BACHELOR

Ongelijkheden in representatieve matroïden

Hellebrekers, T.C.I.

Award date:
2010

Department of Mathematics and Computer Science

Den Dolech 2, 5612 AZ Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
www.tue.nl

Auteur
Tosca Hellebrekers

Opdrachtgever
dr. R.A. Pendavingh

Datum
3 maart 2010

Ongelijkheden in Representatieve Matroïden

Samenvatting

De Ingleton ongelijkheid is een nodige maar geen voldoende eis voor een representatieve matroïde. Er zijn dus niet-representatieve matroïden die wel voldoen aan de Ingleton ongelijkheid. Er is vraag naar meer van dit soort ongelijkheden die kunnen aantonen of een matroïde wel of niet representeerbaar is. Ik heb twee verschillende methoden gebruikt om een soortgelijke ongelijkheid te vinden. De eerste is door in een matroïde die niet-representeerbaar is maar wel aan de Ingleton ongelijkheid voldoet structureel te gaan zoeken naar ongelijkheden. Dit gebeurt op dezelfde manier als Ingleton dit deed bij de Vamos matroïde. De tweede methode is om de Ingleton ongelijkheid uit te breiden dat hij geld voor meer dan vier deelverzamelingen.

Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology

Inhoudsopgave

Titel
Ongelijkheden in Representatieve Matroïden

1 Inleiding

Ik ben begonnen met een literatuurstudie naar matroïden en de representaties daarvan. Zo kwam ik in contact met de ongelijkheid van Ingleton. Nu ontstond de vraag of er meer ongelijkheden bestaan die kunnen aantonen dat een matroïde niet representeerbaar is. In eerste instantie heb ik me bezig gehouden met het generaliseren van de Ingleton ongelijkheid naar vijf deelruimten in plaats van vier. Daarna ben ik naar andere matroïden gaan kijken om daarin vergelijkbare ongelijkheden te vinden. Hiermee ben ik begonnen in de matroïde P_8 waar een enkel hypervlak gerelaxeerd is, zodanig dat de matroïde niet meer representeerbaar is. Om te beginnen heb ik een bewijs geven dat deze matroïde niet representeerbaar was. Dit bewijs geeft een tegenstrijdigheid in dimensies zodat daar eventueel een ongelijkheid in te vinden zou zijn waar alleen representeerbare matroïden aan zouden voldoen. Ik heb dit kunnen bewijzen door gebruik te maken van de stelling van Desargues. Ik kon met mijn bewijs geen ongelijkheid vinden als deze al bestaat. Ik ben toen teruggegaan naar het generaliseren van de Ingleton ongelijkheid. Ik heb uiteindelijk een generalisatie van een ongelijkheid op vier deelruimten naar N deelruimten gevonden.

2 Voorkennis

Een matroïde definieert de afhankelijkheidsrelatie op een eindig aantal elementen. Deze structuren zijn op veel verschillende manieren te definiëren. In het boek van Oxley [1] zijn er veel verschillende gegeven. Zijn eerste definitie luidt als volgt:

Definitie 2.1. Een *matroïde* M is een paar $(E, \mathfrak{I})$ bestaande uit een eindige verzameling E en een verzameling deelverzamelingen $\mathfrak{I}$ van E die voldoen aan de volgende condities:

($\mathbf{I_1}$) $\emptyset \in \mathfrak{I}$,

($\mathbf{I_2}$) als $I \in \mathfrak{I}$ en $I' \subseteq I$, dan $I' \in \mathfrak{I}$,

($\mathbf{I_3}$) als $I_1, I_2 \in \mathfrak{I}$ en $|I_1| < |I_2|$, dan is er een element $e \in I_2 \setminus I_1$ zodanig dat $I_1 \cup \{e\} \in \mathfrak{I}$.

De elementen van $\mathfrak{I}$ zijn alle onafhankelijk deelverzamelingen van E. Het is niet zo efficient om alle onafhankelijke verzamelingen te beschrijven als deze allen bevat zijn in de grootste onafhankelijke verzamelingen. Vandaar dat we een basis definiëren:

Definitie 2.2. Een *basis* is een maximaal onafhankelijke verzameling in E.

Een andere manier om een matroïde te beschrijven is nu met de verzameling basissen.

