

## BACHELOR

### Wachttijden in een k-gelimiteerd vakantiemodel

Houbiers, E.M.

*Award date:*  
2014

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

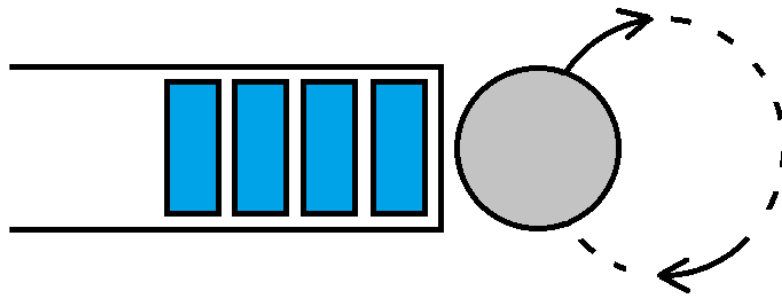
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

---

# Wachttijden in een $k$ -gelimiteerd vakantiemodel

---



ELLEN HOUBIERS (0775493)

BACHELOR EINDPROJECT

BACHELOR TECHNISCHE WISKUNDE  
TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN  
BEGELEIDER: MARKO BOON

8 JULI 2014

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>De <math>M/G/1</math> wachtrij</b>	<b>3</b>
2.1	De verwachtingswaarde . . . . .	3
2.2	Light traffic . . . . .	3
2.3	Heavy traffic . . . . .	4
2.4	Interpolatie . . . . .	5
2.5	De LST van $W$ en de PGF van $N$ . . . . .	5
2.6	Alternatieve afleiding . . . . .	7
2.7	Heavy traffic limietverdeling . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Het <math>k</math>-gelimiteerde vakantiemodel</b>	<b>10</b>
3.1	Light traffic . . . . .	10
3.2	Heavy traffic . . . . .	11
3.3	Interpolatie . . . . .	12
3.4	Interpolatie van een andere vorm . . . . .	13
3.5	Eerste orde interpolatie . . . . .	14
3.6	De LST van $W$ en de PGF van $N$ . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Het <math>k</math>-gelimiteerde vakantiemodel met algemene tussenaankomsttijden</b>	<b>18</b>
4.1	Light traffic . . . . .	18
4.2	Heavy traffic . . . . .	19
4.3	Interpolatie . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Resultaten</b>	<b>22</b>
5.1	Poisson aankomsten . . . . .	22
5.1.1	Vergelijken met LST . . . . .	22
5.1.2	Vergelijken met Tedijanto . . . . .	26
5.2	Algemene aankomsten . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Conclusie</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>Grafieken van de gemiddelde wachttijd bij Poisson aankomsten</b>	<b>33</b>
<b>B</b>	<b>Grafieken van de gemiddelde wachttijd bij Algemene aankomsten</b>	<b>34</b>
B.1	Erlang tussenaankomsttijden . . . . .	34
B.2	Uniforme tussenaankomsttijden . . . . .	35
B.3	Chi-kwadraat tussenaankomsttijden . . . . .	36

# 1 Inleiding

In het dagelijks leven moet er zeer vaak gewacht worden in een wachtrij. Hierbij kan gedacht worden aan klanten voor een kassa in de supermarkt of auto's voor een stoplicht, maar ook aan opdrachten die verzonden moeten worden met behulp van Bluetooth. De vraag die hierbij vaak gesteld wordt is: hoe lang is de gemiddelde wachttijd?

Voor mijn Bachelor eindproject wil ik deze vraag beantwoorden voor een speciaal soort wachtrijsysteem, namelijk het  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel. Hiervoor zullen we eerst de gemiddelde wachttijd moeten bepalen in een  $M/G/1$  wachtrijsysteem. Dit zal gebeuren in Hoofdstuk 2. Behalve de gemiddelde wachttijd zullen we in dit hoofdstuk ook naar de light traffic en heavy traffic limiet kijken en een interpolatie tussen deze twee limieten bepalen. Daarnaast zullen we nog de Laplace Stieltjes getransformeerde en de heavy traffic limietverdeling bepalen.

In Hoofdstuk 3 kijken we naar het  $k$ -gelimiteerd vakantiemodel. We zullen hierbij de gemiddelde wachttijd benaderen met behulp van twee verschillende interpolaties. Verder zullen we ook de Laplace Stieltjes getransformeerde voor de wachttijd bepalen. In Hoofdstuk 4 zullen we het  $k$ -gelimiteerd vakantiemodel veralgemeniseren. In dit hoofdstuk nemen we namelijk aan dat de tussenaankomsttijden algemeen verdeeld zijn. Vervolgens zullen we in Hoofdstuk 5 bepalen hoe goed de interpolaties uit de Hoofdstukken 3 en 4 zijn. Ten slotte trekken we onze conclusies in Hoofdstuk 6.

## 2 De M/G/1 wachtrij

Een M/G/1 wachtrij bestaat uit één wachtrij waarbij het aankomstproces een Poisson proces is met aankomstintensiteit  $\lambda$ . De klanten in deze wachtrij worden bediend door één server en de bedieningstijden  $B$  zijn identiek verdeeld en onderling onafhankelijk. We definiëren  $\rho := \lambda\mathbb{E}[B]$ . Om stabiliteit van het systeem te garanderen, moet er gelden dat  $\rho < 1$ .

We nemen  $W$  voor de wachttijd en  $L$  voor de rijlengte. Hierbij bevat  $L$  niet de klant die bediend wordt. Voor het totale aantal klanten in het systeem nemen we de grootte  $N$ . Verder zien we in dit verslag grootheden als functie van  $\lambda$ , waarbij  $\lambda$  tussen nul en een maximale waarde zal variëren. De redeneringen en afleidingen die we in de Paragrafen 2.1, 2.5 en 2.6 gebruiken zijn voornamelijk gebaseerd op [1].

### 2.1 De verwachtingswaarde

In deze paragraaf zullen we de verwachte wachttijd en de verwachte rijlengte bepalen. Als een nieuwe klant aankomt in het systeem, dan is dit systeem met kans  $(1 - \rho)$  leeg en kan de klant meteen in bediening genomen worden. Zijn wachttijd is in dit geval gelijk aan nul. Met kans  $\rho$  is het systeem niet leeg en moet de klant de residuele bedieningstijd van de klant die bediend wordt wachten. Daarnaast moet de klant altijd de bedieningstijden van alle klanten die in de rij staan wachten. Voor de gemiddelde wachttijd van deze klant geldt:

$$\mathbb{E}[W] = (1 - \rho) \cdot 0 + \rho\mathbb{E}[B_{res}] + \mathbb{E}[L]\mathbb{E}[B] = \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + \mathbb{E}[L]\mathbb{E}[B]. \quad (1)$$

Hierin maken we gebruik van het feit dat voor een residuele tijd geldt dat  $\mathbb{E}[T_{res}] = \frac{\text{Var}(T) + \mathbb{E}[T]^2}{2\mathbb{E}[T]}$ . Volgens Little's Law geldt dat  $\mathbb{E}[L] = \lambda\mathbb{E}[W]$  [1]. Met behulp van deze wet kunnen we (1) omschrijven naar:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2)}{2(1 - \lambda\mathbb{E}[B])}. \quad (2)$$

Nu we de verwachte wachttijd weten, kunnen we gemakkelijk de verwachte rijlengte bepalen. We hoeven alleen (2) in te vullen in Little's Law. Dit geeft dan:

$$\mathbb{E}[L] = \frac{\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2)}{2(1 - \lambda\mathbb{E}[B])}. \quad (3)$$

Deze verwachtingswaarden zullen we in Paragraaf 2.4 vergelijken met de interpolaties van beide grootheden.

### 2.2 Light traffic

In deze paragraaf bekijken we het limiet geval van de verwachte wachttijd en verwachte rijlengte onder light traffic (LT). Dat wil zeggen dat we kijken naar het geval waarbij  $\rho$  naar nul gaat. Hierbij houden we de bedieningstijden hetzelfde en laten de aankomstintensiteit naar nul gaan, oftewel we nemen de limiet van  $\lambda$  naar nul.

Nemen we in (2) de limiet van  $\lambda$  naar nul, dan geeft dat nul. Maar we willen de LT limiet graag in termen van  $\lambda$ . Daarom schrijven we de factor  $\frac{1}{1 - \lambda\mathbb{E}[B]}$  uit in zijn machtreeks. Nemen we vervolgens de limiet van  $\lambda$  naar nul, dan geeft dat:

$$\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2)(1 + \lambda\mathbb{E}[B] + O(\lambda^2)) = \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + O(\lambda^2). \quad (4)$$

Ook bij de bepaling van de LT limiet van de gemiddelde rijlengte, schrijven we de factor  $\frac{1}{1 - \lambda\mathbb{E}[B]}$  uit in zijn machtreeks. Als LT limiet krijgen we:

$$\mathbb{E}[L^{(LT)}] = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{2}\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2)(1 + \lambda + O(\lambda^2)) = \frac{1}{2}\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + O(\lambda^3). \quad (5)$$

Voor het bepalen van de LT limieten hebben we gebruik gemaakt van de formules voor de gemiddelde wachttijd en gemiddelde rijlengte. Maar als deze niet bekend zijn, kunnen toch beide LT limieten bepaald worden met behulp van een intuïtieve redenering. In light traffic geldt namelijk dat de kans dat een willekeurige klant die aankomt meer dan één andere klant in het systeem ziet verwaarloosbaar klein is. Als er een klant aankomt terwijl het systeem bezet is, wat gebeurt met kans  $\rho$ , dan is zijn wachttijd gelijk aan de residuele bedieningstijd plus de bedieningstijden van alle andere klanten uit de rij. Maar het aantal klanten dat in de rij staat is verwaarloosbaar klein en dus een  $O(\rho^2)$  term. Als de klant aankomt terwijl het systeem leeg is, dan is zijn wachttijd nul. In formulevorm geeft dit:

$$\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \mathbb{E}[B_{res}]\rho + O(\rho^2) = \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + O(\lambda^2). \quad (6)$$

Vergelijken we dit met (4), dan zien we dat beide uitdrukkingen precies hetzelfde zijn. Met behulp van Little's law en (6) kunnen we de LT limiet vinden voor de gemiddelde rijlengte. We krijgen dan:

$$\mathbb{E}[L^{(LT)}] = \lambda\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \frac{1}{2}\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + O(\lambda^3).$$

En dit is precies hetzelfde als (5).

We kunnen dus zonder dat we een formule voor de gemiddelde wachttijd en de gemiddelde rijlengte weten toch de LT limieten van beide grootheden bepalen. Later zullen we nog gebruik maken van deze LT limieten bij de bepaling van de LT limieten voor het  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel met Poisson aankomsten. Dit zal gebeuren in Hoofdstuk 3.

### 2.3 Heavy traffic

In heavy traffic (HT) geldt dat  $\rho$  naar de kritieke waarde 1 gaat. Hiervoor laten we de aankomstintensiteit naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B]}$  gaan. Verder houden we de bedieningstijden hetzelfde. Als we  $\rho$  naar 1 laten gaan, ofwel  $\lambda$  naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B]}$ , dan zullen de wachttijden en rijlengte steeds groter worden en uiteindelijk zelfs oneindig worden. Dit komt doordat er in beide verwachtingswaarden in de noemer een term  $1 - \lambda\mathbb{E}[B] = 1 - \rho$  staat. Daarom zullen we de HT limiet bepalen van *geschaalde* wachttijden en *geschaalde* rijlengtes. Als we de verwachtingswaarde namelijk vermenigvuldigen met de term  $1 - \rho = 1 - \lambda\mathbb{E}[B]$ , dan zal deze term uit de noemer verdwijnen waardoor de verwachtingswaarde niet meer oneindig wordt als  $\rho$  naar 1 gaat.

Allereerst moeten we de verwachtingswaarde van de geschaalde wachttijd  $(1 - \lambda\mathbb{E}[B])W$  bepalen.

$$\mathbb{E}[(1 - \lambda\mathbb{E}[B])W] = (1 - \lambda\mathbb{E}[B])\mathbb{E}[W] = \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2).$$

In de laatste stap hebben we (2) ingevuld. Nemen we de limiet van  $\lambda$  naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B]}$  van de geschaalde wachttijd, dan geeft dat:

$$\lim_{\lambda \uparrow \frac{1}{\mathbb{E}[B]}} \mathbb{E}[(1 - \lambda\mathbb{E}[B])W] = \lim_{\lambda \uparrow \frac{1}{\mathbb{E}[B]}} \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) = \mathbb{E}[B_{res}]. \quad (7)$$

Hetzelfde doen we voor de rijlengte. De verwachtingswaarde van de geschaalde rijlengte  $(1 - \lambda\mathbb{E}[B])L$  is gelijk aan:

$$\mathbb{E}[(1 - \lambda\mathbb{E}[B])L] = (1 - \lambda\mathbb{E}[B])\mathbb{E}[L] = \frac{1}{2}\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2).$$

Laten we  $\lambda$  naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B]}$  gaan, dan krijgen we:

$$\lim_{\lambda \uparrow \frac{1}{\mathbb{E}[B]}} \mathbb{E}[(1 - \lambda\mathbb{E}[B])L] = \lim_{\lambda \uparrow \frac{1}{\mathbb{E}[B]}} \frac{1}{2}\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) = \frac{\mathbb{E}[B_{res}]}{\mathbb{E}[B]}.$$

In de volgende paragraaf zullen we met behulp van de HT limiet een benadering bepalen voor de gemiddelde wachttijd.

## 2.4 Interpolatie

Nu we zowel de LT limiet als de HT limieten bepaald hebben voor de verwachte wachttijd en verwachte rijlengte, kunnen we de LT-HT interpolatie bepalen. Allereerst zullen we dit doen voor de verwachte wachttijd. Hiervoor nemen we  $\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = \frac{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}{1-\rho} = \frac{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}{1-\lambda\mathbb{E}[B]}$ . Er moet gelden dat  $\mathbb{E}[W^{(approx)}(0)] = 0$ . Vullen we  $\lambda = 0$  in, dan geeft dat  $\mathbb{E}[W^{(approx)}(0)] = c_0$  en hieruit volgt dat  $c_0$  gelijk moet zijn aan nul.

Verder moet gelden dat als we  $\lambda$  naar nul laten gaan, dat  $\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)]$  naar de LT limiet convergeert. In formulevorm geeft dat:

$$\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] \xrightarrow{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + O(\lambda^2).$$

Voordat we de limiet kunnen bepalen, moeten we eerst de factor  $\frac{1}{1-\lambda\mathbb{E}[B]}$  uitschrijven in zijn machtreeks. We krijgen dan:

$$\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = (c_1\lambda + c_2\lambda^2)(1 + \lambda\mathbb{E}[B] + O(\lambda^2)) = c_1\lambda + O(\lambda^2).$$

Er volgt dat  $c_1 = \frac{1}{2}(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2)$ . Als laatste moet er gelden dat  $(1 - \lambda\mathbb{E}[B])\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)]$  naar de HT limiet (7) convergeert als we de limiet van  $\lambda$  naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B]}$  nemen, oftewel:

$$(1 - \lambda\mathbb{E}[B])\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] \xrightarrow{\lambda \uparrow \frac{1}{\mathbb{E}[B]}} \mathbb{E}[B_{res}].$$

Er geldt dat  $(1 - \lambda\mathbb{E}[B])\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = \frac{1}{2}(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2)\lambda + c_2\lambda^2$ . Nemen hiervan de limiet van  $\lambda$  naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B]}$ , dan volgt daaruit dat  $c_2 = 0$ . Als uiteindelijke formule voor de LT-HT interpolatie krijgen we dan:

$$\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = \frac{\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2)}{2(1 - \lambda\mathbb{E}[B])}.$$

Als we deze approximatie vergelijken met de theoretisch gevonden formule (2), dan zien we dat deze exact hetzelfde zijn.

Nu we de LT-HT interpolatie voor de gemiddelde wachttijd hebben, kunnen we met Little's law de LT-HT interpolatie voor de gemiddelde rijlengte bepalen. Dit geeft:

$$\mathbb{E}[L^{(approx)}(\lambda)] = \lambda\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = \frac{\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2)}{2(1 - \lambda\mathbb{E}[B])}.$$

Vergelijken we deze LT limiet met (3), dan zien we dat deze precies hetzelfde zijn.

In een  $M/G/1$  wachtrij zijn de LT-HT interpolaties dus exact. Dit komt doordat de exacte uitdrukkingen (2) en (3) van de vorm  $\frac{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}{1-\lambda\mathbb{E}[B]}$  zijn. Later zullen we zien dat dit voor andere modellen niet meer geldt.

## 2.5 De LST van $W$ en de PGF van $N$

Naast de gemiddelde wachttijd en de gemiddelde rijlengte, kunnen we voor het  $M/G/1$  model ook wat zeggen over de verdeling van de wachttijd en de rijlengte. We zullen daarom in deze paragraaf de Laplace Stieltjes getransformeerde (LST) van de wachttijd en de kansgenererende functie (PGF) van het aantal klanten in het systeem bepalen. In Paragraaf 2.7 zullen we naar de HT-limietverdeling kijken. We zullen de komende drie paragrafen dus niet meer naar gemiddelden, maar naar verdelingen kijken.

Voor het bepalen van de LST van de wachttijd zijn er veel verschillende mogelijkheden. In deze paragraaf zullen de LST bepalen door te kijken naar de relatie tussen de  $n$ -de en  $(n+1)$ -de klant en door gebruik te maken van Lindley's recursie. In Paragraaf 2.6 zullen we op een alternatieve manier de LST van de wachttijd en de PGF van de rijlengte bepalen.

