus  $\frac{\tilde{u}(\phi) - \rho}{\tilde{u}(\phi)} < K < 1$ ), kan wellicht via propositie (5.1) bewezen worden dat precipatiegolven bij bepaalde verbanden tussen de functies  $h$ ,  $f$  en  $q$  niet kunnen bestaan. Mogelijk zijn er andere manieren te bedenken om het bestaan van bepaalde typen precipatiegolven aan te kunnen tonen, of te kunnen weerleggen.

## 6 Conclusie

In deze conclusie wordt het onderzoek dat gedaan is, samenvattend weergegeven. De belangrijkste resultaten die gevonden zijn, worden weergegeven en geëvalueerd. Bovendien worden mogelijkheden gegeven voor toekomstig onderzoek omtrent dit project.

Door gebruik te maken van een level-set functie, zijn door middel Stokes vergelijkingen, convectie-diffusie vergelijkingen en fysische wetten als massabehoud, vergelijkingen opgesteld die het transportproces (rekening houdend met neerslag en oplossen) van een vloeistof met zoutionen in een poreus gebied, beschrijven. Hierbij is het begrensde poreuze gebied gemodelleerd als tweedimensionaal geperforeerd domein.

Deze vergelijkingen leiden tot een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen met een vrije rand. Er is kort aangegeven dat dit stelsel, door gebruik te maken van homogenisatie door middel van asymptotische expansies, omgezet kan worden tot een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen op een begrensd (en vast) gebied. In dit stelsel spelen de onbekende functies  $R$  (de straal van de korrels met neerslag),  $q$  (de snelheid van de vloeistof) en  $u$  (de concentratie) een rol.

Eerst is aangetoond dat alleen dissolutiegolven een mogelijke oplossing van het stelsel vormen. Na grondigere studie omtrent de vorm van dergelijke dissolutiegolven, wordt existentie van dissolutiegolven bewezen.

Vervolgens is voor  $R^* < 0.4$  uniciteit aangetoond. Voor  $0.4 \leq R^* \leq 0.5$  is uniciteit niet bewezen. Wellicht is een oorzaak hiervoor dat de functie  $A(R)$  niet expliciet bekend is, maar hier alleen numerieke resultaten over bekend zijn.

In de literatuur is ook onderzoek gedaan naar zouttransport in poreuze media. Door het poreuze gebied te modelleren als dunne strip en vervolgens homogenisaties te gebruiken, blijft een vergelijkbaar stelsel partiële differentiaalvergelijkingen over als bij modellering als geperforeerd gebied.

Door introductie van de porieparameter  $\phi$  wordt een algemeen stelsel partiële differentiaalvergelijkingen opgesteld, waarvan de stelsels behorende bij de dunne strip en het geperforeerde tweedimensionale gebied, speciale gevallen zijn. Ook hier is eerst aangetoond dat alleen dissolutiegolven een mogelijke oplossing van het stelsel zijn. Analoog aan eerder, is existentie van dergelijke dissolutiegolven aangetoond. Als voldoende voorwaarde voor uniciteit is gevonden:

$$\ln\left(\frac{A(\phi)}{\phi - \phi^*}\right) \text{ dalend in } \phi, \forall \phi \in [\phi^*, \phi_{max}]$$

Deze uniciteitsvoorwaarde garandeert dissolutiegolven voor  $R^* < 0.4$  bij de modellering van het poreuze gebied als geperforeerd domein en garandeert de uniciteit van dissolutiegolven voor  $d^* < 1/2$  bij modellering van het poreuze gebied als dunne strip. De eerder gevonden resultaten (dunne strip en geperforeerd domein) omtrent existentie en uniciteit, komen dus helemaal overeen met de resultaten behorende bij het algemene stelsel. Wellicht zijn meerder poriegeometriën te beschrijven met het algemene stelsel; dit zou betekenen dat existentie en uniciteit van deze geometriën meteen bewezen is.