Stelling 2.1. *De verzameling basissen $\mathcal{B}$ van een matroïde voldoet aan de volgende eigenschappen:*

- *$\mathcal{B}$ is niet leeg,*
- *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en $x \in B_1 \setminus B_2$, dan is er een element $y \in B_2 \setminus B_1$ zodanig dat $((B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}) \in \mathcal{B}$.*

Het bewijs voor deze stelling is te vinden in [1] op bladzijde 17.

De tegenhanger van een maximaal onafhankelijke verzameling is een minimaal afhankelijke verzameling. Deze noemen we een circuit:

Definitie 2.3. Een *circuit* is een minimaal afhankelijke verzameling in E.

Definitie 2.4. Laat de *rangfunctie* $\rho : 2^E \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ gedefiniëerd zijn door:

$$\rho(X) = \max\left\{|I| \,\middle|\, I \subseteq X, I \text{ onafhankelijk}\right\}.$$

Stelling 2.1. *De rangfunctie voldoet aan de volgende eigenschappen:*

($\mathbf{R_1}$) *als* $X \subseteq E$, *dan* $0 \leq \rho(X) \leq |X|$,

($\mathbf{R_2}$) *als* $X \subseteq Y \subseteq E$, *dan* $\rho(X) \leq \rho(Y)$,

($\mathbf{R_3}$) *als* $X, Y \subseteq E$, *dan* $\rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Het bewijs voor deze stelling wordt gegeven in [1] op bladzijde 23.

We merken op dat (R_3) lijkt op de gelijkheid

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W \tag{M}$$

die geldt voor vectorruimten V en W, waar $V + W = \left\{v + w \,\middle|\, v \in V \text{ en } w \in W\right\}$. (M) is modulatriteit dus wordt (R_3) de submodulaire ongelijkheid genoemd.

Met deze rangfunctie kunnen we nu ook een matroïde omschrijven:

Stelling 2.2. *Zij* E *een verzameling en* $\rho : 2^E \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *een functie die voldoet aan de eigenschappen* $(R_1)-(R_3)$. *Zij* $\mathfrak{I}(\rho) = \left\{X \subseteq E \,\middle|\, \rho(X) = |X|\right\}$. *Dan is* $(E, \mathfrak{I}(\rho))$ *een matroïde.*

Het bewijs van deze stelling maakt gebruik van het volgende lemma waarvan het bewijs wordt gegeven in [1] op bladzijde 24.

Lemma 2.3. *Zij* E *een verzameling en* ρ *een functie die* 2^E *afbeeld op een verzameling niet-negatieve gehele getallen en voldoet aan de eigenschappen* (R_1) *en* (R_2). *Als* $X, Y \subseteq E$ *zodat voor alle* $y \in Y \setminus X$, $\rho(X \cup \{y\}) = \rho(X)$, *dan* $\rho(X \cup Y) = \rho(X)$

Bewijs Stelling 2.2.
Dat $\mathfrak{I}(\rho)$ voldoet aan de eigenschappen (I_1), (I_2) en (I_3) wordt aangetoond:

($\mathbf{I_1}$): $0 \leq \rho(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ dus $\rho(\emptyset) = |\emptyset|$, dus $\emptyset \in \mathfrak{I}$.

($\mathbf{I_2}$): Zij $I \in \mathfrak{I}$ en $I' \subseteq I$ dan $\rho(I) = |I|$ en geldt er het volgende:

$$\begin{aligned}
\rho(I' \cup (I \setminus I')) + \rho(I' \cup (I \setminus I')) &\leq \rho(I') + \rho(I \setminus I') && (R_3)\\
\rho(I) + \rho(\emptyset) &\leq \rho(I') + \rho(I \setminus I') \\
|I| + 0 &\leq \rho(I') + \rho(I \setminus I') \leq |I'| + |I \setminus I'| = |I| && (R_1)
\end{aligned}$$

Dus $\rho(I') = |I|$ en dus is $I' \in \mathfrak{I}$.

($\mathbf{I_3}$): Aangenomen wordt dat $\mathfrak{I}(\rho)$ niet aan (I_3) voldoet. Zij I_1, $I_2 \in \mathfrak{I}$ met $|I_1| < |I_2|$ dan geldt voor alle $e \in I_2 \setminus I_1$ dat $I_1 \cup \{e\} \notin \mathfrak{I}$. Dus voor al deze e geldt $\rho(I_1 \cup \{e\}) \neq |I_1 \cup \{e\}|$

Vanwege eigenschap (R_1) is $\rho(I_1 \cup \{e\}) \leq |I_1 \cup \{e\}|$ dus $\rho(I_1 \cup \{e\}) < |I_1 \cup \{e\}| = |I_1| + 1$.