We nemen  $I_n$  voor de tussenaankomsttijd tussen de  $n$ -de en  $(n+1)$ -de klant. Omdat het aankomstproces een Poisson proces is, geldt dat  $I_n$  exponentieel verdeeld is met parameter  $\lambda$ . Verder nemen we  $W_n$  en  $B_n$  voor respectievelijk de wachttijd en de bedieningstijd van de  $n$ -de klant. Voor de aankomst van de  $(n+1)$ -de klant zijn er twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is dat hij aankomt terwijl de  $n$ -de klant het systeem al heeft verlaten. In dat geval is de tussenaankomsttijd  $I_n$  groter dan de totale tijd dat de  $n$ -de klant in het systeem geweest is. Deze totale tijd  $T_n$  is gelijk aan de wachttijd plus de bedieningstijd van klant  $n$ . Er moet dus gelden dat  $I_n > W_n + B_n = T_n$ . Omdat de  $(n+1)$ -de klant niemand in het systeem aantreft bij aankomst, kan hij gelijk in bediening genomen worden en is zijn wachttijd nul. De tweede mogelijkheid is dat de  $(n+1)$ -de klant aankomt terwijl de  $n$ -de klant nog in het systeem is. In dat geval is de tussenaankomsttijd  $I_n$  kleiner dan de totale tijd dat de  $n$ -de klant in het systeem is, oftewel  $I_n \leq W_n + B_n$ . De wachttijd is in dit geval gelijk aan de residuele tijd dat klant  $n$  nog in het systeem is. De residuele tijd dat de  $n$ -de klant nog in het systeem is, is gelijk aan  $W_n + B_n - I_n$ . Samenvattend geeft dit de volgende vergelijking voor de wachttijd van de  $(n+1)$ -de klant:

$$W_{n+1} = \max(0, W_n + B_n - I_n) = \max(0, T_n - I_n).$$

Deze vergelijking wordt ook wel Lindley's recursie genoemd. Nemen we hiervan de limiet van  $n$  naar oneindig, dan geeft dat:

$$W = \max(0, W + B - I) = \max(0, T - I).$$

Hierin zijn  $W$ ,  $B$ ,  $T$  en  $I$  de wachttijd, bedieningstijd, de totale verblijftijd in het systeem en tussenaankomsttijd van willekeurige klanten. Deze limiet bestaat, omdat  $\rho$  kleiner dan één is. Verder geldt dat  $T$  en  $I$  onafhankelijk zijn.

Met behulp van deze vergelijking kan direct de LST van de wachttijd bepaald worden:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(s) &= \mathbb{E}[e^{-sW}] = \mathbb{E}[e^{-s \max(0, T-I)}] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s \max(0, t-r)} f_T(t) f_I(r) dr dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-s(t-r)} f_T(t) \lambda e^{-\lambda r} dr dt + \int_0^\infty \int_t^\infty f_T(t) \lambda e^{-\lambda r} dr dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} f_T(t) \int_0^t \lambda e^{r(s-\lambda)} dr dt + \int_0^\infty f_T(t) \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda r} dr dt \\ &= \frac{\lambda}{s-\lambda} \int_0^\infty f_T(t) (e^{-\lambda t} - e^{-st}) dt + \int_0^\infty f_T(t) e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda}{s-\lambda} (\widetilde{T}(\lambda) - \widetilde{T}(s)) + \widetilde{T}(\lambda) \\ &= \frac{s}{s-\lambda} \widetilde{T}(\lambda) - \frac{\lambda}{s-\lambda} \widetilde{T}(s). \end{aligned} \tag{8}$$

Er geldt dat  $T = W + B$  en dus is de LST gelijk aan  $\widetilde{T}(s) = \widetilde{W}(s) \widetilde{B}(s)$ . Voor de LST van  $T$  in het punt  $\lambda$  kan een expliciete formule gevonden worden. Zo geldt er:

$$\widetilde{T}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f_T(t) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(I > t) f_T(t) dt = \mathbb{P}(I > T).$$

Er geldt dat  $\mathbb{P}(I > T)$  de kans is dat het systeem leeg is en dus geldt er  $\widetilde{T}(\lambda) = 1 - \rho$ . Nu kunnen we alles invullen in (8). Schrijven we de verkregen vergelijking om, dan geeft dat:

$$\widetilde{W}(s) = \frac{s(1 - \lambda \mathbb{E}[B])}{\lambda(\widetilde{B}(s) - 1) + s}. \tag{9}$$



Deze formule staat ook wel bekend als een van de vormen van de Pollaczek-Khinchin formule. Nu we de LST van de wachttijd weten, kunnen we gemakkelijk de PGF van het aantal klanten in het systeem bepalen. Zo hoeven we alleen Little's law voor verdelingen toe te passen. Deze wet is als volgt  $\tilde{N}(z) = \tilde{W}(\lambda(1-z))\tilde{B}(\lambda(1-z))$ . Vullen we hierin nu (9) in, dan geeft dat:

$$\begin{aligned}\tilde{N}(z) &= \frac{\lambda(1-z)(1-\lambda\mathbb{E}[B])\tilde{B}(\lambda(1-z))}{\lambda(\tilde{B}(\lambda(1-z))-1)+\lambda(1-z)} \\ &= \frac{(1-z)(1-\lambda\mathbb{E}[B])\tilde{B}(\lambda(1-z))}{\tilde{B}(\lambda(1-z))-z}.\end{aligned}$$

Met behulp van deze PGF kunnen we het gemiddelde aantal klanten in het systeem bepalen. Nemen we namelijk de afgeleide van de PGF en vullen we in deze afgeleide  $z = 1$  in, dan geeft dat een uitdrukking voor het gemiddelde aantal klanten in het systeem. Als we de afgeleide nemen van de LST van de wachttijd en hierin  $s = 0$  invullen, dan krijgen we min de verwachtingswaarde van de wachttijd.

## 2.6 Alternatieve afleiding

In deze paragraaf zullen we een alternatieve afleiding geven voor de LST voor de wachttijd. Hiervoor nemen we  $N_k^d$  voor het aantal klanten dat wordt achtergelaten door de  $k$ -de vertrekkende klant. We definiëren  $d_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_k^d = n)$ .  $d_n$  kan dus beschouwd worden als de fractie vertrekkende klanten die  $n$  klanten achterlaten. Hetzelfde kunnen we doen voor de aankomende klanten. Zo nemen we  $N_k^a$  voor het aantal klanten in het systeem vlak voor de aankomst van de  $k$ -de klant en definiëren we  $a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_k^a = n)$ . Verder nemen we  $N(t)$  voor het aantal klanten in het systeem op een willekeurig tijdstip  $t$  en  $p_n$  voor de fractie tijd dat er  $n$  klanten in het systeem zijn, oftewel  $p_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N(t) = n)$ .

We weten dat volgens de PASTA eigenschap (Poisson Arrivals See Time Averages) geldt dat  $a_n = p_n$  voor alle  $n$ . We willen nu laten zien dat ook geldt dat  $d_n = p_n$ . Hiervoor definiëren we de toestand van het systeem als het aantal klanten in het systeem. Als het systeem in toestand  $n$  is en er is een aankomst dan verandert de toestand naar  $(n+1)$ . Het aantal overgangen van toestand  $n$  naar toestand  $(n+1)$  komt overeen met het aantal aankomsten waarbij er  $n$  klanten in het systeem gevonden worden. Dit is gelijk aan het totale aantal aankomsten per tijdseenheid vermenigvuldigt met de fractie klanten die  $n$  klanten vinden, oftewel  $\lambda a_n$ .

Als er een vertrek is, dan verandert de toestand van het systeem van  $(n+1)$  naar  $n$ . Het aantal overgangen van  $(n+1)$  naar  $n$  per tijdseenheid komen overeen met het aantal vertrekkende klanten die  $n$  klanten in het systeem achterlaten. Dit is gelijk aan het totale aantal aankomsten per tijdseenheid vermenigvuldigt met de fractie klanten die  $n$  klanten achterlaten, oftewel  $\lambda d_n$ .

Nu geldt er in evenwicht dat het aantal overgangen van  $n$  naar  $(n+1)$  per tijdseenheid gelijk is aan het aantal overgangen per tijdseenheid van  $(n+1)$  naar  $n$ . Hieruit volgt dat  $\lambda a_n = \lambda d_n$ . En dus geldt er:

$$p_n = a_n = d_n.$$

Deze gelijkheid zullen we naderhand nog nodig hebben bij het bepalen van de PGF van het aantal klanten in het systeem. Maar eerste zullen we kijken naar de relatie tussen  $N_{k+1}^d$  en  $N_k^d$ . Als  $N_k^d = 0$ , dan is het aantal klanten dat wordt achtergelaten door de  $(k+1)$ -de klant gelijk aan het aantal klanten dat is aangekomen tijdens de bediening van deze  $(k+1)$ -de klant. Dit aantal noemen we  $A_{k+1}$  en er geldt dat  $N_{k+1}^d = A_{k+1}$ . Als  $N_k^d > 0$ , dan is het aantal klanten dat wordt achtergelaten door de  $(k+1)$ -de klant gelijk aan het aantal klanten dat is aangekomen tijdens de bediening van deze klant plus het aantal dat wordt achtergelaten door de  $k$ -de klant min één. We trekken er één van af, omdat de  $(k+1)$ -de klant nu zelf het systeem verlaat. In dit geval geldt er dat  $N_{k+1}^d = N_k^d - 1 + A_{k+1}$ . Voegen we beide uitdrukking samen, dan krijgen we:

$$N_{k+1}^d = \begin{cases} A_{k+1} & \text{als } N_k^d = 0 \\ N_k^d - 1 + A_{k+1} & \text{als } N_k^d > 0. \end{cases}$$

Er geldt nu dat  $\{N_k^d\}_{k=0}^\infty$  een Markov keten is met overgangskansen  $p_{ij} = \mathbb{P}(N_{k+1}^d = j | N_k^d = i)$ . Voor  $i > 0$  geldt dat als  $j < i - 1$ , dat  $p_{ij} = 0$  en als  $j \geq i - 1$ , dan is  $p_{ij}$  de kans dat er precies  $j - i + 1$  klanten zijn aangekomen tijdens de bediening van de  $(k + 1)$ -de klant. Als  $i = 0$  dan laat de  $k$ -de klant dus een leeg systeem achter en is  $p_{ij}$  dus de kans dat er tijdens de bediening van de  $(k + 1)$ -de klant precies  $j$  klanten zijn aangekomen. Nemen we nu  $\alpha_n$  voor de kans dat er precies  $n$  klanten zijn aangekomen tijdens de bediening van de  $(k + 1)$ -de klant, dan is de overgangsmatrix gelijk aan:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ \vdots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ & \vdots & 0 & \alpha_0 & \cdots \\ & & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Omdat geldt dat  $d_n = \mathbb{P}(N^d = n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_k^d = n)$ , volgt dat de limietkansen  $d_n$  voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen:

$$d_n = d_{n+1}\alpha_0 + d_n\alpha_1 + \cdots + d_1\alpha_n + d_0\alpha_n = d_0\alpha_n + \sum_{k=0}^n d_{n+1-k}\alpha_k. \quad (10)$$

Met behulp van deze evenwichtsvergelijkingen en de PGF van  $A$  kunnen we de PGF van het aantal klanten in het systeem vinden. De PGF van  $A$  is van de vorm  $\tilde{A}(z) = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n z^n$  en die van  $N^d$  is gelijk aan  $\tilde{N}^d(z) = \sum_{n=0}^\infty d_n z^n$ . Vullen we in de PGF van  $N^d$  (10) in en schrijven we dit om, dan geeft dat:

$$\begin{aligned} \tilde{N}^d(z) &= \sum_{n=0}^\infty (d_0\alpha_n + \sum_{k=0}^n d_{n+1-k}\alpha_k) z^n \\ &= d_0\tilde{A}(z) + \frac{1}{z}\tilde{A}(z)(\tilde{N}^d(z) - d_0). \end{aligned} \quad (11)$$

We weten dat  $d_0 = p_0$ . Er geldt dat  $p_0$  de fractie tijd is dat het systeem leeg is en hieruit volgt dat  $d_0 = 1 - \rho$ . We hoeven nu alleen nog  $\tilde{A}(z)$  en dus  $\alpha_n$  uit te rekenen. We weten dat als de bedieningstijd gelijk is aan  $t$ , dat het aantal klanten dat aankomt tijdens deze bediening Poisson verdeeld is met parameter  $\lambda t$ . Er geldt dus:

$$\alpha_n = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt.$$

Voor de PGF van  $A$  geldt nu:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z) &= \sum_{k=0}^n \left( \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt \right) z^n \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t z)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_B(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)t} f_B(t) dt \\ &= \tilde{B}(\lambda(1-z)). \end{aligned}$$

Eerder hebben we bepaald dat  $d_n = p_n$  en daarom geldt dat  $\tilde{N}(z) = \tilde{N}^d(z)$ . We kunnen nu alles invullen in (11) en schrijven we dit resultaat om, dan geeft dat:

$$\tilde{N}(z) = \frac{(1 - \lambda\mathbb{E}[B])\tilde{B}(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{B}(\lambda(1-z)) - z}.$$

Met behulp van Little's law voor verdelingen en deze PGF, kunnen we gemakkelijk de LST van de wachttijd vinden. Little's law voor verdelingen is gelijk aan  $\tilde{W}(s) = \frac{\tilde{N}(1-\frac{s}{\lambda})}{\tilde{B}(s)}$ . We krijgen voor de LST van de wachttijd de volgende uitdrukking:

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1 - \lambda\mathbb{E}[B])s}{\lambda(\tilde{B}(s) - 1) + s}.$$

De LST van de wachttijd zal in de volgende paragraaf nog gebruikt worden. In deze Paragraaf bepalen we namelijk de HT limietverdeling van de wachttijd.

## 2.7 Heavy traffic limietverdeling

In een  $M/G/1$  wachtrij is het mogelijk om de heavy traffic limietverdeling te bepalen voor de wachttijd. Om dit bepalen, nemen we de limiet van  $\lambda$  naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B]}$  van de LST van  $(1 - \lambda\mathbb{E}[B])W$ . Voor we de limiet nemen, zullen we eerst (9) omschrijven. Hiervoor maken we gebruik van het feit dat  $\tilde{B}_{res}(s) = \frac{1 - \tilde{B}(s)}{s\mathbb{E}[B]}$ .

$$\tilde{W}(s) = \frac{s\mathbb{E}[B](1 - \lambda\mathbb{E}[B])}{s\mathbb{E}[B] - \lambda\mathbb{E}[B](1 - \tilde{B}(s))} = \frac{1 - \lambda\mathbb{E}[B]}{1 - \lambda\mathbb{E}[B]\frac{1 - \tilde{B}(s)}{s\mathbb{E}[B]}} = \frac{1 - \lambda\mathbb{E}[B]}{1 - \lambda\mathbb{E}[B]\tilde{B}_{res}(s)}.$$

Vervolgens willen we de LST van  $(1 - \lambda\mathbb{E}[B])W$  bepalen. Hiervoor geldt het volgende:

$$(1 - \lambda\mathbb{E}[B])W(s) = \mathbb{E}[e^{-s(1 - \lambda\mathbb{E}[B])W}] = \tilde{W}(s(1 - \lambda\mathbb{E}[B])) = \frac{1 - \lambda\mathbb{E}[B]}{1 - \lambda\mathbb{E}[B]\tilde{B}_{res}(s(1 - \lambda\mathbb{E}[B]))}.$$

In deze LST laten we  $\lambda$  naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B]}$  gaan en met behulp van L'Hôpital, krijgen we:

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(HT)}(s) &= \lim_{\lambda \uparrow \frac{1}{\mathbb{E}[B]}} \frac{-\mathbb{E}[B]}{-\mathbb{E}[B]\tilde{B}_{res}(s(1 - \lambda\mathbb{E}[B])) + \lambda\mathbb{E}[B]^2 s \tilde{B}'_{res}(s(1 - \lambda\mathbb{E}[B]))} \\ &= \frac{1}{\tilde{B}_{res}(0) - s\tilde{B}'_{res}(0)} \\ &= \frac{\frac{1}{\mathbb{E}[B_{res}]}}{\frac{1}{\mathbb{E}[B_{res}]} + s}. \end{aligned}$$

In deze laatste vorm herkennen we de LST van de exponentiële verdeling met parameter  $\frac{1}{\mathbb{E}[B_{res}]}$ .

We kunnen dus concluderen dat  $(1 - \lambda\mathbb{E}[B])W \xrightarrow{\lambda \uparrow \frac{1}{\mathbb{E}[B]}} \text{Exp}\left(\frac{1}{\mathbb{E}[B_{res}]}\right)$ , oftewel de HT limietverdeling

van de wachttijd is de exponentiële verdeling met parameter  $\frac{1}{\mathbb{E}[B_{res}]}$ .

De HT limietverdeling van het aantal klanten in het systeem kunnen we op dezelfde manier bepalen. Na het twee keer toepassen van L'Hôpital krijgen we:

$$\tilde{N}^{(HT)}(s) = \frac{\frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[B_{res}]}}{\frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[B_{res}]} + s}$$

Hierin herkennen we de LST van de exponentiële verdeling met parameter  $\frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[B_{res}]}$ . Nu kunnen we dus concluderen dat HT limietverdeling van het aantal klanten in het systeem de exponentiële verdeling is met parameter  $\frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[B_{res}]}$ , oftewel  $(1 - \lambda\mathbb{E}[B])N \xrightarrow{\lambda \uparrow \frac{1}{\mathbb{E}[B]}} \text{Exp}\left(\frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[B_{res}]}\right)$ .

### 3 Het $k$ -gelimiteerde vakantiemodel

Een  $k$ -gelimiteerd vakantiemodel bestaat, net zoals de  $M/G/1$  wachtrij, uit één wachtrij en één server. Het aankomstproces is een Poisson proces met aankomstintensiteit  $\lambda$ . De server bedient in dit model maximaal  $k$  klanten, waarbij de bedieningstijden  $B$  identiek verdeeld en onderling onafhankelijk zijn. Na de bediening van deze  $k$  klanten of als het systeem leeg is, gaat de server op een zogenaamde vakantie. De lengte van deze vakantie  $S$  heeft een algemene verdeling en is onafhankelijk van alle andere variabelen in het systeem. Verder nemen we weer  $W$  voor de wachttijd en  $L$  voor de rijlengte. Hierbij bevat  $L$  niet de klant die bediend wordt. Voor het totale aantal klanten in het systeem nemen we  $N$ .