In de toekomst zou onderzoek gedaan kunnen worden naar aanscherping van de gevonden uniciteitsvoorwaarden. Zoals gezegd, is uniciteit hier alleen bewezen voor  $R < 0.4$ . Het is mogelijk dat uniciteit door scherpere afschattingen wél bewezen kan worden voor  $R^* < 0.5$  (en  $\phi_{max} < 1$ ). Bovendien zou in de toekomst onderzoek gedaan kunnen worden naar de existentie (en uniciteit) van precipitatiegolven in het stelsel differentiaalvergelijkingen aangegeven in sectie 5. Dit stelsel houdt rekening met afschuring van het zout door toedoen van de stroomsnelheid. Tot nu toe is alleen aangegeven waarom het uitsluiten van precipitatiegolven analoog aan eerder voor problemen zorgt. Misschien kunnen deze golven helemaal niet uitgesloten worden en kunnen juist existentie en uniciteit aangetoond worden.



$$\mathbf{A} \quad q_* > (1 - \pi R_{min}^2)a > 0$$

In deze appendix wordt aangetoond dat  $q_* > (1 - \phi R_{min}^2)a > 0$ , voor golven van type I en golven van type II (zie (3.16) en (3.17)). Voor  $a$  geldt de volgende uitdrukking (zie (3.10)):

$$a = \frac{\Delta u}{(\pi\rho + \pi K u^*)\Delta R^2 + \Delta((1 - \pi R^2)u)} q_* \quad (\text{A.1})$$

Hierbij geldt  $\Delta u := u_* - u_s$ ,  $\Delta R^2 := R_*^2 - R^{*2}$  en  $\Delta((1 - \pi R^2)u) := (1 - \pi R_*^2)u_* - (1 - \pi R^{*2})u^*$

Om het teken van  $a$  (en dus van  $(1 - \pi R_{min}^2)a$ ) te bepalen, wordt afzonderlijk naar golven van type I en type II gekeken. Als gekeken wordt naar golven van type I, dan reduceert vergelijking (A.1) (na invullen van de randvoorwaarden) tot:

$$a = \frac{u_* - u_s}{\pi(\rho + K u_s)(R_{min}^2 - R^{*2}) + (1 - \pi R_{min}^2)u_* - (1 - \pi R^{*2})u_s} q_* \quad (\text{A.2})$$

Omdat  $u_* < u_s$  is teller negatief. Voor de noemer geldt wegens (2.24) en  $R_{min} < R^*$ :

$$\pi(\rho + K u_s)(R_{min}^2 - R^{*2}) + (1 - \pi R_{min}^2)u_* - (1 - \pi R^{*2})u_s < \pi(\rho + K u_s - u_s)(R_{min}^2 - R^{*2}) < 0$$

Omdat zowel de teller als noemer van (A.2) kleiner dan nul zijn, is  $(1 - \pi R_{min}^2)a > 0$  voor golven van type I.

Bij golven van type II reduceert (A.1) tot:

$$a = \frac{u_s - u^*}{\pi(\rho + K u^*)(R_*^2 - R_{min}^2) + (1 - \pi R_*^2)u_s - (1 - \pi R_{min}^2)u^*} q_* \quad (\text{A.3})$$

Omdat  $u_s > u^*$  is de teller positief. Voor de noemer geldt wegens (2.24) en  $R_* > R_{min}$ :

$$\pi(\rho + K u^*)(R_*^2 - R_{min}^2) + (1 - \pi R_*^2)u_s - (1 - \pi R_{min}^2)u^* > \pi(\rho + K u^* - u^*)(R_*^2 - R_{min}^2) > 0$$

Omdat zowel de teller als noemer van (A.3) groter dan nul zijn, geldt  $(1 - \pi R_{min}^2)a > 0$  voor golven van type II.