Vanwege eigenschap (R_2) is $\rho(I_1) \leq \rho(I_1 \cup \{e\})$. Dus omdat $I_1 \in \mathfrak{I}$

$$|I_1| = \rho(I_1) \leq \rho(I_1 \cup \{e\}) < |I_1| + 1$$

Dus $\rho(I_1 \cup \{e\}) = |I_1|$.

We gebruiken nu Lemma 2.3 met $X = I_1$ en $Y = I_2$. Dan krijgen we $\rho(I_1) = \rho(I_1 \cup I_2)$. Dus $|I_1| = \rho(I_1) = \rho(I_1 \cup I_2) \geq \rho(I_2) = |I_2|$, ofwel $|I_1| \geq |I_2|$. Dit is een tegenspraak, dus de aanname dat $\mathfrak{I}(\rho)$ niet aan (I_3) voldoet klopt niet. We concluderen dat $\mathfrak{I}(\rho)$ voldoet aan (I_3) $\square$

$\rho(E(M))$ schrijven we doorgaans als $\rho(M)$.

Hier volgen nog een paar relevante definities:

Definitie 2.5. Een *hypervlak* van een matroïde is een deelverzameling X van E waarvoor geldt: $X = \left\{x \in E \;\middle|\; \rho(X \cup x) = \rho(X)\right\}$ en $\rho(X) = \rho(M) - 1$.

Stelling 2.4. *De verzameling hypervlakken $\mathcal{H}$ van een matroïde M voldoet aan de volgende eigenschappen:*

- *voor alle $H \in \mathcal{H}$ geldt $\rho(M) \leq |H| < |E(M)|$,*
- *voor alle $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ met $H_1 \neq H_2$ geldt $|H_1 \cap H_2| < \rho(M) - 1$*

Het bewijs van stelling 2.4 wordt gegeven in [2] op bladzijde 151

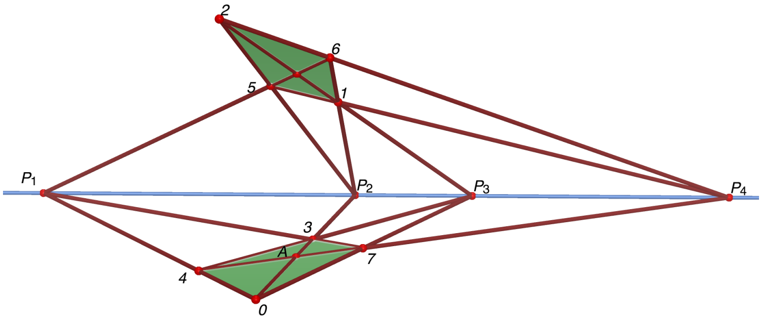
Definitie 2.6. Zij M een matroïde met $X \subseteq E(M)$ zowel een hypervlak als een circuit. Zij $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(M) \cup X$. Dan is $\mathcal{B}'$ een verzameling basissen van een matroïde M'. M' noemen we een *relaxatie* van M.

Definitie 2.7. Een matroïde M met $\rho(M) = r$ is F-*representeerbaar* dan en slechts dan als, voor een $m \geq r$, er een functie $\psi : E(M) \to V(m, F)$ is zo danig dat $\rho(X) = \dim\langle\psi(X)\rangle$ voor alle $X \subseteq E(M)$.

Hierbij is $V(m, F)$ een m-dimensionale vectorruimte over het lichaam F.

De deelverzamelingen van een matroïde met rang gelijk aan een, twee en drie worden weergegeven als punten, lijnen en vlakken respectievelijk. Als drie elementen een circuit vormen zijn de drie bijbehorende punten collineair. Net zo, als vier elementen een circuit vormen zijn de punten coplanair.

In de matroïden in dit verslag komen geen lussen (elementen die op zichzelf afhankelijk zijn) of parallelle elementen (twee elementen die een circuit vormen) voor, de representatie hiervan is te vinden in het boek van Oxley [1] maar hier niet relevant.