We definiëren  $\rho := \lambda\mathbb{E}[B]$  en  $u := \lambda\mathbb{E}[B] + \frac{\lambda\mathbb{E}[S]}{k}$ . Hierbij staat  $u$  voor de utilisatie en we kunnen  $u$  interpreteren als de mate waarin het systeem benut wordt. Verder nemen we  $C$  voor de tijd van een cycle, waarbij een cycle bestaat uit een bedieningsperiode en een vakantieperiode. De server werkt een fractie  $\rho$  van de cyclustijd en is een fractie  $1 - \rho$  van de cyclustijd op vakantie. Voor de gemiddelde vakantietijd geldt dus  $\mathbb{E}[S] = (1 - \rho)\mathbb{E}[C]$ . Dit kunnen we omschrijven om een uitdrukking te krijgen voor de gemiddelde cyclustijd. We krijgen:

$$\mathbb{E}[C] = \frac{\mathbb{E}[S]}{1 - \rho} = \frac{\mathbb{E}[S]}{1 - \lambda\mathbb{E}[B]}.$$

Om stabiliteit van het systeem te kunnen garanderen, moet er gelden dat het gemiddeld aantal klanten dat aankomt tijdens een cycle kleiner is dan het gemiddeld aantal klanten dat bediend wordt tijdens deze cycle. Gemiddeld komen er  $\lambda\mathbb{E}[C]$ , oftewel  $\frac{\lambda\mathbb{E}[S]}{1 - \lambda\mathbb{E}[B]}$ , klanten aan en er worden maximaal  $k$  klanten bediend. De stabiliteitsconditie is dus:

$$\frac{\lambda\mathbb{E}[S]}{1 - \lambda\mathbb{E}[B]} < k.$$

Voor een  $k$ -gelimiteerd vakantiemodel zijn er geen expliciete, exacte formules voor de gemiddelde wachttijd en voor de gemiddelde rijlengte. In dit hoofdstuk zullen we daarom de LT-HT interpolatie bepalen. Wat we wel weten is dat de rijlengte dezelfde verdeling heeft als de som van de rijlengte in een  $M/G/1$  wachtrij en de rijlengte tijdens een willekeurig moment in een vakantie. In formulevorm geldt er:

$$L \stackrel{d}{=} L^{(M/G/1)} + L^{(S)}.$$

Nemen we nu de verwachtingswaarde aan beide kanten, dan krijgen we  $\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[L^{(M/G/1)}] + \mathbb{E}[L^{(S)}]$ . Dit kunnen we omschrijven met behulp van Little's Law:  $\mathbb{E}[L] = \lambda\mathbb{E}[W]$  en dit geeft:

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[W^{(M/G/1)}] + \frac{\mathbb{E}[L^{(S)}]}{\lambda}. \quad (12)$$

Deze vergelijking staat ook wel bekend als de Fuhrmann-Cooper decompositie. In Hoofdstuk 4 zullen we bij de bepaling van de LT limiet gebruik maken van deze decompositie.

#### 3.1 Light traffic

In deze paragraaf zullen we het limiet geval van de verwachte wachttijd en verwachte rijlengte onder light traffic bekijken. De redematies en afleidingen die we gebruiken zijn voornamelijk gebaseerd op [2].

Bij de bepaling van de LT limiet laten we  $u$  naar nul gaan. Dit doen we door de bedieningstijden hetzelfde te houden en de aankomstintensiteit  $\lambda$  naar nul te laten convergeren. Verder weten we dat in light traffic geldt dat de kans dat een willekeurige klant die aankomt meer dan één andere klant in het systeem ziet verwaarloosbaar klein is. Het  $k$ -gelimiteerde proces is dus eigenlijk een exhaustive proces, behalve als  $k = 1$ . In een exhaustive proces is er geen limiet op het aantal klanten dat wordt bediend en de server blijft klanten bedienen totdat de wachtrij leeg is.

Om de light traffic limiet van de wachttijd te bepalen, maken we gebruik van (12). Het eerste deel van deze formule hebben we al bepaald in paragraaf 2.2. Zo geldt er volgens (4) dat:

$$\mathbb{E}[W^{(M/G/1)(LT)}] = \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + O(\lambda^2). \quad (13)$$

We hoeven dus alleen nog  $\frac{\mathbb{E}[L^{(s)}]}{\lambda}$  te bepalen. Omdat we de LT limiet bepalen, geldt dat  $L = 0$  aan het begin van een vakantie en dus is  $\mathbb{E}[L^{(s)}]$  de gemiddelde rijlengte tijdens een vakantie. Daardoor stelt  $\frac{\mathbb{E}[L^{(s)}]}{\lambda}$  de verwachte wachttijd tijdens een vakantie voor, maar dit geldt alleen onder LT.

Als een klant aankomt tijdens een vakantie dan moet hij wachten tot de server terugkomt van vakantie, oftewel de verwachte residuele vakantietijd  $\mathbb{E}[S_{res}]$ . Daarna moet hij nog wachten totdat alle andere klanten die voor hem in de rij staan bediend zijn, oftewel  $\mathbb{E}[L^{(S)}]\mathbb{E}[B]$ . Maar omdat we de light traffic limiet bepalen, is het aantal klanten dat in de rij staat verwaarloosbaar klein en dus een  $O(\lambda^2)$  term. We krijgen dus:

$$\frac{\mathbb{E}[L^{(S)}]}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \downarrow 0} \mathbb{E}[S_{res}] + O(\lambda^2). \quad (14)$$

De formules (13) en (14) kunnen we invullen in (12) en dit geeft:

$$\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \mathbb{E}[S_{res}] + \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + O(\lambda^2). \quad (15)$$

Om nu de light traffic limiet van de rijlengte te bepalen, hoeven we alleen Little's law toe te passen op (15). Dit geeft dan:

$$\mathbb{E}[L^{(LT)}] = \lambda\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \lambda\mathbb{E}[S_{res}] + \frac{1}{2}\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + O(\lambda^3).$$

Voor  $k = 1$  gedraagt het  $k$ -gelimiteerde proces zich onder LT niet meer als een exhaustive model en daarom is ook de LT limiet anders. Wel geldt nog steeds dat als een klant aankomt tijdens een vakantie dat zijn wachttijd gelijk aan  $\mathbb{E}[S_{res}] + O(\lambda^2)$ . Maar als een klant aankomt tijdens een bediening, wat gebeurt met kans  $\rho$ , dan is zijn wachttijd langer. Omdat  $k = 1$  gaat de server na iedere bediening op vakantie. De klant moet dus behalve de residuele bedieningstijd ook een vakantie wachten. Het aantal klanten dat in de rij staat is verwaarloosbaar klein, een orde  $O(\lambda^2)$  term, en daarom wordt de klant na de vakantie meteen in bediening genomen. Voor de LT limiet van de gemiddelde wachttijd bij  $k = 1$  geldt dus:

$$\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \mathbb{E}[S_{res}] + \rho(\mathbb{E}[B_{res}] + \mathbb{E}[S]) + O(\rho^2) = \mathbb{E}[S_{res}] + \frac{1}{2}\lambda(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2 + \mathbb{E}[B]\mathbb{E}[S]) + O(\lambda^2).$$

Voor de LT limiet van de rijlengte bij  $k = 1$  geldt dat deze gelijk is aan:

$$\mathbb{E}[L^{(LT)}] = \lambda\mathbb{E}[S_{res}] + \frac{1}{2}\lambda^2(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2 + \mathbb{E}[B]\mathbb{E}[S]) + O(\lambda^3).$$

In de rest van het verslag zullen we ons beperken tot de gevallen waarbij  $k > 1$ . Maar voor  $k = 1$  kunnen de interpolaties op dezelfde manier bepaald worden.

### 3.2 Heavy traffic

Voor het bepalen van de heavy traffic limiet van de geschaalde wachttijd, maken we gebruik van de Pseudo Conservation Law [3]. Voor een  $k$ -gelimiteerd vakantieproces is deze gelijk aan:

$$\lambda\mathbb{E}[B] \left( 1 - \frac{\lambda\mathbb{E}[S]}{k(1 - \lambda\mathbb{E}[B])} \right) \mathbb{E}[W] = \frac{\lambda^2\mathbb{E}[B]^2\mathbb{E}[B_{res}]}{(1 - \lambda\mathbb{E}[B])} + \lambda\mathbb{E}[B]\mathbb{E}[S_{res}] + \frac{\mathbb{E}[S]\lambda^2\mathbb{E}[B]^2}{(1 - \lambda\mathbb{E}[B])k} - \frac{(1 - \lambda\mathbb{E}[B])\mathbb{E}[M(M - 1)]\mathbb{E}[B]}{2k}.$$

Hierin is  $M$  het aantal klanten dat bediend wordt tijdens een cycle. Voor  $\rho < 1$  is de verdeling hiervan onbekend, maar in heavy traffic geldt dat  $\mathbb{E}[M(M-1)] \rightarrow k(k-1)$ . Het gedeelte dat voor de verwachte wachttijd staat kunnen we zodanig omschrijven dat er een factor  $(1-u)$  staat. Zo geldt er:

$$\lambda \mathbb{E}[B] \left( 1 - \frac{\lambda \mathbb{E}[S]}{k(1 - \lambda \mathbb{E}[B])} \right) = \frac{\lambda \mathbb{E}[B]}{1 - \lambda \mathbb{E}[B]} (1 - u).$$

De verwachtingswaarde van de geschaalde wachttijd is dus gelijk aan:

$$(1-u)\mathbb{E}[W] = \lambda \mathbb{E}[B] \mathbb{E}[B_{res}] + (1 - \lambda \mathbb{E}[B]) \mathbb{E}[S_{res}] + \frac{\mathbb{E}[S] \lambda \mathbb{E}[B]}{k} - \frac{(1 - \lambda \mathbb{E}[B])^2 \mathbb{E}[M(M-1)]}{2\lambda k}. \quad (16)$$

Nu willen we de limiet bepalen van  $u$  naar 1. Als  $u$  naar 1 gaat, dan moet  $\lambda$  naar  $\frac{1}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}}$  convergeren, oftewel naar  $\frac{k}{k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}$ . Nemen we deze limiet dan geeft dat:

$$\lim_{u \uparrow 1} (1-u)\mathbb{E}[W] = \frac{k\text{Var}(B) + \text{Var}(S)}{2(k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])} + \frac{k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}{2k}. \quad (17)$$

In Paragraaf 3.4 zullen we in plaats van de HT limiet van  $(1-u)\mathbb{E}[W]$ , de HT limiet nodig hebben van  $(\lambda_{max} - \lambda)\mathbb{E}[W]$ . Hierin is  $\lambda_{max}$  de maximale waarde die  $\lambda$  kan aannemen en er geldt dat  $\lambda_{max} = \frac{1}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}}$ . Omdat geldt dat  $\lambda_{max} - \lambda = \frac{1-u}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}}$ , moeten (17) vermenigvuldigen met  $\frac{1}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}}$  om de HT limiet van  $(\lambda_{max} - \lambda)\mathbb{E}[W]$  te krijgen. Deze vermenigvuldiging geeft:

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{max}} (\lambda_{max} - \lambda)\mathbb{E}[W] = \frac{k^2\text{Var}(B) + k\text{Var}(S)}{2(k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])^2} + \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Met behulp van Little's law en de formule van  $(1-u)\mathbb{E}[W]$  (16), kunnen we HT limiet van de verwachte rijlengte bepalen. Zo geldt er:

$$\lim_{u \uparrow 1} (1-u)\mathbb{E}[L] = \lim_{u \uparrow 1} \lambda(1-u)\mathbb{E}[W] = \frac{k^2\text{Var}(B) + k\text{Var}(S)}{2(k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])^2} + \frac{1}{2}.$$

In de volgende drie paragrafen zullen we met onder andere deze HT limieten benaderingen voor de gemiddelde wachttijd en gemiddelde rijlengte bepalen.

### 3.3 Interpolatie

In deze paragraaf zullen we LT-HT interpolatie bepalen voor de verwachte wachttijd en voor de verwachte rijlengte. De formule van de approximatie van de verwachte wachttijd nemen we van de volgende vorm:

$$\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = \frac{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}{1-u} = \frac{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)}.$$

Er moet gelden dat de approximatie naar de LT limiet (15) convergeert als  $\lambda$  naar nul gaat. We schrijven voordat we de limiet nemen, de approximatie eerst om. Dit geeft:

$$\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = c_0 + \left( c_0\mathbb{E}[B] + \frac{c_0\mathbb{E}[S]}{k} + c_1 \right) \lambda + O(\lambda^2).$$

Vergelijken we dit met de LT limiet (15), dan volgt hieruit dat  $c_0 = \mathbb{E}[S_{res}]$  en dat  $c_1 = \frac{1}{2} (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) - \mathbb{E}[B]\mathbb{E}[S_{res}] - \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2k}$ . Verder moet gelden dat als  $u \uparrow 1$  dat  $(1-u)\mathbb{E}[W^{(approx)}(\rho)]$  naar de HT limiet (17) convergeert, oftewel:

$$(1-u)\mathbb{E}[W^{(approx)}(\rho)] \xrightarrow{u \uparrow 1} \frac{k\text{Var}(B) + \text{Var}(S)}{2(k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])} + \frac{k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}{2k}. \quad (19)$$

Nemen we de limiet van  $u$  naar 1 van de approximatie, dan geeft dat:

$$\lim_{u \uparrow 1} (1-u) \mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = \frac{k \text{Var}(B) + k \mathbb{E}[B]^2 + \frac{2c_2 k^2}{k \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}}{2(k \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])}.$$

Vergelijken we dit met (19), dan zien we dat het volgende moet gelden:

$$\frac{k \mathbb{E}[B]^2 + \frac{2c_2 k^2}{k \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}}{2(k \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])} = \frac{\text{Var}(S)}{2(k \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])} + \frac{k \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}{2k}.$$

Hieruit volgt dat  $c_2$  gelijk is aan:

$$c_2 = \frac{(k \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]) (k \text{Var}(S) + 2k \mathbb{E}[B] \mathbb{E}[S] + \mathbb{E}[S]^2)}{2k^3}.$$

We krijgen dus de volgende formule voor de LT-HT interpolatie voor de gemiddelde wachttijd:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] &= \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{1}{2} \lambda (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2} \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) \left( \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k} + \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 \right) \lambda^2}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)}. \end{aligned} \quad (20)$$

In Paragraaf 5 zullen we bepalen hoe goed deze LT-HT interpolatie de daadwerkelijke wachttijd benadert. Het is nu gemakkelijk om de LT-HT interpolatie van de gemiddelde rijlengte te bepalen. We hoeven alleen Little's law toe te passen op (20). Zo krijgen we:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L^{(approx)}(\lambda)] &= \lambda \mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] \\ &= \frac{\lambda (\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2)}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{1}{2} \lambda^2 (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2} \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) \left( \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k} + \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 \right) \lambda^3}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)}. \end{aligned}$$

We hebben de LT-HT interpolatie van de gemiddelde rijlengte ook bepaald door gebruik te maken van de LT en HT limiet, net zoals we de LT-HT interpolatie voor de wachttijd bepaald hebben. Maar dit was meer werk en uiteindelijk kwamen we op hetzelfde antwoord. Door gebruik te maken van Little's law kunnen we dus op een makkelijke manier de LT-HT interpolatie van de gemiddelde rijlengte bepalen.

### 3.4 Interpolatie van een andere vorm

We kunnen de gemiddelde wachttijd ook benaderen met behulp een andere formule voor de approximatie. Zo gaan we in deze paragraaf uit van de volgende uitdrukking:  $\mathbb{E}[W^{(approx2)}(\lambda)] = \frac{c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2}{\lambda_{max} - \lambda}$ . Hierin is  $\lambda_{max} = \frac{1}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}}$ .

Ook in dit geval moet er gelden dat de approximatie naar de LT limiet (15) moet convergeren als  $\lambda$  naar nul convergeert. We schrijven de formule voor de approximatie eerst om. Dit geeft:

$$\mathbb{E}[W^{(approx2)}(\lambda)] = c_0 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) + \left( c_0 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 + c_1 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) \right) \lambda + O(\lambda^2).$$

Vergelijken we dit met de LT limiet (15) dan zien we dat moet gelden dat  $c_0 = \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S] \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)}$  en

$$\text{dat } c_1 = \frac{\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2}{2 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)} - \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S]}.$$

Verder moet gelden dat de approximatie gelijk is aan de HT limiet als  $\lambda$  naar  $\lambda_{max}$  convergeert, maar in dit geval van de HT limiet van  $(\lambda_{max} - \lambda)\mathbb{E}[W]$  (18). De HT limiet van de approximatie is gelijk aan:

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{max}} (\lambda_{max} - \lambda)\mathbb{E}[W^{(approx2)}(\lambda)] = \frac{k^2 \text{Var}(B) + k^2 \mathbb{E}[B]^2 + 2k^2 c_2}{2(k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])^2}.$$

Als we dit gelijkstellen aan de HT limiet (18), dan zien we dat  $c_2$  moet voldoen aan de volgende vergelijking:

$$\frac{k^2 \mathbb{E}[B]^2 + 2k^2 c_2}{2(k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])^2} = \frac{k \text{Var}(S)}{2(k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])^2} + \frac{1}{2}.$$

Lossen we hieruit  $c_2$  op, dan volgt dat  $c_2 = \frac{k \text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2 + 2k\mathbb{E}[B]\mathbb{E}[S]}{2k^2}$ . We kunnen nu alle  $c_i$ 's invullen in de formule voor de approximatie en dit geeft dan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W^{(approx2)}(\lambda)] &= \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{1}{2} (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2} \left( \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k} + \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 \right) \lambda^2}{\frac{1}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}} - \lambda}. \end{aligned}$$

Als we in deze tweede approximatie zowel de noemer als de teller van de laatste breuk vermenigvuldigen met  $\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}$ , dan krijgen we precies de approximatie (20) uit paragraaf 3.3.

