BACHELOR

De Henstock-integraal
een uitbreiding van het integreerbaarheidsconcept

Jorritsma, J.

Award date:
2014

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

BACHELOREINDPROJECT

De Henstock-integraal: Een uitbreiding van het integreerbaarheidsconcept

Auteur:
Joost Jorritsma

Begeleider:
prof. dr. J.J.M. Slot
Tweede Corrector:
dr. A. Di Bucchianico
Adviseur:
prof. dr. ir. J. de Graaf

2 april 2014

Hoofdstuk 1

Inleiding

In allerlei verschillende takken van exacte wetenschappen wordt er gerekend met integralen. Met behulp van integraalrekening kunnen we het oppervlak of de inhoud onder een functie op een bepaald gebied of interval bepalen. Er zijn verschillende manieren om integralen te definiëren en elke manier heeft zijn voor- en nadeel. De Riemann-integraal is de meest bekende integraal en wordt op de middelbare school al geleerd. Een meer abstracte integraal is de Lebesgue-integraal. Daarnaast zijn er nog vele onbekendere integralen, waaronder de Henstock-integraal.

Met de Lebesgue-integraal is het niet mogelijk om integralen te definiëren voor sommige oscillerende functies op een onbegrensd interval, zoals $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. In onder andere de kwantummechanica spelen oscillerende functies wel een belangrijke rol en om deze functies te kunnen integreren moet er dus een andere definitie van integralen geformuleerd worden. In deze scriptie zal ik aan de hand van een aantal elementaire functies duidelijk proberen te maken hoe de Henstock-integraal gedefinieerd is en hoe deze ons in staat stelt het integraalbegrip te verruimen.

Tevens zal ik de definitie van de Henstock-integraal uitbreiden naar hoger-dimensionale ruimten, eerst de $\mathbb{R}^n$, later zelfs naar een oneindig dimensionale ruimte. Wanneer deze integraal goed gedefinieerd is, is het mogelijk om te bewijzen dat de Feynman pad-integraal inderdaad een 'propagator' definieert die de Schrödinger-vergelijking in principe oplost. Een exact bewijs hiervoor is te vinden in **M**.

Hoofdstuk 2

Riemann-integraal

De Riemann-integraal is gedefinieerd voor begrensde functies f op een begrensde open, half-open, of gesloten verzameling. De Riemann-integraal is het eenvoudigst te definiëren voor functies $f : I \to \mathbb{R}$, hierbij is $[a, b] \subset \mathbb{R}$ een interval met randpunten a en b. Er wordt hier gekozen voor een gesloten interval. Het blijkt echter dat het voor de waarde van de integraal niet uitmaakt of er wordt gekozen voor een open, gesloten of halfopen interval. Vanuit deze definitie ligt een uitbreiding naar $\mathbb{R}^n$ voor de hand.
Het principe van de Riemann-integraal is als volgt: We gaan de oppervlakte onder een functie benaderen met de oppervlakte van rechthoeken. Wanneer we de breedte van deze rechthoeken kleiner gaan maken, zou de benadering steeds beter moeten worden.
Om rechthoeken te creëren, moet eerst het interval I worden opgedeeld in kleinere stukken. Dit brengt ons tot de definitie van een partitie.

Definitie 1. *Zij $I \subset \mathbb{R}$ gegeven, hierbij is I een interval met randpunten a en b. Een partitie $\mathcal{P}_I$ is een eindige verzameling intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ zodanig dat:*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

We schrijven ook wel $\mathcal{P}_I = \{I_i = [x_{i-1}, x_i] : 1 \leq i \leq n, \cup_{i=1}^n I_i = I, I_i \cap I_{i+1} = \{x_i\}\}$

Wanneer we een partitie $\mathcal{P}$ hebben, is het interval I opgedeeld in n subintervallen. Zoals al aangegeven zal voor een goede benadering van de integraal de breedte van de rechthoeken erg klein moeten zijn. Om twee partities met elkaar te vergelijken, kan met behulp van een norm een ordening ingevoerd worden.

Definitie 2. *De norm $\mu(\mathcal{P})$ van een partitie is de lengte van het grootste subinterval:*

$$\mu(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq \imath \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

2.1 Riemann-sommen

De breedte van de benaderende rechthoeken is bepaald met behulp van de partitie. Om de hoogte van de rechthoeken te bepalen nemen we in elk subinterval de waarde van f in een punt $q_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Het punt $(q_i, f(q_i))$ fungeert als een representant van het i-de subinterval.

Definitie 3. *Een getagd interval (q, I) is een paar dat bestaat uit een interval I en een punt $q \in I$, waarbij q de tag van I is.*

Wanneer we dit in elk interval doen, ontstaat een 'getagde' partitie.

Definitie 4. *Een getagde partitie $\mathcal{P}_I^*$ is een partitie $\mathcal{P}_I$, waarbij aan elk deelinterval $I_i \in \mathcal{P}_I$ een punt $q_i \in I$ wordt toegevoegd.*

$$\mathcal{P}_I^* = \{(q_i, I_i) : I_i = [x_{i-1}, x_i] : 1 \leq i \leq n, \cup_{i=1}^n I_i = I, I_i \cap I_{i+1} = \{x_i\}, q_i \in I_i\} \tag{2.1}$$

We schrijven ook wel:

$$\mathcal{P}_{I^*} = \{(q_i, I_i) : 1 \leq i \leq n\} \tag{2.2}$$

Merk op dat q een tag kan zijn voor twee verschillende intervallen van de partitie. Dit komt omdat de intervallen I_i gesloten zijn. Een randpunt kan dus voor twee aaneengrenzende intervallen de tag zijn.
De totale oppervlakte van rechthoeken is de zogenaamde Riemann-som.

Definitie 5. *Gegeven een functie f en een getagde partitie $\mathcal{P}$, dan is de Riemann-som $S(\mathcal{P}, f)$ gedefinieerd door:*

$$S(\mathcal{P}, f) := \sum_{i=1}^{n} f(q_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2.3}$$

Definitie 6. *Een functie f is Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als er een $A \in \mathbb{R}$ is zodanig dat voor elke $\varepsilon > 0$, er een $\delta > 0$ is, zodanig dat voor elke getagde partitie $\mathcal{P}$ met $\mu(\mathcal{P}) < \delta$ geldt dat:*

$$|S(\mathcal{P}, f) - A| < \varepsilon$$

2.2 Darboux-sommen

De definitie van Riemann geeft nog geen methode om na te gaan of een functie Riemann-integreerbaar is. De Franse wiskundige Darboux gaf een andere definitie van de integraal, welke equivalent is met die van Riemann. Hiervoor gebruikte hij onder- en bovensommen van een partitie $\mathcal{P}$.

Definitie 7. *Zij een partitie $\mathcal{P}_I$ gegeven. Voor de bovensom $U(\mathcal{P}, f)$ construeren we vanuit $\mathcal{P}$ een getagde partitie $\mathcal{P}_1^*$ met tagwaarden $f_{\sup}([x_{i-1}, x_i]) := \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$. Dan geldt voor de bovensom:*

$$U(\mathcal{P}, f) := S(\mathcal{P}_1^*, f) \tag{2.4}$$

Definitie 8. *Zij een partitie $\mathcal{P}$ gegeven. Voor de ondersom $L(\mathcal{P}, f)$ construeren we vanuit $\mathcal{P}$ een getagde partitie $\mathcal{P}_2^*$ met de volgende tagwaarden $f_{\inf}([x_{i-1}, x_i]) := \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$. Dan geldt voor de ondersom:*

$$L(\mathcal{P}, f) := S(\mathcal{P}_2^*, f) \tag{2.5}$$

Stelling 1. *Een functie f is Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als voor elke $\varepsilon > 0$ we een partitie $\mathcal{P}_\varepsilon$ kunnen vinden zodanig dat: $|U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f)| < \varepsilon$*

Het bewijs van deze stelling kan teruggevonden worden in **KS** (p. 26). Uit deze stelling volgt vrijwel meteen dat de Riemann-integraal alleen maar bestaat voor begrensde functies op begrensde intervallen. Anders zou immers nooit het verschil tussen onder- en bovensommen willekeurig klein gemaakt kunnen worden.