Om te bewijzen dat  $q_* > (1 - \pi R_{min}^2)a$  wordt gekeken naar het teken van  $q_* - (1 - \pi R_{min}^2)a$ . Voor golven van type I wordt dan gevonden:

$$q_* - (1 - \pi R_{min}^2)a = \frac{\pi(\rho + K u_s - u_s)(R_{min}^2 - R^{*2})}{\pi(\rho + K u_s)(R_{min}^2 - R^{*2}) + (1 - \pi R_{min}^2)u_* - (1 - \pi R^{*2})u_s} q_* \quad (\text{A.4})$$

De teller van deze breuk is kleiner dan nul vanwege (2.24) en  $R_{min} < R^*$ . Voor de noemer geldt wegens (2.24) en  $R_{min} < R^*$ :

$$\pi(\rho + K u_s)(R_{min}^2 - R^{*2}) + (1 - \pi R_{min}^2)u_* - (1 - \pi R^{*2})u_s < \pi(\rho + K u_s - u_s)(R_{min}^2 - R^{*2}) < 0$$

Zodoende is  $q_* > (1 - \pi R_{min}^2)a$  voor golven van type I.

Voor golven van type II wordt gevonden:

$$q_* - (1 - \pi R_{min}^2)a = \frac{\pi(\rho + K u^* - u_s)(R_*^2 - R_{min}^2)}{\pi(\rho + K u^*)(R_*^2 - R_{min}^2) + (1 - \pi R_*^2)u_s - (1 - \pi R_{min}^2)u^*} q_* \quad (\text{A.5})$$

Voor de noemer geldt wegens (2.24) en  $R_* > R_{min}$ :

$$\pi(\rho + K u^*)(R_*^2 - R_{min}^2) + (1 - \pi R_*^2)u_s - (1 - \pi R_{min}^2)u^* > \pi(\rho + K u^* - u^*)(R_*^2 - R_{min}^2) > 0$$

Om het teken van de teller te bepalen, worden de gevallen  $K \geq 0$  en  $K < 0$  apart bekeken:  
Als  $K \geq 0$ , dan geldt (wegens 2.26):

$$\rho + Ku^* - u_s \geq \rho - u_s > 0$$

Als  $K < 0$ , dan geldt (wegens 2.24):

$$\rho + Ku^* - u_s > \rho + Ku_s - u_s > 0$$

Omdat bovendien geldt  $R_* > R_{min}$  is de teller van (A.5) positief.  
Zodoende is  $q_* > (1 - \pi R_{min}^2)a$  voor golven van type II.

## B $q_* > \phi_{max}a > 0$

In deze sectie wordt bewezen dat  $q_* > \phi_{max}a > 0$ , zowel voor golven van type I (zie (4.24)) als voor golven van type II (zie (4.25)).

Eerst wordt bewezen dat de golfsnelheid  $a > 0$  (zodat  $\phi_{max}a > 0$ ), waarbij  $a$  gegeven wordt door:

$$a = \frac{(u_* - u^*)}{\phi_* u_* - \phi^* u^* + (\phi^* - \phi_*)(Ku^* + \rho)} q_* \quad (\text{B.1})$$

Voor golven van type I reduceert (B.1) tot:

$$\frac{u_* - u_s}{\phi_{max} u_* - \phi^* u_s + (\phi^* - \phi_{max})(Ku_s + \rho)} q_*$$

Omdat  $u_* < u_s$  (voor golven van dit type) is de teller van deze uitdrukking kleiner dan nul. De noemer van deze uitdrukking is ook kleiner dan nul, hetgeen door gebruik te maken van voorwaarde (2.24) en de aanname  $\phi^* < \phi_{max}$  als volgt aangetoond kan worden:

$$\phi_{max} u_* - \phi^* u_s + (\phi^* - \phi_{max})(Ku_s + \rho) < (\phi^* - \phi_{max})(Ku_s + \rho - u_s) < 0$$

Omdat zowel de teller en noemer negatief zijn, is de golfsnelheid  $a$  (voor golven van type I) groter dan nul.