### 3.5 Eerste orde interpolatie

De gemiddelde wachttijd kunnen we ook benaderen met een eerste orde approximatie. We nemen in deze paragraaf dus de volgende formule voor de LT-HT interpolatie:

$$\mathbb{E}[W^{(approx3)}(\lambda)] = \frac{c_0 + c_1 \lambda}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)} \quad (21)$$

$$= c_0 + \lambda \left( c_0 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) + c_1 \right) + O(\lambda^2). \quad (22)$$

Als we de limiet van  $\lambda$  naar nul nemen, dan moet de approximatie naar de LT limiet convergeren. Maar in dit geval moet de LT limiet in plaats van een orde  $O(\lambda^2)$  een orde  $O(\lambda)$  hebben. De LT limiet (15) kunnen we omschrijven tot  $\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \mathbb{E}[S_{res}] + O(\lambda)$ . Vergelijken we dit met (22), dan zien we dat moet gelden dat  $c_0 = \mathbb{E}[S_{res}]$ .

Nemen we de limiet van  $\lambda$  naar  $\lambda_{max}$ , dan moet  $(1 - u)\mathbb{E}[W^{(approx3)}(\lambda)]$  naar de HT limiet (17) convergeren. De HT limiet van de approximatie is gelijk aan:

$$\begin{aligned} \lim_{u \uparrow 1} (1 - u)\mathbb{E}[W^{(approx3)}(\lambda)] &= \lim_{\lambda \uparrow \frac{k}{k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}} \mathbb{E}[S_{res}] + c_1 \lambda \\ &= \frac{\text{Var}(S)}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{1}{2}\mathbb{E}[S] + \frac{c_1 k}{k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}. \end{aligned}$$

Stellen we nu deze HT limiet gelijk aan de HT limiet (17), dan moet  $c_1$  aan de volgende vergelijking voldoen:

$$\frac{\text{Var}(S)}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{1}{2}\mathbb{E}[S] + \frac{c_1 k}{k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]} = \frac{k \text{Var}(B) + \text{Var}(S)}{2(k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])} + \frac{k\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S]}{2k}.$$

Lossen we deze vergelijking op naar  $c_1$  dan krijgen we:

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( \text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2 - \frac{\mathbb{E}[B]\text{Var}(S)}{\mathbb{E}[S]} - \mathbb{E}[B]\mathbb{E}[S] \left(1 - \frac{2}{k}\right) - \frac{\mathbb{E}[S]^2(k-1)}{k^2} \right).$$



Nu we beide onbekenden bepaald hebben, kunnen we ze invullen in (21) en als uiteindelijke LT-HT interpolatie krijgen we:

$$\mathbb{E}[W^{(approx3)}(\lambda)] = \frac{\frac{(1-\mathbb{E}[B]\lambda)\text{Var}(S)}{\mathbb{E}[S]} + \mathbb{E}[S] \left(1 - \mathbb{E}[B](1 - \frac{2}{k})\lambda - \frac{\mathbb{E}[S](k-1)\lambda}{k^2}\right) + (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda}{2 - 2\lambda \left(\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}\right)}. \quad (23)$$

In Hoofdstuk 5 zullen we bepalen hoe goed deze eerste orde interpolatie de daadwerkelijke wachttijd benadert. Ook zullen we in Hoofdstuk 5 deze eerste orde interpolatie vergelijken met de tweede orde interpolatie 20.

### 3.6 De LST van $W$ en de PGF van $N$

Voor het  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel kunnen, naast de gemiddelde wachttijd en gemiddelde rijlengte, ook iets zeggen over de LST van de wachttijd. We zullen in deze paragraaf dus niet meer naar gemiddelden, maar naar verdelingen kijken. Voor het bepalen van de LST van de wachttijd, hebben we gebruik gemaakt van de redeneringen en resultaten uit [4].

We kijken naar het systeem op momenten dat een bediening klaar is en op momenten dat de server terugkomt van vakantie, oftewel op de tijdstippen  $\{t_1, t_2, \dots\}$ . We definiëren de toestand van het systeem als  $\{N_i, \xi_i\}$ . Hierin is  $N_i$  het aantal klanten in het systeem op tijdstip  $t_i$ . En we nemen  $\xi_i = 0$ , als de server op tijdstip  $t_i$  terugkomt van vakantie en  $\xi_i = m$  met  $m = 1, \dots, k$  als  $t_i$  het tijdstip is dat de bediening van de  $m$ -de klant in deze cycle klaar is. De toestand van het systeem verandert als de server van vakantie terugkomt, als er een klant aankomt of als er klant vertrekt. De toestand van het systeem verandert dan in respectievelijk  $\{N_i, 0\}$ ,  $\{N_i + 1, \xi_i\}$  of  $\{N_i - 1, \xi_i + 1\}$ .

We nemen  $p_{n,m} := \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_i = n, \xi_i = m)$  voor  $n = 0, 1, 2, \dots$  en  $m = 1, \dots, k$  en  $q_n := \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_i = n, \xi_i = 0)$  met  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Als het systeem stabiel is, dan voldoen deze limiet kansverdelingen voor  $n = 0, 1, 2, \dots$  aan de volgende vergelijkingen:

$$p_{n,1} = \sum_{i=1}^{n+1} g_{n-i+1} q_i \quad (24)$$

$$p_{n,m} = \sum_{i=1}^{n+1} g_{n-i+1} p_{i,m-1} \text{ voor } m = 2, \dots, k \quad (25)$$

$$q_n = h_n \left( \sum_{i=1}^{k-1} p_{0,i} + q_0 \right) + \sum_{j=0}^n h_{n-j} p_{j,k}. \quad (26)$$

Hierin is  $g_n$  de kans dat er tijdens een bediening  $n$  klanten aankomen en  $h_n$  is de kans dat er tijdens een vakantie  $n$  klanten aankomen. Met behulp van deze vergelijkingen kunnen we de kansgenererende functies bepalen van  $p_{n,m}$  voor  $m = 1, \dots, k$  en van  $q_n$ . De kansgenererende functies van  $p_{n,m}$  heeft de volgende vorm  $\tilde{P}_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,m} z^n$ . Vullen we hierin (25) in, dan geeft dat na omschrijven het volgende:

$$\tilde{P}_m(z) = \frac{1}{z} \tilde{G}(z) \left( \tilde{P}_{m-1}(z) - p_{0,m-1} \right). \quad (27)$$

De kansgenererende functie ziet er voor  $m = 1$  anders uit. Dit komt doordat  $p_{n,1}$  aan een andere vergelijking voldoet dan  $p_{n,m}$ , namelijk aan (24) in plaats van aan (25). Vullen we in  $\tilde{P}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,1} z^n$  vergelijking (24) in en schrijven we dit om, dan krijgen we:

$$\tilde{P}_1(z) = \frac{1}{z} \tilde{G}(z) \left( \tilde{Q}(z) - q_0 \right).$$

Om de kansgenererende functie van  $q_n$  te krijgen, moeten we (26) invullen in  $\tilde{Q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ . Dit geeft na omschrijven:

$$\tilde{Q}(z) = \tilde{H}(z) \left( \sum_{i=1}^{k-1} p_{0,i} + q_0 + \tilde{P}_k(z) \right). \quad (28)$$

Als we deze kansgenererende functies recursief oplossen, dan kunnen we ze schrijven in termen van  $p_{n,m}$ ,  $q_n$  en bekende termen. Omdat in de kansgenererende functie van  $q_n$  de kansgenererende functie van  $p_{n,k}$  staat, moeten we  $\tilde{P}_k(z)$  uitdrukken in  $\tilde{Q}(z)$ . Dit kunnen we ook voor algemene  $m$  doen. We moeten hiervoor de kansgenererende functies  $\tilde{P}_{m-1}(z)$  tot  $\tilde{P}_1(z)$  achter elkaar invullen in (27). We krijgen uiteindelijk:

$$\tilde{P}_m(z) = \left( \frac{\tilde{G}(z)}{z} \right)^m \left( \tilde{Q}(z) - q_0 \right) - \sum_{j=1}^{m-1} \left( \frac{\tilde{G}(z)}{z} \right)^{m-j} p_{0,j}.$$

Dit kunnen we voor  $m = k$  invullen in (28) waardoor we een vergelijking voor  $\tilde{Q}(z)$  krijgen. Lossen we deze vergelijking op dan geeft dat:

$$\tilde{Q}(z) = \frac{\tilde{H}(z) \left( \left( 1 - \left( \frac{\tilde{G}(z)}{z} \right)^k \right) q_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \left( 1 - \left( \frac{\tilde{G}(z)}{z} \right)^{k-i} \right) p_{0,i} \right)}{1 - \tilde{H}(z) \left( \frac{\tilde{G}(z)}{z} \right)^k}. \quad (29)$$

De termen die we nog niet weten zijn  $\tilde{G}(z)$  en  $\tilde{H}(z)$ , maar ook deze kunnen we omschrijven naar bekende termen. We weten dat het aankomstproces een Poisson proces is met intensiteit  $\lambda$ . Er geldt dus dat het aantal klanten dat aankomt in het interval  $(t, t + s)$ , Poisson verdeeld is met parameter  $\lambda s$ . Omdat  $g_n$  de kans is dat er tijdens een bediening  $n$  klanten aankomen, geldt voor  $g_n$  het volgende:

$$g_n = \int_0^{\infty} \frac{\lambda s}{n!} e^{-\lambda s} f_B(s) ds.$$

Voor de kansgenererende functie  $\tilde{G}(z)$  van  $g_n$  geldt er dus:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\lambda s}{n!} e^{-\lambda s} f_B(s) ds z^n \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z \lambda s}{n!} e^{-\lambda s} f_B(s) ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)s} f_B(s) ds \\ &= \tilde{B}(\lambda(1-z)). \end{aligned} \quad (30)$$

Op dezelfde manier kunnen we de kansgenererende functie van  $h_n$  bepalen. Er geldt namelijk dat  $h_n$  de kans is dat er  $n$  klanten aankomen tijdens een vakantie. We krijgen:

$$\tilde{H}(z) = \tilde{S}(\lambda(1-z)). \quad (31)$$

De Formules (30) en (31) kunnen we nu invullen in (29) en dan krijgen we:

$$\tilde{Q}(z) = \frac{\tilde{S}(\lambda(1-z)) \left( \left( 1 - \left( \frac{\tilde{B}(\lambda(1-z))}{z} \right)^k \right) q_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \left( 1 - \left( \frac{\tilde{B}(\lambda(1-z))}{z} \right)^{k-i} \right) p_{0,i} \right)}{1 - \tilde{S}(\lambda(1-z)) \left( \frac{\tilde{B}(\lambda(1-z))}{z} \right)^k}.$$

De enige onbekenden zijn nog de termen  $q_0$  en  $p_{0,m}$  voor  $m = 1, \dots, k-1$ . Maar deze kunnen we bepalen, eventueel numeriek, aan de hand van  $k$  vergelijkingen.

Er moet gelden dat de teller van  $\tilde{Q}(z)$  nul is voor de nulpunten van de noemer van  $\tilde{Q}(z)$  die binnen of op de eenheidscirkel liggen. Volgens Rouché's stelling zijn er precies  $k$  nulpunten binnen of in de eenheidscirkel. Dit levert  $k$  vergelijkingen op door elk van de nulpunten van de noemer in te vullen in de teller en dit gelijk te stellen aan nul. Nu geldt dat een van de nulpunten altijd één is en daardoor is één vergelijking altijd waar. We houden dan nog maar  $k-1$  vergelijkingen over. De laatste vergelijking volgt uit het feit dat de som van de kansen gelijk aan één moet zijn, oftewel uit de normalisatie. We weten dat als we  $z = 1$  invullen in de kansgenererende functie dat we dan de som van de kansen krijgen. De laatste vergelijking is dus gelijk aan:

$$\tilde{Q}(1) + \sum_{m=1}^k \tilde{P}_m(1) = 1.$$

Maar als we de limiet nemen van  $z$  naar 1 van  $Q(z)$  dan krijgen we  $\frac{0}{0}$  en dus moeten we L'Hôpital toepassen. We krijgen dan:

$$Q(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \tilde{Q}(z) = \frac{kq_0(\lambda\mathbb{E}[B] - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i)p_{0,i}(\lambda\mathbb{E}[B] - 1)}{\lambda\mathbb{E}[S] + k(\lambda\mathbb{E}[B] - 1)}.$$

En voor  $P_m(z)$  krijgen we als we 1 invullen de volgende uitdrukking:

$$\tilde{P}_m(1) = \tilde{Q}(1) - q_0 - \sum_{i=1}^{m-1} p_{0,i} = \frac{kq_0(\lambda\mathbb{E}[B] - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i)p_{0,i}(\lambda\mathbb{E}[B] - 1)}{\lambda\mathbb{E}[S] + k(\lambda\mathbb{E}[B] - 1)} - q_0 - \sum_{i=1}^{m-1} p_{0,i}.$$

Uit de  $k$  vergelijkingen kunnen de termen  $q_0$  en  $p_{0,m}$  voor  $m = 1, \dots, k-1$  bepaald worden, maar vaak lukt dit niet meer exact.

We hebben nu een uitdrukking voor het aantal klanten in het systeem bij een vakantieterugkomst en bij het vertrek van de  $m$ -de klant in deze cycle. Net als in Paragraaf 2.6 geldt dat het aantal klanten in het systeem op een willekeurig moment gelijk verdeeld is als het aantal klanten in het systeem op een vertrek moment. Voor de kansgenererende functie van het aantal klanten in het systeem op een willekeurig moment geldt dus:

$$\tilde{N}(z) = \frac{\sum_{m=1}^k \tilde{P}_m(z)}{1 - \tilde{Q}(1)}.$$

Hiermee kunnen we gemakkelijk de LST van de wachttijd bepalen met behulp van Little's law. Little's law voor verdelingen is namelijk gelijk aan  $\tilde{W}(s) = \frac{\tilde{N}(1 - \frac{s}{\lambda})}{\tilde{B}(s)}$  en hiermee krijgen we:

$$\tilde{W}(s) = \frac{\sum_{m=1}^k \tilde{P}_m(1 - \frac{s}{\lambda})}{\tilde{B}(s)(1 - \tilde{Q}(1))}.$$

Met behulp van deze LST van de wachttijd kunnen we de gemiddelde wachttijd bepalen. Zo geldt er  $\mathbb{E}[W^{(LST)}] = -\frac{\partial}{\partial s} \mathbb{E}[e^{-Ws}]|_{s=0}$ . In Hoofdstuk 5 zullen we aan de hand van deze gemiddelde wachttijden bepalen hoe goed de LT-HT interpolaties (20) en (23) de daadwerkelijke wachttijd benaderen.

## 4 Het $k$ -gelimiteerde vakantiemodel met algemene tussen-aankomsttijden

In dit hoofdstuk kijken we naar een veralgemenisering van het standaard  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel. We gaan uit van het standaard  $k$ -gelimiteerd vakantiemodel met bedieningstijden  $B$  en vakantietijden  $S$ , precies zoals beschreven is in Hoofdstuk 3. Het enige wat we veralgemeniseren zijn de tussenaankomsttijden  $A$ . In dit hoofdstuk hebben deze namelijk een algemene verdeling, in plaats van een Exponentiële verdeling.

Voor de aankomstintensiteit  $\lambda$  geldt dat deze voldoet aan  $\mathbb{E}[A] = \frac{1}{\lambda}$ . Er geldt dus dat de tussenaankomsttijden  $A$  afhankelijk zijn van  $\lambda$ . We definiëren weer  $\rho := \lambda\mathbb{E}[B]$  en  $u := \lambda\mathbb{E}[B] + \frac{\lambda\mathbb{E}[S]}{k}$ . Ook nu geldt weer dat  $\lambda_{max} = \frac{1}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}}$ .

Het systeem is stabiel als geldt dat het gemiddeld aantal klanten dat wordt bediend tijdens een cycle groter is dan het aantal klanten dat aankomt tijdens deze cycle. Tijdens een cycle worden er maximaal  $k$  klanten bediend en gemiddeld komen er  $\lambda\mathbb{E}[C] = \frac{\lambda\mathbb{E}[S]}{1-\lambda\mathbb{E}[B]}$  klanten aan. Omdat geldt dat  $\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[A]}$ , is de stabiliteitsconditie gelijk aan:

$$\frac{\mathbb{E}[S]}{\mathbb{E}[A](1 - \frac{1}{\mathbb{E}[A]}\mathbb{E}[B])} < k \iff \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} < \mathbb{E}[A].$$

Net als bij het standaard  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel, kan ook voor het algemenere geval geen expliciete, exacte uitdrukking gevonden worden voor de gemiddelde wachttijd en voor de gemiddelde rijlengte. Daarom zullen we in dit Hoofdstuk de LT-HT interpolaties van de wachttijd en de rijlengte voor dit model bepalen.