2.3 Hoofdstelling van de integraalrekening

Newton en Leibniz ontdekten in de 17e eeuw al dat er een direct verband bestond tussen het integreren en differentiëren van functies: integratie en differentiatie zijn elkaars inverse-operatie. Dit leidt ons tot het eerste deel van de hoofdstelling van de integraalrekening:

Stelling 2. *Zij f een differentieerbare functie met als begrensde afgeleide de Riemann-integreerbare functie f'. Dan geldt:*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{2.6}$$

2.4 Oneigenlijke integralen

Zoals aangegeven is de Riemann-integraal niet gedefinieerd voor onbegrensde intervallen of onbegrensde functies. Om toch deze integralen uit te kunnen rekenen kan men gebruik maken van limieten. Deze limieten van integralen worden ook wel oneigenlijke integralen genoemd. Er zijn drie types te onderscheiden

2.4.1 Type 1

Integralen van een functie f op een begrensd (gesloten, open, of halfopen) interval die op één of twee van de randpunten divergeert. In dit geval kan de integraal worden benaderd met een limiet wanneer de limiet bestaat. Stel $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty$, dan:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\downarrow a} \int_c^b f(x)dx \tag{2.7}$$

2.4.2 Type 2

Integralen op een begrensde functie f op een onbegrensd interval. Stel we willen de integraal van f uitrekenen op het interval $[a, \infty)$, dan:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{2.8}$$

2.4.3 Type 3

Dit type is een combinatie van de twee voorgaande: Een integraal van een functie f die onbegrensd is richting een randpunt op een onbegrensd interval. Stel we willen de integraal van f uitrekenen op het interval $[a, \infty)$, $\lim_{x\downarrow a} = \infty$ en $c \in (a, \infty)$. Dan:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\downarrow a} \int_b^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx \tag{2.9}$$

Hoofdstuk 3

Lebesgue-integraal

De Franse wiskundige H. Lebesgue (1875-1941) omschreef een nieuwe manier om de integraal van een functie over een bepaald gebied te berekenen. Omdat de focus van deze scriptie niet bij de Lebesgue-integraal ligt en de definiëring hiervan een stuk complexer is dan die van de Riemann-integraal, zal ik niet alle stellingen geheel bewijzen en zullen de gemaakte stappen wat groter zijn. Ik zal proberen het idee van de integraal intuïtief duidelijk te maken en daarbij af en toe een deel van de formaliteiten uit de weg gaan.
Vanuit een aantal eigenschappen die geëist worden, kunnen andere eigenschappen afgeleid worden. De eigenschappen van de Lebesgue-integraal die geëist werden, zijn de volgende:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$
2. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$
4. Als $f \geq 0, b > a$, dan $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
5. $\int_0^1 1 = 1$
6. Als $\lim_{k\to\infty} f_k(x) \to f(x)$ puntsgewijs , dan $\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$

Vooral de laatste eigenschap is een belangrijke eis. Op dit punt verschilt de Lebesgue-integraal immers met de Riemann-integraal. Hij blijkt echter wel alleen maar te gelden onder bepaalde voorwaarden die extra van de functierij $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ geëist moeten worden. Vanuit hier kan een belangrijke eigenschap van Lebesgue-integreerbaarheid worden gegeven.

Definitie 9. *Een stapfunctie φ is een functie die op zijn domein slechts een eindig aantal waarden $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ aanneemt. Hierbij definiëren we $E_i := \{x : f(x) = \alpha_i\}$:*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{E_i}(x) \tag{3.1}$$

Hierbij geldt: $\chi_{E_i}(x) = 1$ als $x \in E$ en $\chi_{E_i}(x) = 0$ als $x \notin \chi_{E_i}$.

Uit eigenschap 6 volgt nu dat als φ_k een reeks integreerbare stapfuncties is die puntsgewijs naar f convergeert, we ook f kunnen integreren. Een logische definitie zou zijn om voor elke α_i die wordt aangenomen, de 'grootte' van de verzameling E_i te bepalen en deze te vermenigvuldigen met α_i. Het is mogelijk dat E_i een interval is, in dat geval moest het begrip van grootte, de maat $m(E_i)$, overeenkomen met de lengte.

1. Voor alle $E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$: $m(E) = m(E + x)$.
2. Als $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ zodanig dat voor alle $i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$, dan $m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$.
3. $m([0, 1]) = 1$.

De constructie van een maat m kan gedaan worden in twee stappen. Eerst definiëren we een m^* die al aan 1 en 3 van bovengenoemde eigenschappen voldoet. Vervolgens definiëren we deze m^* op een deelverzameling van alle mogelijke deelverzamelingen van $\mathbb{R}$, namelijk die deelverzameling waarvoor ook 2 geldt.

Definitie 10. *Zij $E \subseteq \mathbb{R}$, dan is de Lebesgue buitenmaat van E, $m^*(E)$, gedefinieerd als:*

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) | E \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} I_j\} \tag{3.2}$$

De Lebesgue buitenmaat voldoet al aan de 1 en 3. Duidelijk is dat voor alle $E \subseteq \mathbb{R}$ geldt dat $m^*(E) \geq 0$. Daarnaast wordt ook voldaan aan een eigenschap die veel lijkt op 2: Als $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, zodanig dat voor alle $i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$, dan $m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$.

Stelling 3. *De buitenmaat van een aftelbare verzameling $E = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ is gelijk aan 0.*

Bewijs. Eerst laten we zien dat de buitenmaat van een enkel punt gelijk is aan 0: Voor alle $\varepsilon > 0$: $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = I_\varepsilon$, dan $\ell(I_\varepsilon) = 2\varepsilon$. Voor de buitenmaat geldt dan:

$$\begin{aligned} m^*(E) &= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_j)\} \\ &\leq \inf \ell(I_\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Hierbij nemen we het infimum over collecties intervallen $\{I_j\}_{j\in\sigma}$, zodanig dat $E \subset \cup_{j\in\sigma} I_j$, met σ een aftelbare indexverzameling. Dan geldt met behulp van de subadditiviteit: $0 \leq m^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(x_k) = 0$ □

Er wordt echter wel aan (2) voldaan als we alleen naar een deelverzameling kijken van de machtsverzameling voortgebracht door $\mathbb{R}$, de zogenoemde meetbare verzamelingen. Lebesgue en Caratheodory bewezen de volgende stelling:

Stelling 4. *$E \subseteq \mathbb{R}$ is meetbaar dan en slechts dan als voor alle $A \subseteq \mathbb{R}$ geldt:*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cup E) \tag{3.3}$$

Door deze restrictie te leggen op de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waarop m gedefinieerd is, leggen we ook een restrictie op aan de ruimte van Lebesgue-integreerbare functies. Voor een stapfunctie moet immers wel gelden dat voor elke i de maat gedefinieerd is op $E_i = \{x \in [a, b] | \varphi(x) = \alpha_i\}$.