Voor golven van type II reduceert (B.1) tot:

$$\frac{u_s - u^*}{\phi_* u_s - \phi_{max} u^* + (\phi_{max} - \phi_*)(Ku^* + \rho)_*} q_*$$

Omdat  $u_s - u^* > 0$  is de teller van bovenstaande uitdrukking groter dan nul. De noemer van deze uitdrukking is ook groter dan nul, dit wordt aangetoond door gebruik te maken van voorwaarde (2.24) en aanname  $\phi_{max} > \phi^*$ :

$$\phi_* u_s - \phi_{max} u^* + (\phi_{max} - \phi_*)(Ku^* + \rho) > (\phi_{max} - \phi_*)(Ku^* + \rho - u^*) > 0$$

Omdat zowel de teller als de noemer positief zijn, is de golfsnelheid  $a$  (voor golven van type II) groter dan nul.

Om te bewijzen dat  $q_* > \phi_{max}a$  wordt gekeken naar het teken van  $q_* - \phi_{max}a$ . Voor  $a$  wordt gebruik gemaakt van (B.1). Voor golven van type I wordt dan gevonden (nadat  $q_* - \phi_{max}a$  als een breuk geschreven is):

$$q_* - \phi_{max}a = \frac{(\phi^* - \phi_{max})(Ku_s + \rho - u_s)}{\phi_{max} u_* - \phi^* u_s + (\phi^* - \phi_{max})(Ku_s + \rho)} q_* \quad (\text{B.2})$$

De noemer van bovenstaande uitdrukking is kleiner dan nul, dit wordt als volgt aangetoond door gebruik te maken van voorwaarde (2.24) en de aanname  $\phi_{max} > \phi^*$  (voor golven van dit type):

$$\phi_{max} u_* - \phi^* u_s + (\phi^* - \phi_{max})(Ku_s + \rho) < (\phi^* - \phi_{max})(Ku_s + \rho - u_s) < 0$$

De teller is kleiner dan nul vanwege (2.24). Omdat zowel de teller als de noemer negatief zijn, geldt voor golven van type I dus  $q_* > \phi_{max}a$ .

Voor golven van type II wordt gevonden:

$$q_* - \phi_{max}a = \frac{(\phi_{max} - \phi_*)(Ku^* + \rho - u_s)}{\phi_* u_s - \phi_{max} u^* + (\phi_{max} - \phi_*)(Ku_s + \rho)} q_* \quad (\text{B.3})$$

De noemer van bovenstaande uitdrukking is groter dan nul. Dit wordt als volgt aangetoond door gebruik te maken van voorwaarde (2.24) en de aanname  $\phi_{max} > \phi_*$  (voor golven van dit type):

$$\phi_* u_s - \phi_{max} u^* + (\phi_{max} - \phi_*)(K u_s + \rho) > (\phi_{max} - \phi_*)(K u_s + \rho - u_s) > 0$$

Om het teken van de teller van (B.3) te bepalen worden de gevallen  $K \geq 0$  en  $K < 0$  onderscheiden.

Als  $K \geq 0$  dan geldt wegens (2.26):

$$\rho + K u^* - u_s \geq \rho + u_s > 0$$

Als  $K < 0$  dan geldt wegens (2.24):

$$\rho + K u^* - u_s \geq \rho + K u_s - u_s > 0$$

Omdat zowel de teller als de noemer positief zijn, geldt voor golven van type II dus  $q_* > \phi_{max} a$ .

## C $f(u)$ stijgend voor $u > 0$

In deze sectie wordt aangetoond dat  $f(u)$  stijgend is voor  $u > 0$ , waarbij  $f(u)$  gegeven wordt door:

$$f(u) := \sqrt{\frac{(q_* - a)(u - u_*) + \pi a R_{min}^2 (\rho + Ku - u_*)}{a\pi(\rho - u(1 - K))}}$$

Om aan te tonen dat  $f$  stijgend is, wordt gekeken naar de afgeleide  $\frac{d}{du}f(u)^2$ . Het doel is om aan te tonen dat geldt:

$$\frac{d}{du}f(u)^2 > 0 \text{ voor } u > 0$$

Er geldt:

$$\frac{d}{du}f(u)^2 = \frac{a\pi[\rho - (u(1 - K))][q_* - a + \pi a R_{min}^2 K] + [(q_* - a)(u - u_*) + \pi a R_{min}^2 (\rho + Ku - u_*)]a\pi(1 - K)}{[a\pi(\rho - u(1 - K))]^2}$$

Het is duidelijk dat de noemer van bovenstaande uitdrukking groter is dan nul.