### 4.1 Light traffic

Voor dit veralgemeniseerde  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel kan de LT limiet voor de gemiddelde wachttijd niet exact bepaald worden. Daarom zullen we deze met behulp van de resultaten uit Paragraaf 3.1 benaderen. De LT limiet uit Paragraaf 3.1 hebben we gevonden met behulp van de Fuhrmann-Cooper decompositie (12). Om de LT limiet te bepalen bij algemene aankomsten zullen aannemen dat de Fuhrmann-Cooper decompositie ook geldt voor dit model. In formulevorm nemen we dus aan dat er geldt dat:

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[W^{(G/G/1)}] + \frac{\mathbb{E}[L^{(S)}]}{\lambda}. \quad (32)$$

De LT limiet van de de term  $\frac{\mathbb{E}[L^{(S)}]}{\lambda}$  blijft hetzelfde als in Paragraaf 3.1. Zo geldt er:

$$\frac{\mathbb{E}[L^{(S)}]}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \uparrow 0} \mathbb{E}[S_{res}] + O(\lambda^2). \quad (33)$$

Door de aanname dat de Fuhrmann-Cooper decompositie ook voor dit model geldt, hoeven we alleen nog de LT limiet te bepalen van  $\mathbb{E}[W^{(G/G/1)}]$ . In [2] wordt een benadering voor de LT limiet van de gemiddelde wachttijd in een  $G/G/1$  wachtrij bepaald. Deze bron geeft:

$$\mathbb{E}[W^{(G/G/1)(LT)}] \approx \begin{cases} \frac{cv_A^2}{cv_A^2+1} (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda + O(\lambda^2) & \text{als } cv_A^2 > 1 \\ \frac{1}{2} (cv_A^2)^4 (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda + O(\lambda^2) & \text{als } cv_A^2 \leq 1. \end{cases} \quad (34)$$

Hierin is  $cv_A^2$  de squared coëfficiënt of variation van de tussenaankomsttijden en er geldt dat  $cv_A^2 = \frac{\text{Var}(A)}{\mathbb{E}[A]^2}$ . Verder geldt deze formule voor  $k > 1$ . De LT limiet van  $\mathbb{E}[W^{(G/G/1)}]$  voor  $k = 1$  kan op dezelfde manier bepaald worden als de LT limiet van  $\mathbb{E}[W^{(M/G/1)}]$  voor  $k = 1$  in Paragraaf 3.1.

We kunnen nu in (32) de formules (33) en (34) invullen. Vervolgens kunnen we hierin de termen  $cv_A^2$  omschrijven, wat de volgende uitdrukking geeft:

$$\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \begin{cases} \mathbb{E}[S_{res}] + \frac{\text{Var}(A)}{\text{Var}(A) + \mathbb{E}[A]^2} (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda + O(\lambda^2) & \text{als } \text{Var}(A) > \mathbb{E}[A]^2 \\ \mathbb{E}[S_{res}] + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Var}(A)}{\mathbb{E}[A]^2} \right)^4 (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda + O(\lambda^2) & \text{als } \text{Var}(A) \leq \mathbb{E}[A]^2. \end{cases} \quad (35)$$

Als we voor de tussenaankomsttijden  $A$  de exponentiële verdeling met parameter  $\lambda$  nemen, dan zou deze LT limiet gelijk moeten zijn aan de LT limiet 15 uit Paragraaf 3.1. Onder deze aanname geldt dat  $\mathbb{E}[A] = \frac{1}{\lambda}$  en  $\text{Var}(A) = \frac{1}{\lambda^2}$ . Omdat  $\text{Var}(A) = \mathbb{E}[A]^2$ , moeten we de onderste vergelijking nemen. Na invullen krijgen we  $\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \mathbb{E}[S_{res}] + \frac{1}{2} (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda + O(\lambda^2)$ . Vergelijken we dit met de LT limiet (15) uit Paragraaf 3.1, dan zien we dat de benadering 35 uit dit Hoofdstuk exact gelijk hieraan is.

Om de LT limiet van de verwachte rijlengte te bepalen, maken we weer gebruik van Little's law. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L^{(LT)}] &= \lambda \mathbb{E}[W^{(LT)}] \\ &= \begin{cases} \mathbb{E}[S_{res}] \lambda + \frac{\text{Var}(A)}{\text{Var}(A) + \mathbb{E}[A]^2} (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda^2 + O(\lambda^3) & \text{als } \text{Var}(A) > \mathbb{E}[A]^2 \\ \mathbb{E}[S_{res}] \lambda + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Var}(A)}{\mathbb{E}[A]^2} \right)^4 (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda^2 + O(\lambda^3) & \text{als } \text{Var}(A) \leq \mathbb{E}[A]^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ook deze LT limiet is gelijk aan de LT limiet uit Paragraaf 3.1 als we voor de tussenaankomsttijden de exponentiële verdeling met parameter  $\lambda$  nemen. Hieruit volgt dus dat voor exponentiële tussenaankomsttijden de benaderingen voor de LT limieten exact zijn.

## 4.2 Heavy traffic

In [5] wordt de HT limiet voor het  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel met algemene aankomsten bepaald. Volgens deze bron geldt er:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{max}} (\lambda_{max} - \lambda) \mathbb{E}[W] = \frac{\text{Var}(A[\lambda_{max}]) + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k}}{2 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2}. \quad (36)$$

We schrijven in deze limiet  $\text{Var}(A[\lambda_{max}])$ , omdat  $A$  afhankelijk is van  $\lambda$ . De variantie van  $A$  moet dus bepaald worden onder HT, oftewel bepaald worden in  $\lambda_{max}$ .

Nemen we voor  $A$  de exponentiële verdeling met parameter  $\lambda$ , dan geldt dat  $\text{Var}(A[\lambda_{max}]) = \frac{1}{\lambda_{max}^2}$ .

We weten dat  $\lambda_{max} = \frac{1}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}}$  en daarom is de HT limiet onder deze aanname gelijk aan:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{max}} (\lambda_{max} - \lambda) \mathbb{E}[W] = \frac{\left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k}}{2 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2} = \frac{1}{2} + \frac{k^2 \text{Var}(B) + k \text{Var}(S)}{2 (k \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[S])^2}.$$

Dit is precies hetzelfde als de HT limiet (18) die we gevonden hebben in Paragraaf 3.2.

In paragraaf 3.2 hebben we gezien dat we de HT limiet van de gemiddelde rijlengte  $L$  gemakkelijk kunnen bepalen als we de HT limiet van de gemiddelde wachttijd weten. Zo hoeven we alleen maar Little's law toe te passen op (36). We krijgen dan:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{max}} (\lambda_{max} - \lambda) \mathbb{E}[L] &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{max}} \lambda (\lambda_{max} - \lambda) \mathbb{E}[W^{(HT)}] \\ &= \frac{\text{Var}(A[\lambda_{max}]) + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k}}{2 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^3}. \end{aligned}$$

In de volgende Paragraaf zullen we met behulp van onder andere deze HT limiet een benadering bepalen voor de gemiddelde wachttijd. Verder kunnen we ook de LT-HT interpolatie van de gemiddelde rijlengte met behulp van deze HT-limiet bepalen.

### 4.3 Interpolatie

Nu we zowel de LT limiet als de HT limiet bepaald hebben, kunnen we de LT-HT interpolatie bepalen. We nemen de approximatie van de volgende vorm:

$$\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = \frac{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}{\lambda_{max} - \lambda} = \frac{(c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2) \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)}.$$

Als  $\lambda$  naar nul convergeert, dan moet de approximatie naar de LT limiet (35) convergeren. Schrijven we in de approximatie de factor  $\frac{1}{\left(\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}\right)}$  uit in zijn machtreeks, dan krijgen we:

$$\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = c_0 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) + \left( c_0 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 + c_1 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) \right) \lambda + O(\lambda^2). \quad (37)$$

Als we dit vergelijken met (35), dan zien we dat er moet gelden dat  $c_0 = \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S] \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)}$ . Voordat we  $c_1$  kunnen bepalen, moeten we onderscheid maken tussen de twee gevallen. Om de LT-HT interpolatie toch in één keer te kunnen bepalen, definiëren we:

$$C(A) := \begin{cases} \frac{2\text{Var}(A)}{\text{Var}(A) + \mathbb{E}[A]^2} & \text{als } \text{Var}(A) > \mathbb{E}[A]^2 \\ \left( \frac{\text{Var}(A)}{\mathbb{E}[A]^2} \right)^4 & \text{als } \text{Var}(A) \leq \mathbb{E}[A]^2. \end{cases}$$

De LT limiet (35) kunnen we dankzij deze definitie omschrijven tot:

$$\mathbb{E}[W^{(LT)}] = \mathbb{E}[S_{res}] + \frac{1}{2}C(A) (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda + O(\lambda^2).$$

Als we nu (37) hiermee vergelijken, dan zien we dat  $c_1$  moet voldoen aan:

$$c_0 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 + c_1 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) = \frac{1}{2}C(A) (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2).$$

Lossen we hieruit  $c_1$  op, dan krijgen we  $c_1 = \frac{C(A) \text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2}{2 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)} - \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S]}$ .

Vervolgens kunnen we van de approximatie de HT limiet nemen, oftewel de limiet van  $\lambda$  naar  $\lambda_{max}$ . Dit geeft:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{max}} (\lambda_{max} - \lambda) \mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] = \frac{C(A) (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + 2c_2}{2 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2}.$$

Er moet gelden dat dit naar de HT limiet (36) convergeert. Vergelijken we beide HT limieten met elkaar dan zien we dat  $c_2$  moet voldoen aan:

$$\frac{C(A) (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) + 2c_2}{2 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2} = \frac{\text{Var}(A[\lambda_{max}]) + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k}}{2 \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2}.$$

Hieruit volgt dat  $c_2 = \frac{1}{2} \left( \text{Var}(A[\lambda_{max}]) + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k} - C(A) (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \right)$ . De approximatie is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] &= \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{1}{2}\lambda C(A) (\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2} \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) \left( \text{Var}(A[\lambda_{max}]) + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k} \right) \lambda^2}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)}. \end{aligned}$$

We kunnen  $C(A)$  weer uitschrijven, zodat we approximatie in bekende termen krijgen. Als uiteindelijke LT-HT interpolatie krijgen we dan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] &= \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{\frac{1}{2} \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) \left( \text{Var}(A[\lambda_{max}]) + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k} \right) \lambda^2}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda \left( \text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2 \right) \cdot \begin{cases} \frac{2\text{Var}(A)}{\text{Var}(A) + \mathbb{E}[A]^2} & \text{als } \text{Var}(A) > \mathbb{E}[A]^2 \\ \left( \frac{\text{Var}(A)}{\mathbb{E}[A]^2} \right)^4 & \text{als } \text{Var}(A) \leq \mathbb{E}[A]^2. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

We kijken we weer naar het geval waarbij  $A$  exponentieel verdeeld is met parameter  $\lambda$ . De resultaten zullen we vergelijken met de LT-HT interpolatie uit Paragraaf 3.3. Als  $A$  exponentieel verdeeld is, dan weten we dat  $\mathbb{E}[A] = \frac{1}{\lambda}$  en  $\text{Var}(A) = \frac{1}{\lambda^2}$ . Dit kunnen we invullen in (38) en we krijgen dan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] &= \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{\frac{1}{2} \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) \left( \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k} \right) \lambda^2}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda \left( \text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2 \right). \end{aligned}$$

Vergelijken we dit nu met de LT-HT interpolatie (20), dan zien we dat deze precies hetzelfde zijn. Voor exponentieel verdeelde tussenaankomsttijden is (38) dus exact.

Ook voor de rijlengte  $L$  hebben we de LT en HT limiet bepaald. We kunnen de LT-HT interpolatie dus aan de hand van deze twee limieten bepalen. Maar het is gemakkelijker om deze interpolatie te bepalen met behulp van Little's law. Dit geeft:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L^{(approx)}(\lambda)] &= \frac{\lambda \left( \text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2 \right)}{2\mathbb{E}[S]} + \frac{\frac{1}{2} \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right) \left( \text{Var}(A[\lambda_{max}]) + \text{Var}(B) + \frac{\text{Var}(S)}{k} \right) \lambda^3}{1 - \lambda \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 \left( \text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2 \right) \cdot \begin{cases} \frac{2\text{Var}(A)}{\text{Var}(A) + \mathbb{E}[A]^2} & \text{als } \text{Var}(A) > \mathbb{E}[A]^2 \\ \left( \frac{\text{Var}(A)}{\mathbb{E}[A]^2} \right)^4 & \text{als } \text{Var}(A) \leq \mathbb{E}[A]^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Als we aannemen dat de tussenaankomsttijden  $A$  exponentieel verdeeld zijn en de resultaten vergelijken met de LT-HT interpolatie voor de gemiddelde rijlengte (20) uit Paragraaf 3.3, dan zien we dat de interpolatie uit deze paragraaf precies gelijk hieraan is. We kunnen dus concluderen dat deze LT-HT interpolatie voor de gemiddelde rijlengte exact is voor exponentieel verdeelde tussenaankomsttijden.

## 5 Resultaten

In de voorafgaande hoofdstukken hebben we met behulp van de LT- en HT limieten de gemiddelde wachttijd geïnterpoleerd. In dit hoofdstuk zullen we onderzoeken hoe goed deze LT-HT interpolaties de daadwerkelijke gemiddelde wachttijd benaderen. Allereerst zullen we dit in Paragraaf 5.1 doen voor het  $k$ -gelimiteerd vakantiemodel waarbij het aankomstproces een Poisson proces is. Vervolgens kijken we in Paragraaf 5.2 naar de LT-HT interpolatie bij algemene aankomsten.

### 5.1 Poisson aankomsten

In Hoofdstuk 3 hebben we gekeken naar het  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel waarbij het aankomstproces een Poisson proces is. Voor dit model hebben twee verschillende LT-HT interpolaties bepaald, een van de tweede orde (20) en een van de eerste orde (23). De resultaten van beide interpolaties zullen we vergelijken met de resultaten die we bepalen aan de hand van de LST en met de resultaten uit Tedijanto [5].

#### 5.1.1 Vergelijken met LST

In Paragraaf 3.6 hebben we een manier gevonden om de Laplace Stieltjes getransformeerde (LST) van de wachttijd te kunnen bepalen. Met behulp van deze LST kunnen we een uitdrukking vinden voor de gemiddelde wachttijd. We weten namelijk dat als we de afgeleide nemen van de LST en hierin vervolgens nul invullen, dat we dan min de verwachtingswaarde krijgen. In formulevorm:

$$\mathbb{E}[W^{(LST)}] = - \left. \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{E}[e^{-Ws}] \right|_{s=0}.$$

Het bepalen van de LST kan in Mathematica vrijwel geheel exact gedaan worden. We bepalen alleen de nulpunten van de noemer van  $\tilde{Q}(z)$  en termen  $q_0$  en  $p_{0,m}$  voor  $m = 1, \dots, k-1$  numeriek. Maar dit kan in Mathematica zeer nauwkeurig gedaan worden. Daarom zullen we de gemiddelde wachttijden die we bepalen met behulp van de LST zien als de ‘echte’ waarden.

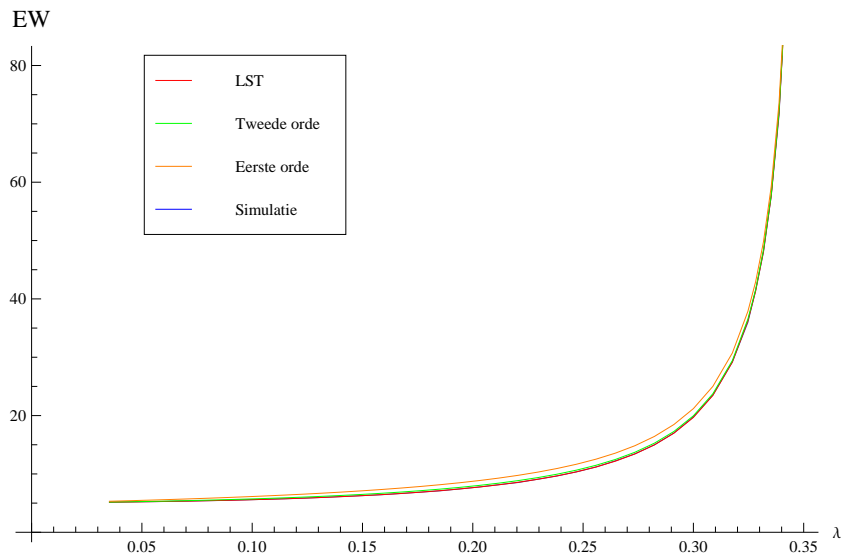
Om te kijken hoe nauwkeurig de Formules (20) en (23) de daadwerkelijke gemiddelde wachttijd benaderen, beschouwen we drie verschillende kansverdelingen voor de bedieningstijd en vakantietijd, namelijk de exponentiële, de Erlang en de Chi-kwadraat verdeling. Voor de bedieningstijd nemen we de parameters gelijk aan respectievelijk  $\frac{1}{2}$ , (4, 2) en 2. Voor de vakantietijd kiezen we de parameter bij de exponentiële verdeling gelijk aan  $\frac{1}{5}$ , bij de Chi-kwadraat gelijk aan 5 en bij de Erlang verdeling nemen we als parameters 5 en 2. We hebben de parameters dus zodanig gekozen dat bij alle verdeling geldt dat  $\mathbb{E}[B] = 2$  en  $\mathbb{E}[S] = 5$ . Verder nemen we twee waarden voor  $k$ : 2 en 6. Daarnaast bepalen de gemiddelde wachttijden bij de volgende waarden van  $\lambda$ :

$$\lambda = \{100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300, \dots, 900, 920, 930, 940, 950, 960, 970, 980, 990\} \cdot \frac{\lambda_{max}}{1000}.$$

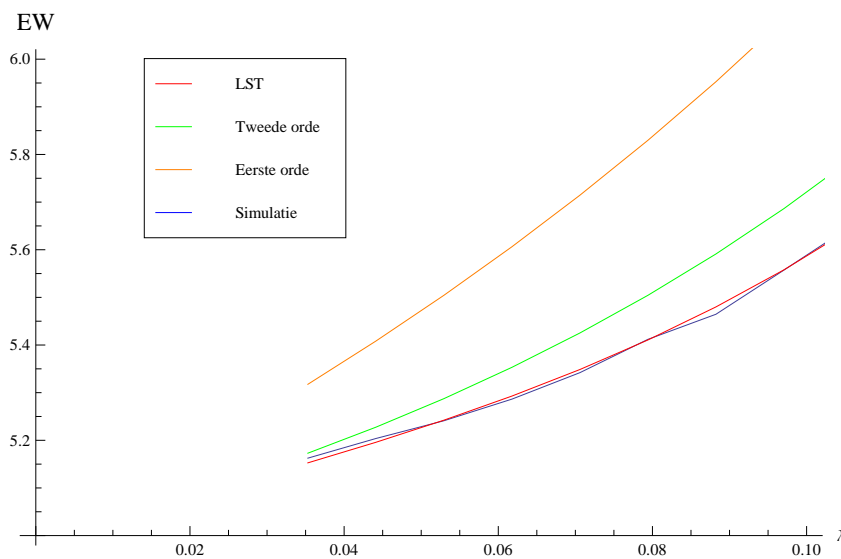
Allereerst kijken we naar de gevallen waarbij de bedieningstijd en de vakantietijd dezelfde verdeling hebben. De gemiddelde wachttijden bij de verschillende waarden van  $\lambda$  hebben we in een grafiek gezet. In Figuur 1 is de grafiek te zien bij exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k = 6$ . Hierin is de groene lijn bepaald met de interpolatie van de tweede orde (20), de oranje met de interpolatie van de eerste orde (23) en de rode met de LST. De blauwe lijn is bepaald aan de hand van een simulatie (zie Paragraaf 5.2). Maar vaak is deze blauwe lijn niet te zien, omdat deze (gedeeltelijk) wegvalt achter de rode lijn.