Definitie 11. *Laat $\mathfrak{M}$ de verzameling zijn met alle meetbare verzamelingen. Dan is de Lebesgue-maat: $m = m^*|_{\mathfrak{M}}$.*

Het bovenstaande leidt tot de volgende (logische definitie) van de Lebesgue-integraal voor een stapfunctie φ op een interval $[a, b]$:

Definitie 12. *Een stapfunctie $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{E_i}(x)$, met $E_i = \{x : f(x) = \alpha_i\}$ is Lebesgue-integreerbaar dan en slechts dan als alle $E_i \in \mathfrak{M}$ en we definiëren de integraal als volgt:*

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot m(E_i) \tag{3.4}$$

Stapfuncties zijn dus 'meetbare' functies. Voor algemene functies geldt de volgende definitie van meetbaarheid:

Definitie 13. *Een functie $f : E \to \mathbb{R}$ is Lebesgue-meetbaar dan en slechts dan als $\{x \in E | f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{M}$, voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$.*

We kunnen naar meetbare functies kijken als de puntsgewijze limiet van meetbare stapfuncties.
Met behulp van 6 kunnen we echter voor niet-negatieve, meetbare functies f tot de volgende definitie komen:

Definitie 14. *Zij $f > 0$. Dan heeft f als volgt een Lebesgue-integraal over een meetbare verzameling E:*

$$\int_E f(x)dx = \sup\{\int_E \varphi(x)dx : 0 \leq \varphi \leq f, \textit{en } \varphi \textit{ is een stapfunctie.}\} \tag{3.5}$$

Omdat we in bovenstaande definitie het supremum nemen over allerlei integralen, is het nog niet mogelijk om een functie f te integreren die ook negatieve waarden aanneemt. Om dit toch te kunnen doen splitsen we f op in een positief f^+ en een negatief deel f^-:

$$f^+ = f|_{\{x \in E : f(x) \geq 0\}} \vee 0 \tag{3.6}$$
$$f^- = -f|_{\{x \in E : f(x) \leq 0\}} \vee 0 \tag{3.7}$$
$$f = f^+ - f^- \tag{3.8}$$

f^+ en f^- zijn allebei niet-negatieve functies en dus volgens definitie 14 integreerbaar dan en slechts dan als ze ook meetbaar zijn. Dit leidt tot de volgende definitie van een functie f. Merk op dat we hier gebruik maken van eigenschap 3.

Definitie 15. *Een functie f heeft een Lebesgue integraal op een verzameling E als $\int_E f^+$ of $\int_E f^-$ eindig is. De integraal is als volgt gedefinieerd:*

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \tag{3.9}$$

Als deze waarde eindig is noemen we f Lebesgue-integreerbaar is.

Zowel f^+ als f^- moeten dus Lebesgue-integreerbaar. Hieruit volgt een belangrijke eigenschap van Lebesgue-integreerbare functies.

Stelling 5. *Zij $f : E \to \mathbb{R}$ een meetbare functie. Dan is f Lebesgue-integreerbaar dan en slechts dan als $|f|$ Lebesgue-integreerbaar is.*

Hoofdstuk 4

Henstock-integraal

Omdat in deze scriptie de nadruk ligt op de Henstock-integraal, zal deze uitvoeriger behandeld worden. Op deze manier hoop ik ook de keuzen van de definities duidelijk te maken en te laten zien dat de Henstock-integraal goed gedefinieerd is.
De Henstock integraal lijkt qua constructie behoorlijk veel op de Riemann-integraal. Beide definities maken gebruik van Riemann-sommen. De Riemann-integraal houdt echter geen rekening met het lokale gedrag van een functie. Dit is iets wat de Henstock-integraal wel doet. Hierdoor wordt een kleiner deel van de mogelijke partities bekeken. Daarnaast kan er hierdoor een algemenere vorm van de hoofdstelling van de integraalrekening bewezen worden en kunnen ook sommige onbegrensde functies geïntegreerd worden over onbegrensde intervallen.

4.1 Hoofdstelling van de integraalrekening

Ik zal me eerst richten op het bewijzen van een algemenere versie van de hoofdstelling van de integraalrekening. Hieruit zal blijken dat we met behulp van de Henstock-integraal functies kunnen integreren die niet Lebesgue-integreerbaar zijn.
Voor de Riemann-integraal weten we dat voor een differentieerbare functie f met een begrensde afgeleide f' het volgende geldt:

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a) \tag{4.1}$$

Wellicht is het mogelijk een integraal te ontwikkelen waarin dit al geldt voor differentieerbare functies (waarbij de afgeleide dus niet noodzakelijkerwijs begrensd is), of nog sterker: voor functies die bijna overal (op aftelbaar veel punten na) differentieerbaar zijn.

4.1.1 Invoeren van een ijk

Bij de Riemann-integraal gingen we (gegeven $\varepsilon > 0$) op zoek naar een δ, zodanig dat voor partities met $\mu(\mathcal{P}) < \delta$ de Riemann-som een goede benadering was voor de oppervlakte begrensd door een functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ (waarbij a en b de randpunten zijn van het interval waarover geïntegreerd wordt). Dit impliceert dat er geen rekening wordt gehouden met het lokale gedrag van de functie. De Henstock-integraal maakt hier wel gebruik van.

Voor het benaderen van de oppervlakte kunnen we een parallel trekken naar het benaderen van de afgeleide van een functie: voor een differentieerbare functie f weten we het volgende. Voor elke x en alle $\varepsilon > 0$ is er een $\delta_\varepsilon(x) > 0$ zodanig dat wanneer $0 < |x - y| \leq \delta_\varepsilon(x)$:

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| < \varepsilon(y - x) \tag{4.2}$$

Dit kunnen we zelfs nog iets versterken. Het is mogelijk de afgeleide in x benaderen door twee punten u, v dicht genoeg om x heen te kiezen om vervolgens de steilheid van van het lijnstuk tussen u en v te nemen als benadering van de afgeleide. Hieruit volgt het insluitingslemma:

Lemma 1. *Zij f een differentieerbare funtie met als afgeleide f'. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies x vast en $\delta_\varepsilon(x)$ zodanig dat voor $|x - y| < \delta$ (4.2) geldt. Kies nu u, v zodanig dat: $x - \delta_\varepsilon(x) < u < x < v < x + \delta_\varepsilon(x)$, dan geldt:*

$$|\frac{f(v) - f(u)}{v - u} - f'(x)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
|f(v) - f(u) - f'(x)(v - u)| &= |f(v) - f(x) - f'(x)(v - x) + f(x) - f(u) - f'(x)(x - u)| && (4.4)\\
&\leq |f(v) - f(x) - f'(x)(v - x)| + |f(x) - f(u) - f'(x)(x - u)| && (4.5)\\
&< \varepsilon(v - x) + \varepsilon(x - u) && (4.6)\\
&= \varepsilon|v - u| && (4.7)
\end{aligned}$$