De teller reduceert tot:

$$\begin{aligned} & (\rho - (u(1 - K)))[q_* - a + \pi a R_{min}^2 K] + [(q_* - a)(u - u_*) + \pi a R_{min}^2 (\rho + Ku - u_*)](1 - K) \\ & = (q_* - (1 - \pi R_{min}^2)a)(\rho + Ku_* - u_*) \end{aligned}$$

Wegens (2.24) is de noemer dus ook groter dan nul.

Dus voor  $u > 0$  is  $f(u)$  stijgend.

## D $g(u)$ dalend voor $u > 0$

In deze sectie wordt aangetoond dat  $g(u)$  dalend is voor  $u > 0$ , waarbij  $g(u)$  gegeven wordt door:

$$\frac{q_*(u - u_*) + a\phi_{max}(u_* - \rho - Ku)}{a(u - \rho - Ku)}$$

Om aan te tonen dat  $g$  dalend is voor  $u > 0$ , wordt gekeken naar de afgeleide van  $g$ . Het doel is dan om te laten zien dat geldt:

$$\frac{d}{du}g(u) < 0 \text{ voor } u > 0$$

Voor  $\frac{d}{du}g(u)$  geldt:

$$\frac{d}{du}g(u) = \frac{a(u - \rho - Ku)(q_* - Ka\phi_{max}) - [q_*(u - u_*) + a\phi_{max}(u_* - \rho - Ku)](1 - K)a}{a^2(u - \rho - Ku)^2}$$

Het is duidelijk dat de noemer van bovenstaande uitdrukking groter is dan nul voor  $u > 0$ , zodat nog aangetoond moet worden dat de teller van bovenstaande breuk kleiner is dan nul. Er geldt:

$$(u - \rho - Ku)(q_* - Ka\phi_{max}) + (K - 1)(q_*(u - u_*) + a\phi_{max}(u_* - \rho)) = (q_* - a\phi_{max})(u_* - u_*K - \rho)$$

Deze uitdrukking is kleiner dan nul, wegens (2.24).

Dus als  $u > 0$  is  $g(u)$  dalend.

## Referenties

- [1] T. L. van Noorden, *Crystal precipitation and dissolution in a thin strip*, tech. report, CASA report 30, Eindhoven University of Technology, 2007.
- [2] C.J. van Duijn en P. Knabner, *Travelling wave behaviour of crystal dissolution in porous media flow*, European J.Appl.Math., 8 (1997), pp. 49-72.
- [3] T. L. van Noorden, *Crystal precipitation and dissolution in a porous medium: Effective equations and numerical experiments*
- [4] C.J. van Duijn en P.Knabner, *Solute transport in porous media with equilibrium and nonequilibrium multiple-site adsorption: travelling waves*, J. Reine Angew. Math., 415 (1991), pp. 1-49.
- [5] C.J. van Duijn en I.S. Pop, *Crystal dissolution and precipitation in porous media: pore scale analysis*, J. reine angew. Math., 577 (2004), pp. 171-211.
- [6] T.L. van Noorden, I.S. Pop en M.Röger, *Crystal dissolution and precipitation in porous media:  $L^1$  - contraction and uniqueness*, tech. report, CASA report 32, Eindhoven University of Technology, 2006.
- [7] P.Knabner, C.J. van Duijn, en S.Hengst, *An analysis of crystal dissolution fronts in flows through porous media. Part 1: Compatible boundary conditions*, Adv. Water Res., 18 (1995), pp. 171-185.