We zien in Figuur 1 dat bij zeer lage waarden van  $\lambda$  en bij zeer hoge waarden van  $\lambda$  de grafieken van beide interpolatie vrijwel geheel samenvallen met de rode lijn van de LST. Om een beter beeld te krijgen, hebben we de grafiek ingezoomd op  $\lambda \in (0.00; 0.1)$  (zie Figuur 2) en op  $\lambda \in (0.30; 0.35)$  (zie Figuur 3). In Figuur 2 is goed te zien dat de grafieken toch niet samenvallen. Maar we zien wel dat de grafieken dichter naar elkaar toe gaan als  $\lambda$  naar nul gaat. Ook zien we dat de groene lijn dichter bij de rode lijn ligt dan de oranje lijn. Voor kleine waarden van  $\lambda$  is de tweede orde interpolatie dus beter dan de eerste orde interpolatie.





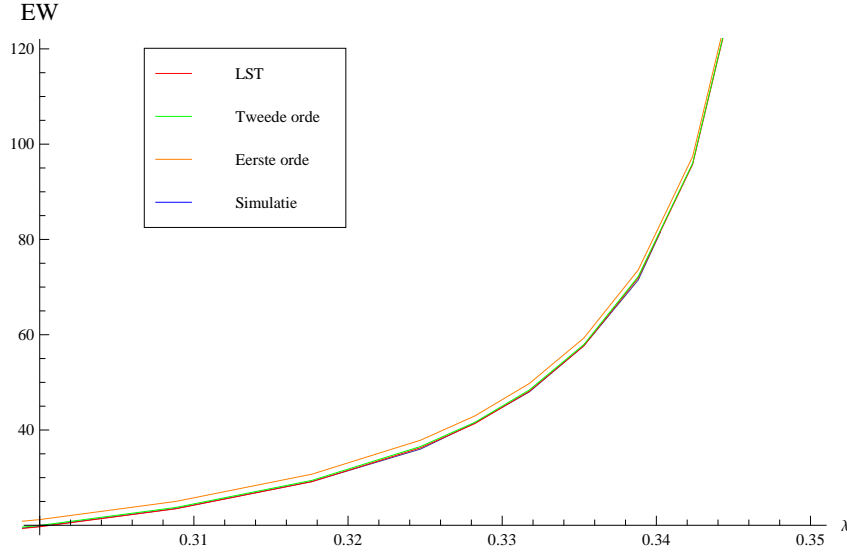
Figuur 1: De gemiddelde wachttijden bij exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .



Figuur 2: De gemiddelde wachttijden bij  $\lambda \in (0.03; 0.1)$ .

In Figuur 3 is minder goed te zien dat de grafieken niet samenvallen. Dit komt omdat hier de waarden van de gemiddelde wachttijd tussen de 20 en de 120 liggen. Wel zien we hier dat de grafieken dichter naar elkaar toe gaan als  $\lambda$  naar  $\lambda_{max}$  gaat en dat de groene grafiek dicht bij de rode ligt dan de oranje.

Het is logisch dat interpolaties zeer nauwkeurig zijn voor kleine waarden en voor grote waarden van  $\lambda$ , omdat we beide interpolaties bepaald hebben aan de hand van de LT limiet en HT limiet. In Figuur 1 kunnen we verder zien dat voor de waarden van  $\lambda$  tussen ongeveer 0.1 en 0.3 de oranje grafiek boven de rode grafiek ligt. Ook de groene lijn ligt boven de rode, maar wel een stuk minder ver dan de oranje. In dit deel van de grafiek is de tweede orde interpolatie dus ook beter dan de eerste interpolatie.



Figuur 3: De gemiddelde wachttijden bij  $\lambda \in (0.30; 0.35)$ .

De grafieken van de andere modellen staan in Appendix A. In al deze grafieken is te zien dat beide interpolaties het goed doen voor zeer kleine en zeer grote waarden van  $\lambda$ . Verder zien we in de Figuren 9 en 11 dat voor  $\lambda$  tussen ongeveer 0.1 en 0.3 de oranje grafiek boven de groene ligt en de groene grafiek weer boven rode. Dus voor de modellen waarbij  $k = 6$  is de interpolatie van de tweede orde beter dan de interpolatie van de eerste orde. Kijken we naar de grafieken van de modellen waarbij  $k = 2$ , in de Figuren 7, 8 en 10, dan zien we dat voor  $\lambda$  tussen ongeveer 0.1 en ongeveer 0.2 de oranje lijn weer boven de rode ligt, maar dat de groene lijn onder de rode lijn ligt. Hierdoor is het lastig te zien welke interpolatie beter is. Om hier meer over te kunnen zeggen, bepalen we de gemiddelde en maximale relatieve fout ten opzichte van de resultaten die we bepaald hebben met de LST. De relatieve fout per  $\lambda$  berekenen we als volgt:

$$RelFout(\lambda) = \frac{|\mathbb{E}[W^{(approx)}(\lambda)] - \mathbb{E}[W^{(LST)}(\lambda)]|}{\mathbb{E}[W^{(LST)}(\lambda)]}.$$

Vervolgens nemen we hiervan het gemiddelde over alle  $\lambda$  en bepalen we de maximale waarde. In Tabel 1 staan deze gemiddelde en maximale relatieve fouten voor elk model. Kijken we naar de

		Exponentieel		Erlang		$\mathcal{X}^2$	
		$k = 2$	$k = 6$	$k = 2$	$k = 6$	$k = 2$	$k = 6$
2 <sup>e</sup> orde	gemiddeld	0.067053	0.020461	0.054680	0.048009	0.057300	0.034904
	max	0.110115	0.036638	0.091246	0.086433	0.094890	0.061410
1 <sup>e</sup> orde	gemiddeld	0.056949	0.089244	0.078699	0.116053	0.066932	0.098219
	max	0.089477	0.143135	0.123990	0.192816	0.105854	0.160529

Tabel 1: De gemiddelde en maximale relatieve fouten t.o.v de resultaten bepaald met LST.

gemiddelde relatieve fouten bij  $k = 6$ , dan zien we ook hier duidelijk dat de tweede orde interpolatie beter is. Bij  $k = 2$  verschillen de relatieve fouten niet veel tussen beide interpolaties. Ook is te zien dat de tweede orde interpolatie niet altijd beter is dan de eerste orde interpolatie. Verder zien we dat de maximale relatieve fouten bij de tweede orde interpolatie kleiner zijn dan bij de eerste orde interpolatie, met uitzondering van het model met  $k = 2$  en exponentiële bedienings-

en vakantietijden. Maar de verschillen zijn bij  $k = 6$  wel groter dan bij  $k = 2$ . We kunnen concluderen dat de tweede orde de ‘echte’ gemiddelde wachttijd goed benadert met een maximale relatieve fout van 11%. Ook de eerste orde benadert de daadwerkelijke wachttijd redelijk goed. Alleen is hier over het algemeen de relatieve fout iets hoger, met een maximum van 20%. Wel zijn beide interpolaties voor een paar waarden van  $\lambda$  een stuk minder goed dan voor de overige waarden van  $\lambda$ .

Verder willen we ook nog kijken of de gekozen verdelingen van invloed zijn. Daarom bepalen we de gemiddelde en maximale relatieve fouten bij modellen waarbij de vakantietijd en bedieningstijd een verschillende verdeling hebben. Deze fouten staan voor  $k = 2$  in Tabel 2 en voor  $k = 6$  in Tabel 3.

		$S \sim \text{Exp}$		$S \sim \text{Erlang}$		$S \sim \mathcal{X}^2$	
		$B \sim \text{Erlang}$	$B \sim \mathcal{X}^2$	$B \sim \text{Exp}$	$B \sim \mathcal{X}^2$	$B \sim \text{Exp}$	$B \sim \text{Erlang}$
2 <sup>e</sup> orde	gemiddeld	0.070036	0.067053	0.051280	0.051280	0.057300	0.060589
	max	0.115335	0.110115	0.085206	0.085206	0.094890	0.100714
1 <sup>e</sup> orde	gemiddeld	0.059552	0.056949	0.072996	0.072996	0.066932	0.071174
	max	0.092893	0.089477	0.115981	0.115981	0.105854	0.111659

Tabel 2: De gemiddelde en maximale relatieve fouten t.o.v de resultaten bepaald met LST bij  $k = 2$ .

		$S \sim \text{Exp}$		$S \sim \text{Erlang}$		$S \sim \mathcal{X}^2$	
		$B \sim \text{Erlang}$	$B \sim \mathcal{X}^2$	$B \sim \text{Exp}$	$B \sim \mathcal{X}^2$	$B \sim \text{Exp}$	$B \sim \text{Erlang}$
2 <sup>e</sup> orde	gemiddeld	0.021571	0.020461	0.042932	0.042932	0.034904	0.038255
	max	0.038358	0.036638	0.076076	0.076076	0.061410	0.067796
1 <sup>e</sup> orde	gemiddeld	0.097268	0.089244	0.101833	0.101833	0.098219	0.109897
	max	0.155607	0.143135	0.167879	0.167879	0.160529	0.180195

Tabel 3: De gemiddelde en maximale relatieve fouten t.o.v de resultaten bepaald met LST bij  $k = 6$ .

We zullen eerst de invloed van de bedieningstijden bepalen. Hiervoor vergelijken we de gemiddelde en maximale relatieve fouten van modellen waarbij de vakantietijden hetzelfde verdeeld zijn en waarbij ook de waarde van  $k$  hetzelfde is. Wat we zien is dat voor elke verdeling van  $S$  en voor elke waarde van  $k$  de relatieve fouten ongeveer hetzelfde zijn bij de verschillende verdelingen van  $B$ . Bij sommige verdelingen zijn de waarden zelfs precies hetzelfde tot minstens zes decimalen. Hetzelfde geldt voor de maximale relatieve fout. We kunnen concluderen dat de verdeling van de bedieningstijd niet van invloed is op de kwaliteit van de interpolaties.

Hetzelfde kunnen we doen om de invloed van de vakantietijden te bepalen. We vergelijken dan de gemiddelde relatieve fouten van modellen waarbij de bedieningstijden dezelfde verdeling hebben en waarbij  $k$  hetzelfde is. We zien dat er toch verschillen zijn tussen de relatieve fouten, vaak tussen de 0.01 en 0.02. Tussen de maximale relatieve fouten zien we dezelfde verschillen. De verdeling van de vakantietijd is van invloed op de kwaliteit van de interpolaties. Wel is deze invloed niet heel groot en zijn de waarden bij elk model erg klein.

Als laatste willen we nog de invloed van  $k$  bepalen op de kwaliteit van de interpolaties. Om deze invloed te testen vergelijken we de relatieve fouten van modellen waarbij zowel de bedieningstijd als de vakantietijd exponentieel verdeeld zijn. De gemiddelde en maximale relatieve fouten per model staan in Tabel 4.

Kijken we naar de gemiddelde relatieve fouten van de tweede orde interpolatie, dan zien we dat voor  $k = 2$  de waarde vrij groot is ten opzichte van de overige relatieve fouten. Verder zien we dat

		$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
2 <sup>e</sup> orde	gem	0.067053	0.026707	0.008379	0.010901	0.020461	0.027205	0.032025
	max	0.110115	0.050004	0.016006	0.022979	0.036638	0.047861	0.056704
1 <sup>e</sup> orde	gem	0.056949	0.076771	0.084943	0.088262	0.089244	0.089008	0.088109
	max	0.089477	0.120187	0.133655	0.140158	0.143135	0.144184	0.144154

Tabel 4: De gemiddelde en maximale relatieve fouten bij verschillende waarden van  $k$ .

de gemiddelde relatieve fout het kleinst is voor  $k = 4$  en dat deze toeneemt naarmate  $k$  toeneemt. De relatieve fout is voor de eerste orde interpolatie juist het kleinst bij  $k = 2$  en nemen de fouten toe als  $k$  toeneemt tot 5. Daarna blijven de waarden rond 0.088 schommelen. Kijken we naar de maximale relatieve fouten, dan zien we dezelfde patronen als bij de gemiddelde relatieve fouten. We kunnen dus concluderen dat de grootte van  $k$  van invloed is op de kwaliteit van de tweede orde interpolatie. Bij de eerste orde interpolatie is  $k$  alleen van invloed tot  $k = 5$ , daarna heeft  $k$  vrijwel geen invloed meer op de kwaliteit van de eerste orde interpolatie.

Bekijken we alle relatieve fouten uit deze paragraaf, dan zien we dat deze voor de tweede orde interpolatie maximaal 0.116 zijn en voor de eerste orde interpolatie maximaal 0.193 zijn. We kunnen dus concluderen dat de tweede orde interpolatie de daadwerkelijke wachttijd vrij goed benadert. De eerste orde interpolatie doet het ook redelijk goed, maar wel minder goed dan de tweede orde interpolatie.

Verder moeten we nog opmerken dat we dat we in Mathematica de gemiddelde wachttijd niet kunnen bepalen met behulp van de LST als we voor de bedieningstijd of vakantietijd de uniforme verdeling kiezen. In deze gevallen kan Mathematica namelijk de nulpunten van de noemer van  $\tilde{Q}(z)$  niet exact bepalen. Er moet dus gezocht worden naar een numerieke methode die deze nulpunten zeer nauwkeurig kan bepalen.

### 5.1.2 Vergelijken met Tedijanto

In [5] is ook een tweede orde interpolatie voor de gemiddelde wachttijd bepaald. In deze bron is de approximatie gelijk aan:

$$\mathbb{E}[W^{(Tedijanto)}(\lambda)] = \frac{\left( \left( \mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k} \right)^2 - \mathbb{E}[B]^2 + \frac{\text{Var}(S)}{k} \right) \lambda^2 + \frac{(\text{Var}(B) + \mathbb{E}[B]^2) \lambda}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}}}{2 \left( \frac{1}{\mathbb{E}[B] + \frac{\mathbb{E}[S]}{k}} - \lambda \right)} + \frac{\text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2}{2\mathbb{E}[S]}.$$

Deze approximatie kunnen we zodanig omschrijven dat we precies onze LT-HT interpolatie (20) krijgen. Beide interpolaties zijn dus precies hetzelfde en benaderen de gemiddelde wachttijd even goed.

## 5.2 Algemene aankomsten

In Hoofdstuk 4 hebben gekeken naar het  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel met algemene tussenaankomsttijden. Voor dit model hebben we met behulp van de LT en HT limiet de gemiddelde wachttijd benadert. De resultaten van deze interpolatie (38) zullen we weer willen vergelijken om te bepalen hoe goed de interpolatie de daadwerkelijke wachttijd benadert. Voor dit algemenere geval weten we niet hoe we de LST van de wachttijd moeten bepalen en daarom kunnen we de resultaten niet vergelijken met de resultaten die bepaald worden met behulp van de LST. Verder kunnen we resultaten ook niet vergelijken met resultaten uit [5], omdat in deze bron alleen resultaten bepaald worden voor modellen met exponentiële tussenaankomsttijden. Wel kunnen we resultaten bepalen aan de hand van simulatie. Deze simulatieresultaten benaderen de ‘echte’ gemiddelde wachttijd zeer goed en daarom kunnen we deze simulatieresultaten goed gebruiken

om de kwaliteit van de interpolatie te bepalen. Bij de bepaling van de gemiddelde wachttijd met behulp van simulatie, voeren we 20 keer de simulatie met simulatielengte 1000000 uit.

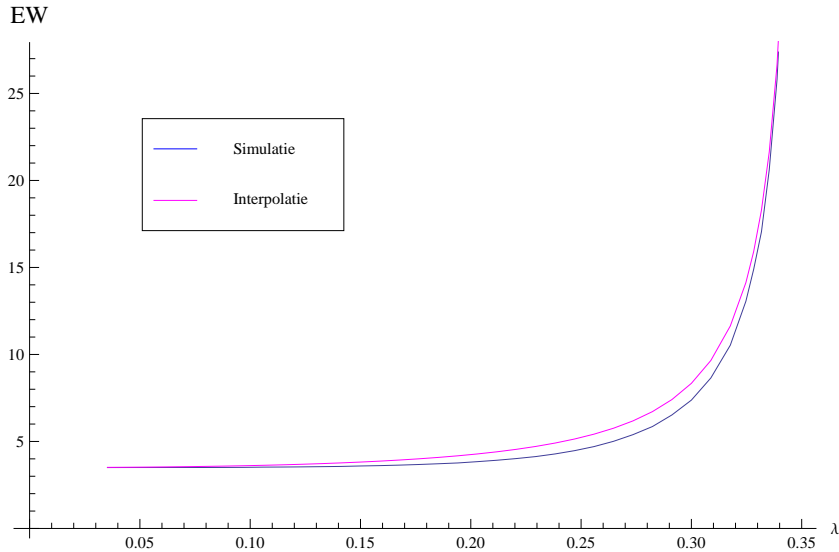
Om te kijken hoe nauwkeurig de Formule (38) de daadwerkelijke gemiddelde wachttijd benadert, beschouwen we drie verschillende kansverdelingen voor de tussenaankomsttijd, namelijk de Erlang, de uniforme en de Chi-kwadraat verdeling. Voor alle drie de verdelingen moet gelden dat  $\mathbb{E}[A] = \frac{1}{\lambda}$  en daarom kiezen we als parameters respectievelijk  $(2, 2\lambda)$ ,  $(\frac{9}{10\lambda}, \frac{11}{10\lambda})$  en  $\frac{1}{\lambda}$ . Wij hebben niet voor de exponentiële verdeling gekozen, omdat in dat geval de interpolatie hetzelfde is als de interpolatie bij Poisson aankomsten (20) en dus al vergeleken is in Paragraaf 5.1.1.