□

Bij het benaderen van de afgeleide in een bepaald punt is het dus van belang om rekening te houden met het gedrag van een functie rondom het punt. Het lijkt dus realistisch om ook zoiets te doen bij het bepalen van goede getagde intervallen van een partitie bij het integreren. Bij een Riemann-integraal moet het verschil tussen de Riemann-som $S(\mathcal{P}, f')$ en de waarde van de integraal willekeurig klein zijn (voor bepaalde partities $\mathcal{P}$):

$$\begin{aligned}
|S(\mathcal{P}, f') - \{f(b) - f(a)\}| &< \varepsilon(b - a)\\
|\sum_{i=1}^{n} f'(q_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))| &< \varepsilon(b - a)\\
|\sum_{i=1}^{n}\{(f(x_i) - f(x_{i-1})) - f'(q_i)(x_i - x_{i-1})\}| &< \varepsilon(b - a)
\end{aligned}$$

In de bovenstaande ongelijkheid zien we termen die erg veel lijken op de vergelijking voor het benaderen van de afgeleide (4.2). Wanneer het mogelijk is de getagde partitie zo te kiezen dat (4.2) geldt, wordt ook aan bovenstaande ongelijkheid voldaan:

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{n}\{(f(x_i) - f(x_{i-1})) - f'(q_i)(x_i - x_{i-1})\}| &\leq \sum_{i=1}^{n}|\{(f(x_i) - f(x_{i-1})) - f'(q_i)(x_i - x_{i-1})\}|\\
&< \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(x_i - x_{i+1})\\
&= \varepsilon(b - a)
\end{aligned}$$

Dus:

$$|S(\mathcal{P}, f') - \{f(b) - f(a)\}| < \varepsilon(b-a) \tag{4.8}$$

Om dit proces verder te formaliseren voeren we een nieuw begrip in: de ijk.

Definitie 16. *Een ijk γ is een functie die aan elk punt een open interval toekent: $\gamma(x) = (x - \delta(x), x + \delta(x))$*

Definitie 17. *Een getagd interval (q, I) voegt zich naar een ijk γ als $I \subset \gamma(q)$.*

Definitie 18. *Een getagde partitie $\mathcal{P}$ voegt zich naar een ijk γ als $I_i \subset \gamma(q_i)$ voor elke $i = 1, ..., n$.*

De volgende stelling geldt:

Stelling 6. *Voor elke ijk γ bestaat er een getagde partitie $\mathcal{P}$ die zich naar γ voegt.*

Bewijs. Definieer de verzameling $E := \{x \in (a, b] | [a, x]$ heeft een partitie die zich naar γ voegt$\}$. We moeten nu bewijzen dat $b \in E$. Dit gaat in drie stappen:

1. $E \neq \emptyset$. De ijk γ is gedefinieerd op a. Kies $x \in \gamma(a) \cap (a, b]$. Dan $x \in E$, immers de partitie die bestaat uit het interval $[a, x]$ met als tag a voegt zich naar γ.

2. $y = \sup E \in E$. Kies $x \in E \cap \gamma(y)$ met bijbehorende gevoegde partitie $\mathcal{P}$ van $[a, x]$. Zo'n x bestaat omdat y het supremum van E is en y per definitie in het interval $(a, b]$ ligt en dus ook $\gamma(y)$ bestaat. De partitie $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup (y, [x, y])$ voegt zich naar γ.

3. $y = b$. Stel dat $y < b$. Neem de partitie $\mathcal{P}$ van $[a, y]$ die zich naar γ voegt. Omdat $y < b$, kunnen we een w kiezen zodanig dat $w \in \gamma(y) \cup (y, b]$. Dan voegt de partitie $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup (y, [y, w])$ zich naar γ en hebben we tegenspraak, aangezien y het supremum van E is.

Dus $b = y = \sup E \in E$ □

Nu is het mogelijk om de definitie te geven van de Henstock-integraal:

Definitie 19. *Een functie f is Henstock-integreerbaar op $[a, b]$ met waarde A dan en slechts dan als voor elke $\varepsilon > 0$ er een ijk γ bestaat, zodanig dat voor elke getagde partitie $\mathcal{P}$ die zich naar γ voegt:*

$$|S(\mathcal{P}, f) - A| < \varepsilon$$

Het is niet meteen duidelijk of deze integraal goed gedefinieerd is: is het wellicht mogelijk dat voor twee verschillende ijken γ_1, γ_2 er twee oplossingen van de integraal zijn? Het antwoord op deze vraag is nee.

Stelling 7. *De Henstock-integraal is goed gedefinieerd.*

Bewijs. Stel f is een Henstock-integreerbare functie met als waarden zowel A als B. Het verschil tussen A en B blijkt willekeurig klein te zijn en dus moet gelden: $A = B$. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Dan bestaan er ijken γ_1 en γ_2 zodanig dat voor elke partitie $\mathcal{P}_i$ die zich naar γ_i $(i = 1, 2)$ voegt het volgende geldt:

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{P}_1, f) - A| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |S(\mathcal{P}_2, f) - B| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

We definiëren de nieuwe ijk $\gamma(x) = \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x)$. Elke partitie die zich naar γ voegt, voegt zich ook naar γ_i. Zij $\mathcal{P}$ een partitie die zich naar γ voegt. Dan:

$$
\begin{aligned}
|A - B| &= |A - S(\mathcal{P}, f) + S(\mathcal{P}, f) - B| \\
&\leq |A - S(\mathcal{P}, f)| + |S(\mathcal{P}, f) - B| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

Vanuit de definities van de Henstock- en Riemann-integraal is duidelijk dat elke Riemann-integreerbare functie ook Henstock-integreerbaar is en dat de waarden overeenkomen.

Stelling 8. *Een Riemann-integreerbare functie is ook Henstock-integreerbaar en de waarden van de integralen komen overeen.*

Bewijs. Zij een Riemann-integreerbare functie f met als waarde van de integraal A en $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies δ zodanig dat voor alle partities met $\mu(\mathcal{P}) < \delta$ geldt: $|S(\mathcal{P}, f) - A| < \varepsilon$. Deze δ bestaat vanwege de Riemann-integreerbaarheid van f.
Definieer de ijk γ als volgt: $\gamma(x) = (x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2})$. Nu geldt voor elke partitie $\mathcal{P}'$ die zich voegt naar γ dat $\mu(\mathcal{P}') < \delta$ en dus $|S(\mathcal{P}', f) - A| < \varepsilon$. □

4.1.2 Uitbreiding 1

Nu is het ook mogelijk om de een algemenere vorm van de hoofdstelling van de integraalrekening te bewijzen, zoals aangegeven in het begin van het hoofdstuk.

Stelling 9. *Laat f een differentieerbare functie zijn met als afgeleide f', dan is f' Henstock-integreerbaar en:*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a) \tag{4.9}$$

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Construeer een ijk γ volgens 4.4. Nu geldt voor elke partitie die zich voegt naar γ volgens ongelijkheid 4.8, met $\epsilon = \frac{\varepsilon}{b-a}$.

$$|S(\mathcal{P}, f') - \{f(b) - f(a)\}| < \epsilon(b - a) = \varepsilon \tag{4.10}$$

□

4.1.3 Voorbeeld

Door deze stelling wordt het mogelijk om sommige functies te integreren die niet Lebesgue- of Riemann-integreerbaar zijn. Een voorbeeld hiervan is de volgende functie:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{x^2}) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Deze functie is differentieerbaar en heeft de volgende afgeleide:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{\pi}{x^2}) + \frac{2\pi}{x} \sin(\frac{\pi}{x^2}) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

De integraal die we willen onderzoeken is de volgende:

$$\int_0^1 f'(x)dx \tag{4.13}$$

Henstock. *De functie f' is Henstock-integreerbaar aangezien f differentieerbaar is (zie stelling 9):*

$$\int_0^1 f' = f(1) - f(0) = -1 - 0 = -1$$

Lebesgue. *f' is niet Lebesgue-integreerbaar.*

Bewijs. Stel $0 < a < b < 1$, dan geldt vanwege de Riemann-integreerbaarheid ook Lebesgue-integreerbaarheid en dus:

$$\int_a^b f' = b^2 \cos(\frac{\pi}{b^2}) - a^2 \cos(\frac{\pi}{a^2})$$

Wanneer $a_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}, b_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$, dan vormen $[a_k, b_k]$ disjuncte deelintervallen van $[0, 1]$. Tevens geldt dat $\int_{a_k}^{b_k} f' = -\frac{1}{2k}$ en kunnen we de volgende afschattingen maken:

$$\int_0^1 |f'| \geq |\sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f'| = \sum_{k=1}^{\infty} | - \frac{1}{2k}| = \infty \tag{4.14}$$

f' is niet absoluut integreerbaar en dus niet Lebesgue-integreerbaar. □

Riemann. *f' is niet Riemann-integreerbaar.*

Bewijs. De functie is onbegrensd. Voor elke willekeurige partitie $\mathcal{P}$ geldt dus: $U(\mathcal{P}, f') = \infty$. Toepassen van stelling 1 laat zien dat f' niet integreerbaar is. □

Oneigenlijk Riemann. *f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar (2.4.1).*

Bewijs. Kies $a \in (0, 1)$. Dan is $f'|_{(a,1]}$ begrensd en geldt de hoofdstelling van de integraalrekening (4.1): $\int_a^1 f'dx = f(1) - f(a)$. Wanneer we nu de limiet van a naar 0 nemen, krijgen we:

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 f'(x)dx = f(1) - \lim_{a \downarrow 0} f(a) = -1 - 0 = -1$$

□

4.1.4 Uitbreiding 2

Het is mogelijk om de fundamentele stelling van de calculus zelfs nog verder uit te breiden.

Stelling 10. *Zij F een continue functie, waarvoor geldt dat $F' = f$ op slechts aftelbaar veel punten c_k na, dan is f Henstock-integreerbaar met als waarde van de integraal:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \tag{4.15}$$

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. We moeten een ijk γ zien te vinden zodanig dat:

$$|S(\mathcal{P}, f) - \{F(b) - F(a)\}| < \varepsilon \tag{4.16}$$

Kies $\epsilon = \frac{\varepsilon}{1+b-a}$. Definieer de ijk γ voor alle x waarvoor geldt $F' = f$ volgens (4.4). Voor de $x = c_k$ definiëren we $\gamma(x)$ zodanig dat voor alle $y \in \gamma(x) = \gamma(c_k)$ voor een zekere k voldaan wordt aan de volgende voorwaarden.

- $|F(y) - F(c_k)| < 2^{-k-3}\epsilon$
- $|f(c_k)||y - c_k| < 2^{-k-3}\epsilon$

Deze ijk kunnen we zo kiezen vanwege de continuïteit van F.
Voor de intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ waarvan de tag $q_i \neq c_k$ geldt:

$$\begin{aligned}
|\sum_{i,q_i\neq c_k}[f(q_i)(x_i - x_{i-1}) - \{F(x_i) - F(x_{i-1})\}]| &\leq \sum_{i,q_i\neq c_k}|f(q_i)(x_i - x_{i-1}) - \{F(x_i) - F(x_{i-1})\}| \\
&< \sum_{i,q_i\neq c_k}(x_i - x_{i-1})\epsilon \\
&\leq \epsilon(b - a)
\end{aligned}$$

Als een tag $q_i = c_k$, dan kunnen de volgende afschattingen gemaakt worden:

$$\begin{aligned}
|f(c_k)(x_i - x_{i-1})| &= |f(c_k)(x_i - c_k) + f(c_k)(c_k - x_{i-1})| \\
&\leq |f(c_k)(x_i - c_k)| + |f(c_k)(c_k - x_{i-1})| \\
&< 2^{-k-3}\epsilon + 2^{-k-3}\epsilon \\
&= 2^{-k-2}\epsilon \\
|F(x_i) - F(x_{i+1})| &= |F(x_i) - F(c_k) + F(c_k) - F(x_{i+1})| \\
&\leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i+1})| \\
&< 2^{-k-3}\epsilon + 2^{-k-3}\epsilon \\
&= 2^{-k-2}\epsilon \\
|f(c_k)(x_i - x_{i-1}) - \{F(x_i) - F(x_{i+1})\}| &\leq |f(c_k)(x_i - x_{i-1})| + |F(x_i) - F(x_{i+1})| \\
&< 2^{-k-2}\epsilon + 2^{-k-2}\epsilon \\
&= 2^{-k-1}\epsilon
\end{aligned}$$

Elke c_k kan een tag zijn voor twee intervallen van de partitie (aangezien de intervallen gesloten zijn). Dus:

$$\sum_{i,q_i=c_k}|f(c_k)(x_i - x_{i-1} - \{F(x_i) - F(x_{i+1})\}| < 2\epsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}} = \epsilon$$

Voor de volledige partitie kunnen we dus de volgende afschatting maken:

$$|\sum_i[f(q_i)(x_i - x_{i-1}) - \{F(x_i) - F(x_{i-1})\}]| < \epsilon(b - a) + \epsilon = \epsilon(b - a + 1) = \varepsilon$$

□

4.1.5 Voorbeeld

Het was al mogelijk om de Riemann-integraal van begrensde functies die op aftelbaar veel punten na differentieerbaar zijn te bepalen. Met deze uitbreiding wordt het echter mogelijk om ook sommige onbegrensde functies te integreren, zonder gebruik te maken van een limietproces. Beschouw de volgende functies:

$$F(x) = 2\sqrt{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

We zijn benieuwd naar de volgende integraal:

$$\int_0^1 f \tag{4.17}$$

Voor deze functies geldt $F' = f$ op alle punten, behalve $x = 0$.

Riemann. *f is niet Riemann-integreerbaar.*

Bewijs. Omdat f onbegrensd is, zal voor elke willekeurige partitie $\mathcal{P}$ en ϵ gelden dat $|U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f)| > \epsilon$ □

Oneigenlijk Riemann. *f is wel oneigenlijk Riemann-integreerbaar.*

Bewijs. Het is mogelijk om de limiet te nemen van de integraal op onderstaande manier. Wanneer we dit doen is de functie immers begrensd en continu op $(a, 1)$.

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_0^1 f(x)dx = F(1) - \lim_{a \downarrow 0} F(a) = 2 - 0 = 2$$

□

Henstock. *f is Henstock-integreerbaar.*

Bewijs. Alleen voor $x = 0$ geldt niet dat $F' = f$. Dus met behulp van stelling 10 kunnen we zeggen:

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 2$$

□

4.2 Niet-continue functies

In het voorafgaande stuk wordt beschreven hoe met behulp van de hoofdstelling van de integraalrekening allerlei integralen kunnen worden uitgerekend. Er is echter een veel grotere klasse van functies: functies die niet de afgeleide zijn van een andere functie. Waar de Riemann-integraal alleen gedefinieerd is voor functies die op aftelbaar veel punten na continu zijn, is de Henstock-integraal veel breder gedefinieerd. Een voorbeeld hiervan is de Dirichlet-functie.

4.2.1 Voorbeeld

De Dirichlet-functie is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{als } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{4.18}$$

We zijn benieuwd naar de integraal over het interval $I = [0, 1]$.