Bij iedere verdeling van  $A$  nemen we drie verdelingen voor de bedieningstijd en vakantietijd, de exponentiële, de Erlang en de Chi-kwadraat. De parameters kiezen we hetzelfde als in Paragraaf 5.1.1. De parameters bij de bedieningstijd zijn dus respectievelijk  $\frac{1}{2}$ ,  $(4, 2)$  en  $2$  en voor de vakantietijd kiezen we de parameter gelijk aan respectievelijk  $\frac{1}{5}$ ,  $(5, 2)$  en  $5$ . Bij iedere verdeling geldt nu dat  $\mathbb{E}[B] = 2$  en  $\mathbb{E}[S] = 5$ . Verder nemen we voor  $k$  de waarden  $2$  en  $6$ .

Voor alle modellen bepalen we de gemiddelde wachttijd bij de volgende waarden van  $\lambda$ :

$$\lambda = \{100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300, \dots, 900, 920, 930, 940, 950, 960, 970, 980, 990\} \cdot \frac{\lambda_{max}}{1000}.$$

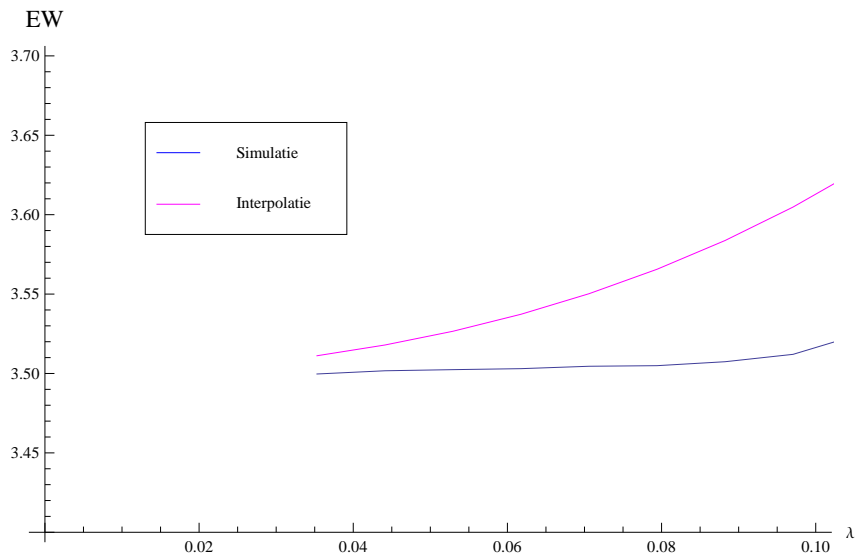
We zullen eerst kijken naar de modellen waarbij de bedieningstijd en vakantietijd dezelfde verdeling hebben. Voor deze modellen hebben we de gemiddelde wachttijden bij de verschillende waarden van  $\lambda$  in een grafiek gezet. De grafiek bij uniforme tussenaankomsttijden, Chi-kwadraat bedienings- en vakantietijden en  $k = 6$  is te zien in Figuur 4. De grafieken van de overige modellen staan in Appendix B. In deze grafieken is de blauwe lijn de grafiek van de gemiddelde wachttijden bepaald met simulatie en de roze lijn is bepaald met behulp van de interpolatie.



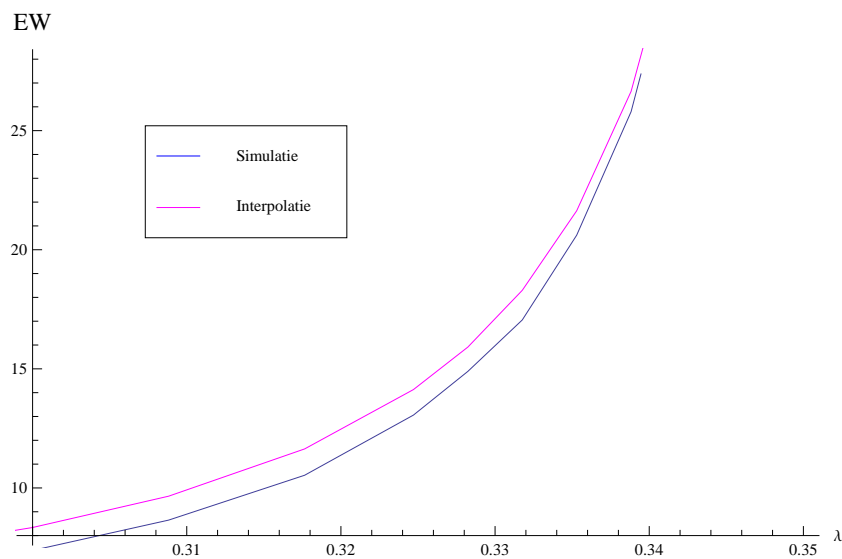
Figuur 4: De gemiddelde wachttijden bij uniforme tussenaankomsttijden, Chi-kwadraat bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .

We zien in Figuur 4 dat voor zeer kleine waarden van  $\lambda$  en voor zeer grote waarden van  $\lambda$  de roze lijn vrijwel geheel samenvalt met de blauwe lijn. Maar net als in Paragraaf 5.1.1 hoeft dit zo te zijn als er verder wordt ingezoomd. We hebben de grafiek ingezoomd op  $\lambda \in (0; 0.10)$  (zie Figuur 5) en op  $\lambda \in (0.30; 0.35)$  (zie Figuur 6).

In Figuur 5 zien we dat de grafieken toch niet samenvallen voor zeer kleine waarden van  $\lambda$ . Wel zien we dat de grafiek dichter naar elkaar toe gaan naarmate  $\lambda$  kleiner wordt. In Figuur 6 is goed te zien dat voor grote waarden van  $\lambda$  de grafieken ook niet samenvallen. Wel lijkt het zo dat hier de verschillen tussen beide grafieken minder groot is dan bij kleine waarden van  $\lambda$ . Dat komt



Figuur 5: De gemiddelde wachttijden bij  $\lambda \in (0.03; 0.10)$ .



Figuur 6: De gemiddelde wachttijden bij  $\lambda \in (0.30; 0.35)$ .

omdat voor grote waarden van  $\lambda$  de gemiddelde wachttijden tussen de 8 en de 28 liggen, terwijl de wachttijden bij kleine waarden van  $\lambda$  tussen de 3.4 en de 3.7 liggen. Verder zien we dat als  $\lambda$  groter wordt, dat de roze lijn steeds dichterbij de blauwe lijn komt te liggen.

Het is logisch dat voor kleine en voor grote waarden van  $\lambda$  de roze grafiek dichtbij de blauwe ligt. We hebben namelijk de interpolatie bepaald met behulp van (benaderingen van) de LT en HT limiet.

Bekijken we weer Figuur 21, dan zien we dat voor  $\lambda$  tussen ongeveer 0.12 en 0.32 de roze grafiek een stuk hoger ligt dan de blauwe grafiek. Het lijkt er dus op dat voor deze waarden van  $\lambda$  de interpolatie het niet heel goed doet. We kunnen onze conclusies niet baseren op de grafiek van maar een model en daarom bekijken we ook nog even de grafieken van de overige modellen staan.

In de grafieken bij Erlang tussenaankomsttijden in Appendix B.1 zien we dat bij het model met exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k = 2$  en bij het model met Erlang bedienings- en vakantietijden en  $k = 6$ , de roze lijn iets van de blauwe af ligt voor de middelste waarden van  $\lambda$ . Bij de overige modellen ligt de roze lijn vrijwel geheel over de blauwe heen. Kijken we naar de grafieken bij uniforme tussenaankomsttijden in Appendix B.2, dan zien we dat de roze lijn in alle grafieken iets van de blauwe af ligt voor de middelste waarden van  $\lambda$ . Verder zien de grafieken bij Erlang bedienings- en vakantietijden er anders uit dan alle andere grafieken. Dit komt doordat hier de gemiddelde wachttijden maar maximaal 8 zijn, terwijl deze maximale waarde bij de overige grafieken minstens 25 is. Als laatste kijken we nog naar de grafieken in Appendix B.3 waarbij de tussenaankomsttijden Chi-kwadraat verdeeld zijn. De roze lijn ligt in al deze grafieken een klein stukje af van de blauwe lijn voor de middelste waarden van  $\lambda$ . Deze afstand het grootst is bij Erlang bedieningstijden en vakantietijden.

Over het algemeen benadert de interpolatie de gemiddelde wachttijd dus redelijk goed. Om er meer theoretisch iets over te kunnen zeggen, bepalen we voor ieder model de gemiddelde en maximale relatieve fout. Deze gemiddelden staan samen met de maximale gemiddelde fout in Tabel 5.

		Exponentieel		Erlang		$\mathcal{X}^2$	
		$k = 2$	$k = 6$	$k = 2$	$k = 6$	$k = 2$	$k = 6$
$A \sim \text{Erlang}$	gemiddeld	0.033322	0.011962	0.010671	0.054275	0.017840	0.020504
	max	0.067943	0.040764	0.021648	0.112818	0.055746	0.127184
$A \sim \text{uniform}$	gemiddeld	0.038690	0.058667	0.073886	0.087966	0.072347	0.076972
	max	0.075587	0.109388	0.170881	0.227053	0.135209	0.151883
$A \sim \mathcal{X}^2$	gemiddeld	0.032567	0.047170	0.100913	0.110168	0.066216	0.064907
	max	0.074500	0.083314	0.200555	0.226632	0.121763	0.119993

Tabel 5: De gemiddelde en maximale relatieve fouten t.o.v de simulatieresultaten.

Kijken we naar de gemiddelde relatieve fouten bij Erlang tussenaankomsttijden, dan zien we dat deze bij Erlang bedienings- en vakantietijden en  $k = 6$  hoog is ten opzichte van waarden bij de overige modellen. Ook de maximale relatieve fout is bij dit model erg hoog. Maar bij Chi-kwadraat bedienings- en vakantietijden en  $k = 6$  is de maximale waarde het hoogst, terwijl hier de gemiddelde relatieve fout erg klein is. Dat wil dus zeggen dat de interpolatie de gemiddelde wachttijd voor een paar waarden van  $\lambda$  vrij slecht benadert en voor het grote deel van de  $\lambda$ 's erg goed. Voor de overige modellen geldt hetzelfde alleen zijn de verschillen minder groot. Over het algemeen benadert de interpolatie de daadwerkelijke gemiddelde wachttijd vrij goed.

De gemiddelde relatieve fouten zijn bij uniforme tussenaankomsttijden vrij hoog ten opzichte van de modellen bij Erlang tussenaankomsttijden. Hetzelfde geldt voor de waarden bij modellen met  $A \sim \mathcal{X}^2$ . Ook de maximale relatieve fouten zijn voor deze twee verdelingen van  $A$  vrij groot. De maximale relatieve fouten bij Erlang bedienings- en vakantietijden zijn zelfs hoger dan 0.17. Bij exponentiële bedienings- en vakantietijden zijn de gemiddelde en maximale relatieve fouten een stuk lager. Deze liggen dan ook dicht in de buurt van de waarden van de modellen bij Erlang tussenaankomsttijden. Maar op een paar uitzondering na liggen alle gemiddelde relatieve fouten onder de 0.08, wat dus betekent dat de interpolatie de gemiddelde wachttijd redelijk goed benadert waarbij deze benadering voor sommige waarden van  $\lambda$  minder goed is dan voor andere waarden van  $\lambda$ .

Verder kunnen we concluderen dat de kwaliteit van de interpolatie afhankelijk is van de verdeling van de tussenaankomsttijden. Zo benadert de interpolatie de gemiddelde fout beter bij Erlang tussenaankomsttijden dan bij uniforme tussenaankomsttijden. Daarnaast kunnen we in Tabel 5 zien dat er ook verschillen zijn tussen de relatieve fouten bij verschillende verdelingen van de bedienings- en vakantietijden. Zo benadert de interpolatie de gemiddelde wachttijd minder goed als de bedienings- en vakantietijden Erlang verdeeld zijn.

Vervolgens willen we ook nog bepalen of de waarde van  $k$  van invloed is de kwaliteit van de

interpolatie. We bepalen nu de gemiddelde en maximale relatieve fouten van modellen waarbij zowel de bedieningstijd als de vakantietijd exponentieel verdeeld zijn. Deze relatieve fouten staan in Tabel 6.

		$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Erlang	gem	0.033322	0.0164574	0.010683	0.012511	0.011962	0.014585	0.017466
	max	0.067943	0.039632	0.080123	0.108079	0.040764	0.047155	0.080765
uniform	gem	0.038690	0.048813	0.055028	0.057251	0.058667	0.059181	0.060340
	max	0.075587	0.086975	0.097092	0.103211	0.109388	0.112250	0.112248
$\chi^2$	gem	0.032567	0.040252	0.044707	0.046357	0.047170	0.049369	0.048504
	max	0.074500	0.074581	0.082647	0.083348	0.083314	0.084594	0.085681

Tabel 6: De gemiddelde en maximale relatieve fouten voor verschillende waarden van  $k$ .

Allereerst kijken we naar de gemiddelde relatieve fouten van modellen met  $A \sim$  Erlang. We zien dat alle waarden tussen de 0.01 en 0.02 schommelen, behalve bij  $k = 2$ . Kijken we naar de maximale relatieve fouten, dan zien we dat deze waarden flink schommelen. We zien geen bepaalde trend tussen de verschillende waarden, dus weten we ook niet precies wat de invloed van  $k$  is. Maar gemiddeld heeft  $k$  geen invloed op de kwaliteit van de interpolatie bij Erlang tussenaankomsttijden.

Bij uniforme tussenaankomsttijden zien we dat zowel de gemiddelde als de maximale relatieve fouten stijgen als  $k$  toeneemt. En ook bij beide waarden geldt dat deze stijging een afnemende stijging is. Voor deze verdeling van  $A$  is  $k$  dus wel van invloed op hoe goed de interpolatie de daadwerkelijke wachttijd benadert.

Als laatste kijken we nog naar de invloed van  $k$  bij Chi-kwadraat tussenaankomsttijden. We zien dat voor deze modellen de gemiddelde relatieve fout bij de eerste paar  $k$  toeneemt en daarna rond de waarde 0.048 blijft schommelen. Bij de maximale relatieve waarden zien we een kleine stijging, maar deze stijging neemt af naarmate  $k$  groter wordt. In het algemeen heeft  $k$  dus een kleine invloed op hoe goed de interpolatie de gemiddelde wachttijd benadert.

Bekijken we alle gemiddelde relatieve fouten uit deze paragraaf, dan zien we dat deze over het algemeen redelijk klein zijn. Maar als we naar de maximale relatieve fouten kijken, dan zien we dat er ook vrij grote waarden tussen zitten. Zo is de maximale relatieve fout gelijk aan 0.23. Maar over het algemeen zijn de relatieve fouten vrij klein en dus benadert de interpolatie de gemiddelde wachttijd dus vrij goed. Maar in veel gevallen zijn er waarden van  $\lambda$  waarvoor de benadering slechter is, dan voor de overige waarden van  $\lambda$ .



## 6 Conclusie

De vraag: hoe lang sta je gemiddeld te wachten? hebben we kunnen beantwoorden voor alle drie de modellen. In een  $M/G/1$  wachtrijmodel hebben hiervoor een exacte formule kunnen bepalen. Daarnaast hebben we de LT limiet en HT limiet bepaald en aan de hand van deze limieten de gemiddelde wachttijd geïnterpoleerd. De uiteindelijke formule voor de interpolatie is precies dezelfde als de formule voor de gemiddelde wachttijd en daardoor benadert de interpolatie de gemiddelde wachttijd exact. Verder bleek dat het voor dit model mogelijk is om de Laplace stieltjes getransformeerde en de heavy traffic limietverdeling voor de wachttijd te bepalen.

Voor de gemiddelde wachttijd in een  $k$ -gelimiteerd vakantiemodel konden we geen exacte formule meer bepalen. Wel was het mogelijk om de Laplace Stieltjes getransformeerde vrijwel geheel exact te bepalen. Hierdoor geeft de gemiddelde wachttijd die we aan de hand van de LST bepalen een zeer goede benadering van de werkelijke wachttijd. Maar helaas duurt het uitrekenen van deze waarden vrij lang.

Voor dit  $k$ -gelimiteerde vakantiemodel konden we de LT en HT limieten exact bepalen. Aan de hand van deze limieten hebben de gemiddelde wachttijd geïnterpoleerd met twee verschillende formules. De tweede orde interpolatie benadert de daadwerkelijke gemiddelde wachttijd erg goed met een maximale relatieve fout van 11%. De eerste orde interpolatie benadert de wachttijd iets minder goed met een maximale relatieve fout van 18%.

Als laatste hebben we nog gekeken naar een  $k$ -gelimiteerd vakantiemodel waarbij de tussenaankomsttijden een onbekende verdeling hebben. Voor dit model was het niet mogelijk om exacte formules te vinden voor de gemiddelde wachttijd. Zelfs de LT en HT limieten konden niet meer exact bepaald worden. Wel hebben we deze zeer goed kunnen benaderen. Aan de hand van simulatieresultaten hebben we kunnen bepalen hoe goed de LT-HT interpolatie de gemiddelde wachttijd benadert. Hieruit bleek dat dat de interpolatie dit redelijk goed deed. Zo waren er waarden van  $\lambda$  waarvoor de relatieve fout meer dan 20% was, maar gemiddeld was de relatieve fout maximaal 0.11, wat redelijk laag is.