Riemann. *f is niet Riemann-integreerbaar.*

Bewijs. Zij een willekeurige partitie $\mathcal{P}_I$ gegeven en kies $\epsilon = \frac{1}{2}$. In elk subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ geldt:

$$\begin{aligned} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) &= 1 \\ \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Dit betekent dat de bovensom gelijk zal zijn aan 1 en de ondersom aan 0:

$$|U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$$

□

Lebesgue. *f is Lebesgue-integreerbaar.*

Bewijs. $f(x)$ is een stapfunctie. De definitie van de Lebesgue-integraal leidt ons meteen naar het antwoord (hierbij maken we gebruik van het feit dat $m(\mathbb{Q}) = 0$, $\mathbb{Q}$ is immers aftelbaar):

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \cdot m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + 0 \cdot m((\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0, 1]) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \tag{4.19}$$

□

Henstock. *f is Henstock-integreerbaar.*

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. We willen aantonen dat $\int_0^1 f(x)dx = 0$. In dit geval is het duidelijk dat de hoofdstelling van de integraalrekening niet gebruikt kan worden. Via de definitie van de Henstock-integraal zal dus bewezen moeten worden dat de integraal gelijk is aan 0. Omdat de functie bijna overal gelijk is aan 0, definiëren we een ijk die aan irrationale getallen grotere intervallen toekent. Omdat de rationale getallen aftelbaar zijn, kunnen we een aftelling $\{r_i\}_{k=1}^{\infty}$ kiezen van $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. We definiëren $\gamma(x) = (x - \delta(x), x + \delta(x))$, met:

$$\delta(x) = \begin{cases} \varepsilon/4 & \text{als } x \notin \mathbb{Q} \\ 2^{-i} \cdot \varepsilon/4 & \text{als } x = r_i \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Kies nu een getagde partitie $\mathcal{P}$ die zich naar γ voegt. Voor de Riemann-som $S(\mathcal{P}, f)$ geldt:

$$|S(\mathcal{P}, f) - 0| = |\sum_{i=1}^{n} f(q_i) \cdot (x_i - x_{i-1})|$$

We kunnen de tags q_i in twee groepen splitsen, de q_i die rationaal zijn en q_i die irrationaal zijn. Voor de eerste groep geldt voor elke q_i dat er een k is zodanig dat: $q_i = r_k$. Omdat $\mathcal{P}$ zich voegt naar γ, gelden de volgende afschattingen voor het interval (x_{i-1}, x_i) met rationale tag:

$$|x_i - x_{i-1}| < 2 \cdot 2^{-i} \cdot q_i \cdot \frac{\varepsilon}{4} = 2^{-i-1} \cdot \varepsilon$$

Een getal r_k kan een tag zijn voor hoogstens twee subintervallen van een partitie. Dit leidt tot de volgende afschattingen van de Riemann-som:

$$\begin{aligned}
|S(\mathcal{P}, f)| &= |\sum_{q_i \in \mathbb{Q}} f(q_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) + \sum_{q_i \notin \mathbb{Q}} f(q_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)| \\
&= |\sum_{q_i \in \mathbb{Q}} f(q_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) + 0| \\
&< |\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-k-1} \cdot \varepsilon| = \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

4.3 Onbegrensde intervallen

Met behulp van de hierboven gebruikte constructie van de Henstock-integraal is het nog niet mogelijk om te integreren over onbegrensde intervallen. Hierdoor is het bijvoorbeeld nog niet mogelijk om de functie $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ te integreren over $\mathbb{R}$.
Op een aantal plekken in de definitie van de Henstock-integraal wordt gebruik gemaakt van de begrensdheid van het interval I:

1. Partities zijn enkel gedefinieerd voor eindige intervallen.

2. Bij Riemann-sommen wordt het product genomen van de lengte van een interval met de functiewaarde van de tag. Wanneer deze functiewaarde ongelijk is aan 0 is de Riemann-som onbegrensd.

3. De ijk laat enkel begrensde intervallen toe. Dit moet veranderen om toch een partitie te construeren die uit eindig veel elementen bestaat.

4.3.1 Partitie

Allereerst definiëren we $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. We beschouwen vanaf nu de functie $\overline{f} : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{if } x = \pm\infty \end{cases} \tag{4.20}$$

Hierdoor wordt het mogelijk om een partitie te construeren waarbij het eerste en laatste interval oneindige lengte hebben:

$$-\infty = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = \infty$$

4.3.2 Riemann-sommen

Wanneer we voor de randintervallen van de partitie de keuze voor de tags vastleggen, namelijk $q_1 = -\infty$ en $q_n = \infty$ wordt gegarandeerd dat de Riemann-som begrensd blijft. We maken hierbij gebruik van de conventionele rekenregel voor $\overline{\mathbb{R}}$: $\infty \cdot 0 = 0$.

4.3.3 IJk

Volgens definitie 16 geldt $\gamma(x) = (x-\delta(x), x+\delta(x))$. Er wordt een symmetrisch open interval geconstrueerd rondom x. Deze symmetrie is niet mogelijk wanneer we de ijk willen definiëren voor $x = \pm\infty$. Daarom herzien we definitie 16 als volgt:

Definitie 20. *Een ijk $\overline{\gamma}$ is een functie die aan elk punt $x \in \overline{\mathbb{R}}$ een open interval toekent op de volgende manier ($\delta : \mathbb{R} \to (0, \infty); a, b \in (0, \infty)$):*

$$\overline{\gamma}(x) = \begin{cases} (x - \delta(x), x + \delta(x)) & \textit{if } x \in \mathbb{R} \\ [-\infty, a) & \textit{if } x = -\infty \\ (b, \infty] & \textit{if } x = \infty \end{cases} \tag{4.21}$$

Met behulp van deze definitie is het mogelijk om een partitie te maken van $\overline{\mathbb{R}}$ die zich voegt naar γ, waarbij de tags op de rand gelijk aan $\pm\infty$ zijn.
Nu zijn de definities voor de Henstock-integraal zo gemodificeerd dat ook geïntegreerd kan worden over onbegrensde intervallen. Ook hier kan men bewijzen dat voor elke ijk er een partitie bestaat die zich hiernaar voegt; dat de integraal uniek gedefinieerd is; etc. De bewijzen gaan op dezelfde manier als in het geval van begrensde intervallen.

Hoofdstuk 5

Henstock-integraal op $\mathbb{R}^n$

Vanuit de Henstock integraal op $\mathbb{R}$ is het niet heel ingewikkeld om deze uit te breiden naar $\mathbb{R}^n$. Het principe van de integraal blijft gelijk. Eerst wordt een partitie gedefinieerd: waar deze eerst bestond uit subintervallen, zal deze nu bestaan uit rechthoeken in $\mathbb{R}^2$, balken in $\mathbb{R}^3$ en hogerdimensionale balken in $\mathbb{R}^n$.