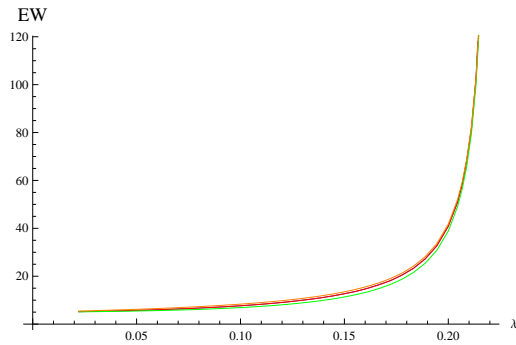
We hebben dus in alle drie de modellen een formule voor de gemiddelde wachttijd gevonden die vrij nauwkeurig of zelfs exact is. Daarnaast bleek het ook erg gemakkelijk om alles voor de rijlengte te bepalen. Er hoeft dan alleen Little's law toegepast te worden op de resultaten voor de wachttijd.

## Referenties

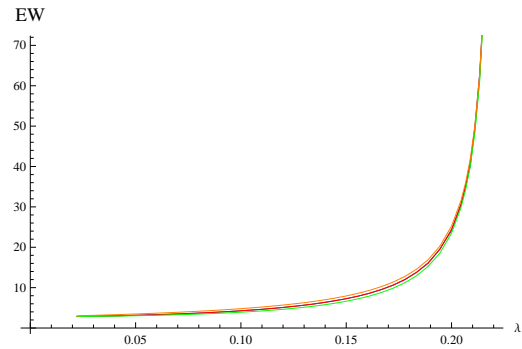
- [1] Adan, I.J.B.F., Resing, J.A.C. (2002). *Queueing Theory*. Technische Universiteit Eindhoven, p. 59-69.
- [2] Boon, M.A.A. (2011). *Polling Models. From Theory to Traffic Intersections*. Eindhoven, p. 31-34, 118-123.
- [3] Everitt, D. (1989). A Note on the Pseudoconservation Laws for Cyclic Service Systems with Limited Service Disciplines. In: *IEE Transactiona on Communication*, vol. 37, nr. 7, p. 781 - 783
- [4] Lee, T. T., (1989). *M/G/1/N* Queue with Vacation Time and Limited Service Discipline. In: *Performance Evaluation*, 9, p. 181-190.
- [5] Tedijanto, T. (1990). *Nonexhaustive Policies in Polling Systems and Vacation Models: Qualitative and Approximate Approach*. PhD. Thesis, University of Maryland, College Park, MD.

## A Grafieken van de gemiddelde wachttijd bij Poisson aankomsten

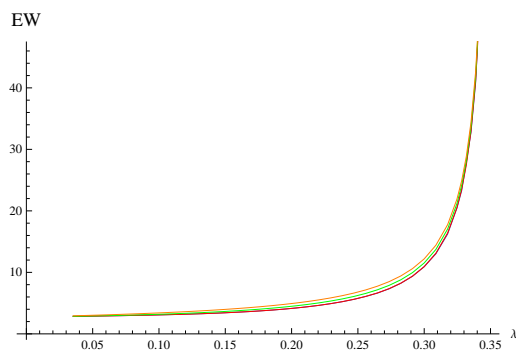
In deze grafieken is de oranje lijn bepaald met de interpolatie van de eerste orde, de groen met de interpolatie van de tweede orde, de rode met de LST en de blauwe met simulatie.



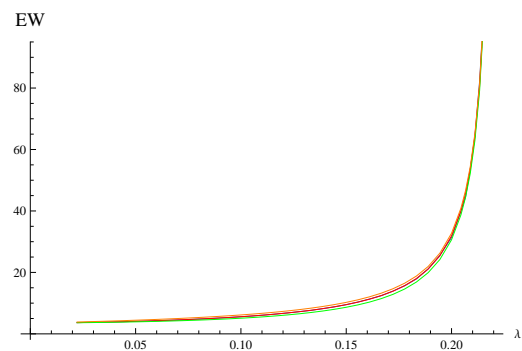
Figuur 7: De gemiddelde wachttijden bij exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



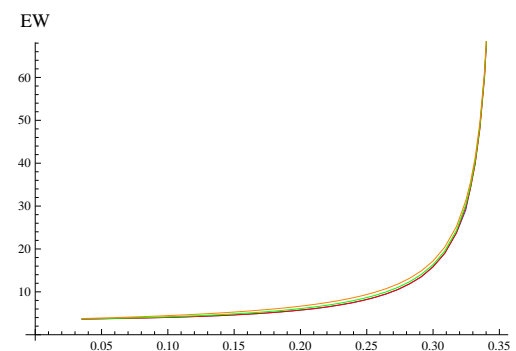
Figuur 8: De gemiddelde wachttijden bij Erlang bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



Figuur 9: De gemiddelde wachttijden bij Erlang bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .



Figuur 10: De gemiddelde wachttijden bij  $\chi^2$  bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .

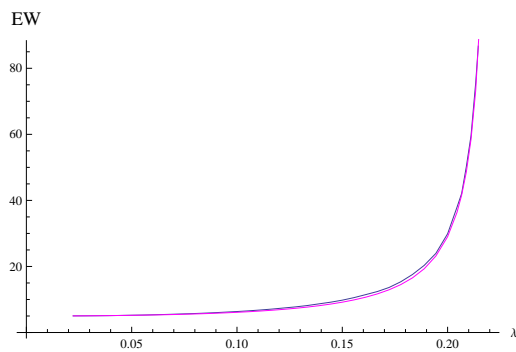


Figuur 11: De gemiddelde wachttijden bij  $\chi^2$  bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .

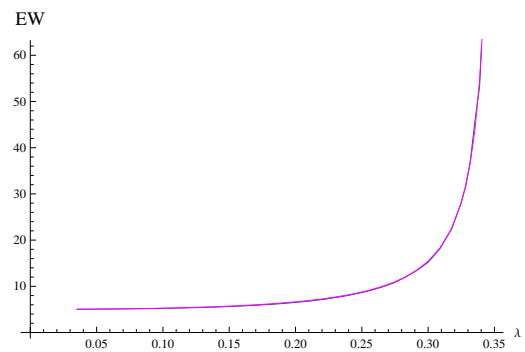
## B Grafieken van de gemiddelde wachttijd bij Algemene aankomsten

### B.1 Erlang tussenaankomsttijden

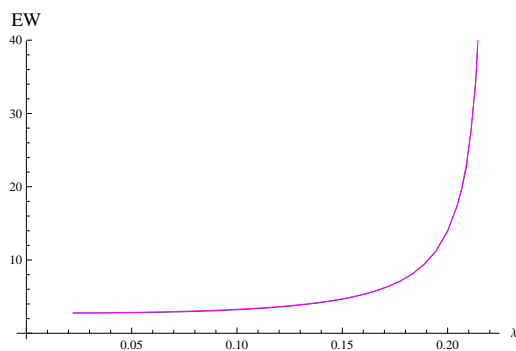
In deze grafieken is de roze lijn bepaald met de interpolatie en de blauwe met simulatie.



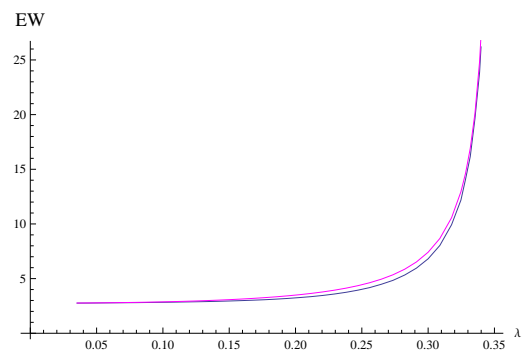
Figuur 12: De gemiddelde wachttijden bij Erlang tussenaankomsttijden, exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



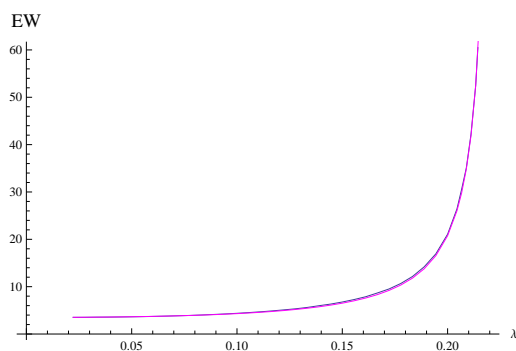
Figuur 13: De gemiddelde wachttijden bij Erlang tussenaankomsttijden, exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .



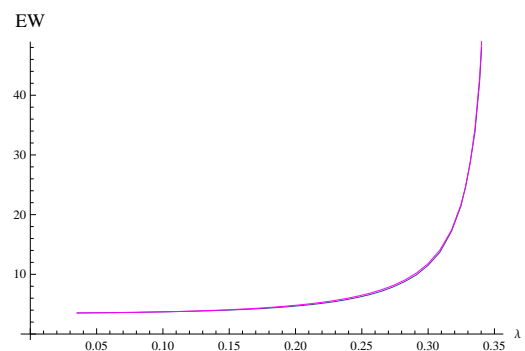
Figuur 14: De gemiddelde wachttijden bij Erlang tussenaankomst-, bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



Figuur 15: De gemiddelde wachttijden bij Erlang tussenaankomst-, bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .



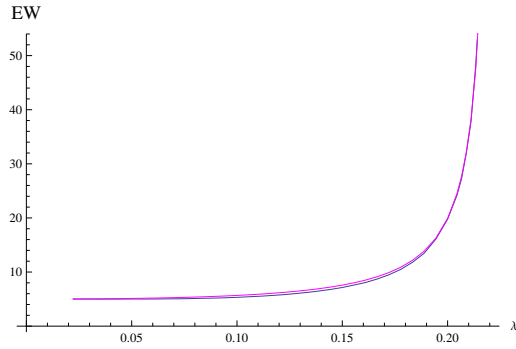
Figuur 16: De gemiddelde wachttijden bij Erlang tussenaankomsttijden, Chi-kwadraat bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



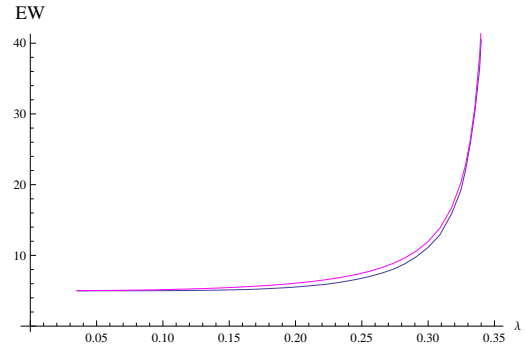
Figuur 17: De gemiddelde wachttijden bij Erlang tussenaankomsttijden, Chi-kwadraat bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .

## B.2 Uniforme tussenaankomsttijden

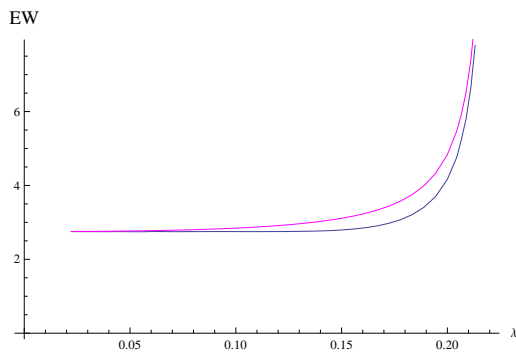
In deze grafieken is de roze lijn bepaald met de interpolatie en de blauwe met simulatie.



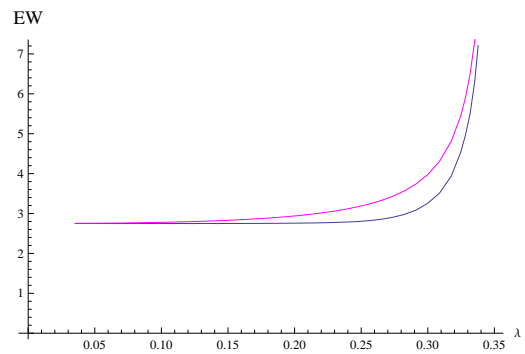
Figuur 18: De gemiddelde wachttijden bij uniforme tussenaankomsttijden, exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



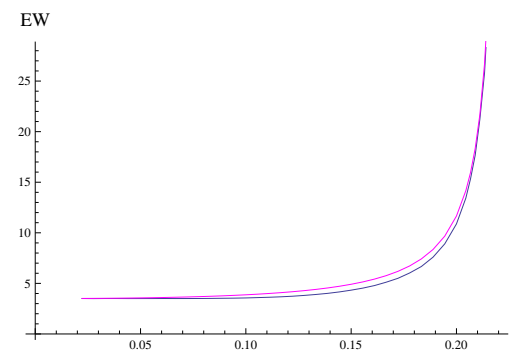
Figuur 19: De gemiddelde wachttijden bij uniforme tussenaankomsttijden, exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .



Figuur 20: De gemiddelde wachttijden bij uniforme tussenaankomsttijden, Erlang bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



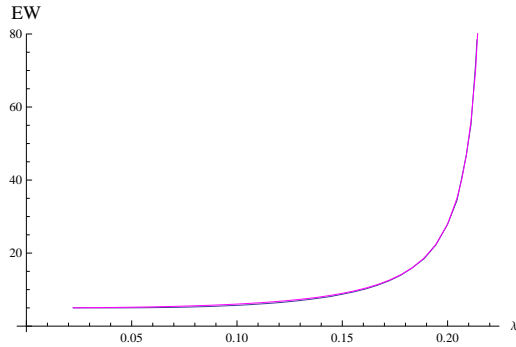
Figuur 21: De gemiddelde wachttijden bij uniforme tussenaankomsttijden, Erlang bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .



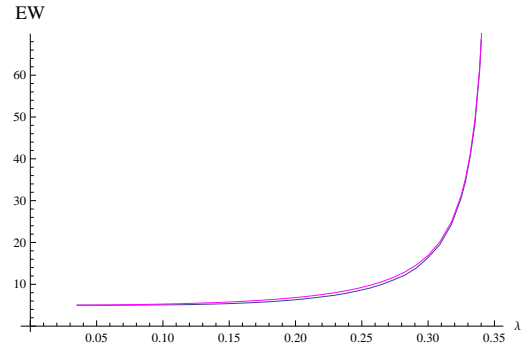
Figuur 22: De gemiddelde wachttijden bij uniforme tussenaankomsttijden, Chi-kwadraat bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .

### B.3 Chi-kwadraat tussenaankomsttijden

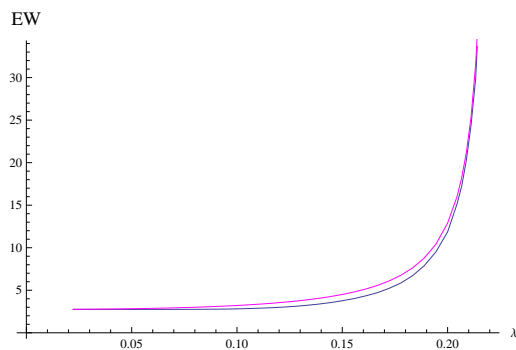
In deze grafieken is de roze lijn bepaald met de interpolatie en de blauwe met simulatie.



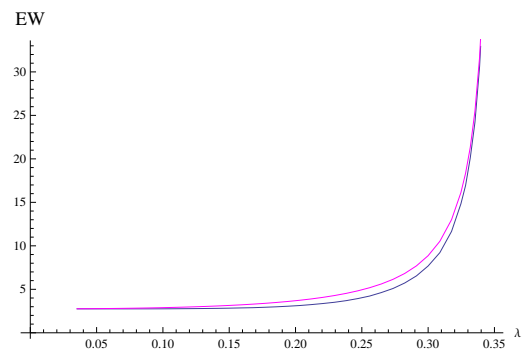
Figuur 23: De gemiddelde wachttijden bij Chi-kwadraat tussenaankomsttijden, exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



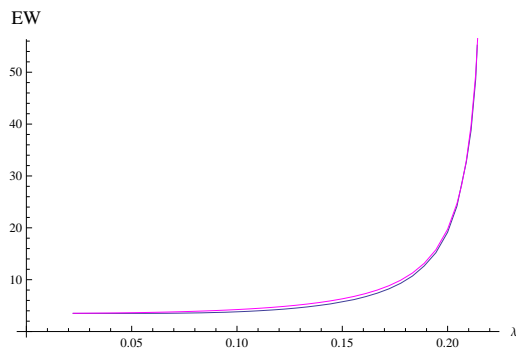
Figuur 24: De gemiddelde wachttijden bij Chi-kwadraat tussenaankomsttijden, exponentiële bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .



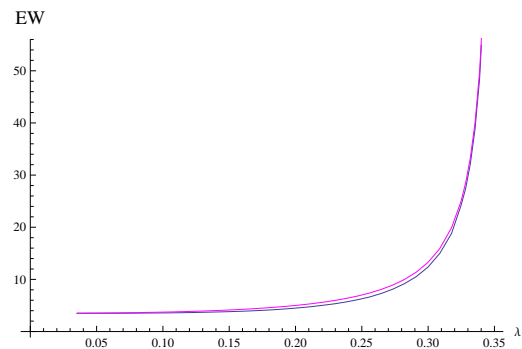
Figuur 25: De gemiddelde wachttijden bij Chi-kwadraat tussenaankomsttijden, Erlang bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



Figuur 26: De gemiddelde wachttijden bij Chi-kwadraat tussenaankomsttijden, Erlang bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .



Figuur 27: De gemiddelde wachttijden bij Chi-kwadraat tussenaankomst-, bedienings- en vakantietijden en  $k=2$ .



Figuur 28: De gemiddelde wachttijden bij Chi-kwadraat tussenaankomst-, bedienings- en vakantietijden en  $k=6$ .