Definitie 21. *Een interval $I \in \mathbb{R}^n$ is het Cartesisch product $I = \prod_{j=1}^n I_j$, waarbij elke I_j een interval van $\mathbb{R}$ is. Het volume van een interval is $v(I) = \prod_{j=1}^n \ell(I_j)$*

Definitie 22. *Een partitie $\mathcal{P}$ van een gesloten interval $I \in \mathbb{R}^n$ is een eindige verzameling van subintervallen: $\{J_j\}_{j=1}^k$ met $\cup_{j=1}^k J_j = I$ en $J_i \cap J_j = \emptyset, i \neq j$. Een getagde partitie $\mathcal{P}$ is een partitie samen met een verzameling punten $\{q_j\}_{j=1}^k$ met $q_j \in J_j$.*

Definitie 23. *Een ijk γ op een interval $I \subseteq \mathbb{R}^n$ is een functie die aan elk punt $x \in I$ een open interval J_x toekent (waarbij $x \in J_x$). Een getagde partitie $\mathcal{P}$ voegt zich naar γ wanneer voor alle tags q_j geldt: $J_j \subseteq J_{q_j}$.*

Net als voor het geval in $\mathbb{R}$, is het ook nu mogelijk om te bewijzen dat er voor elke ijk γ een partitie $\mathcal{P}$ bestaat die zich γ voegt. Nu zijn alle begrippen geformuleerd die nodig zijn om de Henstock-integraal op $\mathbb{R}^n$ te definiëren.

Definitie 24. *Een functie f is Henstock-integreerbaar dan en slechts dan als er een $A \in \mathbb{R}$ is, zodanig dat voor alle $\epsilon > 0$ er een ijk γ is, zodanig dat voor elke partitie $\mathcal{P}$ die zich naar γ voegt geldt:*

$$|S(\mathcal{P}, f) - A| < \epsilon$$

Het bewijzen van eenduidigheid gaat op dezelfde manier als in het eendimensionale geval (stelling 7).

Hoofdstuk 6

Henstock-integraal op $\mathbb{R}^B$

In de voorgaande hoofdstukken wordt de Henstock-integraal beschouwd op de eindig-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$. In dit hoofdstuk zal echter de integraal worden gedefinieerd op een oneindig-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^B$. Een punt $x \in \mathbb{R}^B$ stelt een functie voor als volgt:

$$x : B \to \mathbb{R} \tag{6.1}$$

Als het ware zouden we elke $a \in B$ als een aparte dimensie kunnen zien. Wanneer B een interval is van de vorm $B = (\tau', \tau)$ kunnen we moeten we ons realiseren dat de punten (of functies) $x(t)$ erg wild kunnen zijn. Er wordt geen enkele eis aan bijvoorbeeld continuïteit of differentieerbaarheid gesteld. Door deze definitie van de Henstock integraal willen we in het volgende hoofdstuk controleren of Feynmann-pad integralen goed gedefinieerd zijn.

6.1 Definitie integraal

De Henstock-integraal op eindig-dimensionale ruimten is gedefinieerd met behulp van Riemann-sommen: men neme een partitie die zich naar een ijk voegt en vermenigvuldigt het volume van elk interval met de functiewaarde van de tag. In het geval van een oneindig-dimensionale ruimte hoeft het geen probleem te zijn om de functiewaarde te bepalen. Echter ligt in een oneindig dimensionale ruimte een logische definitie van een interval met een bijbehorend volumebegrip niet direct voor de hand. Dit komt onder meer doordat een product met oneindig veel elementen vaak niet convergeert. Toch zijn deze wel noodzakelijk om een ijk te creëren en een partitie $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^B}$ waar voor elk getagd deelinterval geldt $(q_i, I_i) \subset \gamma(q_i)$.

6.1.1 Cylindrische intervallen

Om intervallen op $\mathbb{R}^B$ (waarbij B een willekeurige verzameling is en we elk punt $x \in \mathbb{R}^B$ kunnen zien als functie $x : B \to \mathbb{R}$) te construeren, beperken we ons tot slechts een aantal vezels waar we beperkingen op leggen. Voor de overige vezels nemen we 'de gehele vezel'.

Definitie 25. *Zij $N := \{a_i : a_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ met voor elke $a_i \in N$ een geassocieerd interval $I_{a_i} = [\alpha_i, \beta_i] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dan is het cylindrisch interval als volgt gedefinieerd:*

$$I = \{x : x(a_i) \in I_{a_i}, 1 \leq i \leq n\} \tag{6.2}$$

Hierbij stelt $x(a_i)$ de coördinaat voor in 'vezel a_i'. Een cylindrisch interval representeren we als volgt:

$$I = (a_1, ..., a_n; \alpha_1, ..., \alpha_n; \beta_1, ..., \beta_n) \tag{6.3}$$

Voorbeeld

We vereenvoudigen bovenstaande situatie even tot het platte vlak: $\mathbb{R}^2$. Dan $B = \{1, 2\}$. We nemen als dimensieverzameling $N = 1$, de x-as, met als bijbehorend interval $I_1 = [0, 1]$. Dan is het bijbehorend cylindrisch interval als volgt gedefinieerd:

$$I = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1\} \tag{6.4}$$

Dit is een verticale strook.

6.1.2 Volume

In eindig-dimensionale ruimten is het redelijk eenvoudig om het volume van een interval te bepalen (zie definitie 21). In oneindig veel dimensies ligt dit een stuk minder voor de hand.

Definitie 26. *Gegeven een cylindrisch interval $I = (a_1, ..., a_n; \alpha_1, ..., \alpha_n; \beta_1, ..., \beta_n)$, met voor elke a_i een volumefunctie $|I|_{a_i} := V_{a_i}(\alpha_i, \beta_i)$ wordt het volume van I gedefinieerd door:*

$$|I| = \prod_{i=1}^{n} |I_{a_i}| \tag{6.5}$$

Eigenschappen V_{a_i}

Om voorgaande tot een logische definitie te doen leiden, zijn de volgende eigenschappen van V noodzakelijk.

1. $V_{a_i}(\alpha_i, \beta_i)$, met hierbij $\alpha_i < \beta_i$ is een stijgende functie in β_i wanneer α_i vast gekozen wordt.

2. $V_{a_i}(\alpha_i, \beta_i)$, met hierbij $\alpha_i < \beta_i$ is een dalende functie in α_i wanneer β_i vast gekozen wordt.

3. $V_{a_i}(\alpha_i, \alpha_i) = 0$

4. Stel $\gamma_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, dan $V_{a_i}(\alpha_i, \beta_i) = V_{a_i}(\alpha_i, \gamma_i) + V_{a_i}(\gamma_i, \beta_i)$.

5. $V(-\infty, \infty) = 1$.

6.1.3 IJk

Bij de Henstock-integraal op $\mathbb{R}^n$ een ijk γ gedefinieerd en op elke dimensie i moet gelden dat een interval uit de partitie zich voegt naar γ. Ofwel: het interval uit de partitie is een strikt deelinterval van het interval dat wordt toegevoegd door γ.

Deelintervallen

Om dit ook te kunnen doen op $\mathbb{R}^B$ moet er eerst bekeken worden wanneer het ene cylindrisch interval $J = (b_1, ..., b_m; \zeta_1, ..., \zeta_m; \xi_1, ..., \xi_m)$ een strikt deelinterval is van een ander interval $I = (a_1, ..., a_n; \alpha_1, ..., \alpha_n; \beta_1, ..., \beta_n)$. Er zijn hiervoor drie verschillende mogelijkheden:

1. $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \{b_i\}_{i=1}^m$ en voor $c \in \{a_i\}_{i=1}^n \cap \{b_i\}_{i=1}^m$ geldt: $J_{t_i} = I_{t_i}$. In dit geval leggen we aan een $x(t) \in J$ meer beperkingen op dan aan een $y(t) \in I$. Voorbeeld hiervan in $\mathbb{R}^2$ is: $I = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1\}, J = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$.

2. $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \{b_i\}_{i=1}^m$, maar voor alle i geldt: $[\zeta_i, \xi_i] \subset [\alpha_i, \beta_i]$. We leggen evenveel beperkingen op, echter zijn de beperkingen voor $x(t) \in J$ strenger. Voorbeeld: $I = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}, J = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq \frac{1}{2}\}$.

3. $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \{b_i\}_{i=1}^m$, en voor $c \in \{a_i\}_{i=1}^n \cap \{b_i\}_{i=1}^m$ geldt: $[\zeta_i, \xi_i] \subset [\alpha_i, \beta_i]$. Voorbeeld: $I = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1\}, J = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq \frac{1}{2}\}$.

Bij het definiëren van een ijk hebben we dus twee keuzen die gemaakt moeten worden voor elk punt $x(t)$: Een 'vezelverzameling' $M := \{a_i \in B : 1 \leq i \leq m\}$ en een functie $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Deze functie δ voegt aan elke vezel $t_i \in M$ een interval I_{t_i} toe met $x(t_i) \in I_{t_i}$, zodanig dat $|I_{t_i}| = \delta(x)$. Merk op dat voor $\mathbb{R}$ een soortgelijke definitie hadden van de ijk: er wordt een (in dit geval symmetrisch) interval toegevoegd aan elke $x \in \mathbb{R}$, alleen geldt hiervoor dat $|\gamma(x)| = 2\delta(x)$.
We willen ervoor zorgen dat uiteindelijk een *eindige* (getagde) partitie gemaakt kan worden van $\mathbb{R}^B$ die zich voegt naar γ. Dit blijkt met bovenstaande gedefinieerde γ echter nog niet mogelijk. Om dit toch mogelijk te maken moeten we de vezelverzameling M niet kiezen uit een overaftelbare verzameling (wat een mogelijkheid is voor B maar uit een aftelbare verzameling $A \subset B$ (zoals hierboven beschreven).
Dit leidt ons tot de volgende definitie van een ijk γ.

Definitie 27. *Zij $A \subset B$, zodanig dat A aftelbaar is. Dan is $\gamma(x) = (M(x), \delta(x))$ een functie die aan elk punt x een cylindrisch interval I toekent, waarbij $M \subset A$ een eindige verzameling vezels $\{a_1, ...a_m\}$ is en voor elke $a_i \in M$ geldt dat $|I_{a_i}| = \delta$ en $x(a_i) \in I_{a_i}$.*

Definitie 28. *Een getagd interval (x, J) voegt zich naar γ als $J \subset \gamma(x)$.*

Definitie 29. *Een partitie $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^B} := \{(x_i, J_i)\}_{i=1}^n$ voegt zich naar γ als geldt dat voor elke $1 \leq i \leq n$ geldt $J_i \subset \gamma(x_i)$.*

Definitie 30. *Een functie $f(x) : R^B \to \mathbb{R}$ is Henstock-integreerbaar met waarde L als er voor elke $\epsilon > 0$ een ijk γ bestaat zodanig dat voor elke partitie $\mathcal{P} = \{(x_i, J_i)\}_{i=1}^n$ die zich naar γ voegt, geldt:*

$$|\sum_{i=1}^n f(x_i)|J_i| - L| < \epsilon \tag{6.6}$$

6.2 Feynman-integraal

In de klassieke mechanica worden deeltjes bestudeerd die zich van ξ' naar ξ verplaatsen gedurende een tijdsinterval. In de klassieke mechanica beweegt een deeltje zich van ξ' naar ξ door een pad te volgen waarvan de 'actie' minimaal is. In de kwantummechanica wil men de kans berekenen dat een deeltje, uitgaande vanuit ξ', in het punt ξ terechtkomt. De beschrijving daarvan verloopt met de 'overgangsamplitude', $T_{\xi' \to \xi} \in \mathbb{C}$, waaruit een kans volgt, gegeven door:

$$0 \leq |T_{\xi \to \xi'}|^2 \leq 1 \tag{6.7}$$

Dit is de manier waarop de fundamentele oplossing van de Schrödinger-vergelijking kan worden geïnterpreteerd.
Feynman pakte het op een andere manier aan. Hij specificeerde een overgangsamplitude $e^{iS[x(t)]}$ voor ieder mogelijk pad $x(t)$ met $x(\tau') = \xi'$ en $x(\tau) = \xi$ met behulp van een 'actiewaarde', een functionaal: $x(\cdot) \mapsto S[x(\cdot)]$. De overgangsamplitude wordt dan, volgens Feynman:

$$T_{\xi' \to \xi} = \int_{\text{alle paden } x(\cdot)} e^{iS[x(\cdot)]} d\mu \tag{6.8}$$

Dit is een integraal over de oneindigdimensionale ruimte $\mathbb{R}^{(\tau',\tau)}$. Doordat de integrand sterk oscillatorisch is, ligt het voor de hand om definitie van de Henstock-integraal hierbij te gebruiken.
De integralen die hij uit wilde rekenen zagen er als volgt uit: Zij $\epsilon = (\tau' - \tau)/n, x_0 = \xi', x_n = \xi, x_j = x(\tau + j\epsilon)$ voor $j = 1, ..., n-1$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{u_1}^{v_1} \cdots \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \exp \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{i\epsilon}{h} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right\} \right] \tag{6.9}$$

Feynman beweerde dat deze integraal een goede propagator was voor de overgangsamplitude op het moment dat het inderdaad mogelijk is om een limiet voor n naar oneindig te nemen. In **M** wordt het bewijs gegeven dat deze limiet inderdaad mag worden genomen.

Hoofdstuk 7

Conclusie

7.1 Project

We hebben gezien dat er functies zijn die wel Henstock-integreerbaar zijn (4.1.3), maar niet Lebesgue integreerbaar, hieronder vallen onder meer oscillatorische functies. Tevens is duidelijk dat de Henstock-integraal algemener is dan de Riemann-integraal (stelling 8).
Het is bijvoorbeeld, in tegenstelling tot de Riemann-integraal onbegrensde functies over (on)begrensde intervallen te integreren, zonder een limiet te hoeven nemen van integralen (4.1.3, 4.1.5).

7.2 Overig onderzoek

In **KS** wordt zelfs bewezen dat de Henstock-integraal op een strikt grotere klasse van functies is gedefinieerd dan de Lebesgue-integraal. Namelijk:

Stelling 11. *Als $f : I \to \mathbb{R}$. Dan is f Lebesgue-integreerbaar dan en slechts dan als $|f|$ Henstock-integreerbaar is.*

Het bewijs hiervan maakt gebruik van het feit dat op beide integralen een aantal convergentiestellingen van toepassing zijn. Het is echter uitvoerig en vereist veel extra theorie.
Daarnaast zou het ook interessant zijn om het aangestipte voorbeeld van de Feynman-pad integralen verder uit te zoeken. Hoewel R. Muldowney hier al veel onderzoek naar heeft gedaan, is het toch interessant om inzicht te krijgen in de Henstock-integreerbaarheid van functies op R^B en vervolgens na te gaan exact na te gaan dat de propagator inderdaad voldoet.

Literatuur

KS Douglas S. Kurtz, Charles W. Swartz; Theories of Integration;, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.; 2012; p. 53-232.

M P. Muldowney; Feynman's path integrals and Henstock's non-absolute integration; Journal of Applied Analysis, Vol. 6 No.1 (2000); p. 1-24

G Russell A. Gordon; The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock; American Mathematical Society; 1994; p. 137-156