Figuur 2.1: de Vamos matroïde (V_8)

In Figuur 2.1 is een geometrische representatie gegeven van een 8-element rang-4 matroïde met $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en de verzameling hypervlakken $\mathcal{H} = \big\{\{0, 1, 4, 6\}, \{2, 3, 5, 7\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 3, 6, 7\}, \{1, 2, 6, 7\}, \{0, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\big\}$. Deze matroïde heet de Vamos matroïde en wordt genoteerd met V_8. Hierin zijn de enkele elementen als punten weergegeven, en de hypervlakken als vlakken.

De Vamos matroïde is representeerbaar over geen enkel lichaam. Het bewijs hiervoor is gebaseerd op het feit dat de punten 4, 5, 6 en 7 niet coplanair zijn, ofwel een contradictie in rangen. Dit is te vinden in [1] op bladzijde 170-171.

Ingleton heeft de volgende nodige conditie vastgelegd voor een matroïde om representatief te zijn over een lichaam.

Stelling 2.5. *Voor alle deelverzamelingen X_1, X_2, X_3, X_4 van een representatieve matroïde (E, ρ), geldt dat*

$$\begin{aligned}\rho(X_1) + \rho(X_2) + \rho(X_1 \cup X_2 \cup X_3) + \rho(X_1 \cup X_2 \cup X_4) + \rho(X_3 \cup X_4)\\ \leq \rho(X_1 \cup X_2) + \rho(X_1 \cup X_3) + \rho(X_1 \cup X_4) + \rho(X_2 \cup X_3) + \rho(X_2 \cup X_4) \qquad \text{(Ingleton)}\end{aligned}$$

Het bewijs voor stelling 2.5 is gebaseerd op het bewijs dat de Vamos matroïde niet representeerbaar is en is te vinden in [2] op bladzijde 159.

De Ingleton ongelijkheid is een nodige maar geen voldoende eis voor een representatieve matroïde. Er zijn in [3] een aantal voorbeelden gegeven van matroïden die wel voldoen aan de Ingleton ongelijkheid, maar niet representeerbaar zijn. De matroïde P_1 is er hier een van.

3 De matroïde P_1 is niet representeerbaar

Om een zelfde ongelijkheid te vinden als de Ingleton ongelijkheid wilde ik ook op een soortgelijke manier te werk gaan. De matroïde P_1 lijkt sterk op de Vamos matroïde en is ook net niet representeerbaar. P_1 is een matroïde met $E(P_1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en de verzameling hypervlakken $\mathcal{H}_1 = \big\{\{0, 1, 2, 7\}, \{0, 1, 3, 6\}, \{0, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 3, 4, 7\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{0, 4, 5, 6\}, \{1, 5, 4, 7\}, \{2, 4, 6, 7\}\big\}$. Deze matroïde ontstaat door van de matroïde P_8 (Figuur 3.1) het hypervlak $\{3, 5, 6, 7\}$ te relaxeren.

In [3] wordt op bladzijde 425 een bewijs gegeven dat P_1 niet representeerbaar is. Dit bewijs is gegeven in termen van matrices en zegt niets over rangen. Ingleton gebruikte juist het feit dat in de Vamos matroïde de rangen een contradictie gaven. Er moet dus bewezen worden dat P_1 niet representeerbaar is in termen van rangen. De rang van P_1 ($\rho(P_1)$) is 4 dus als P_1 representeerbaar is, dan is dit dus in een vectorruimte van dimensie 4.

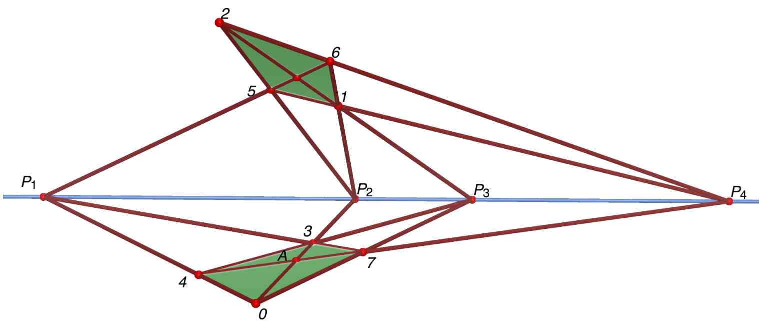
Stelling 3.1. *De matroïde P_1 is niet representeerbaar over enig lichaam.*

Bewijs Stelling 3.1.
Dit bewijs maakt gebruik van de Stelling van Desargues:

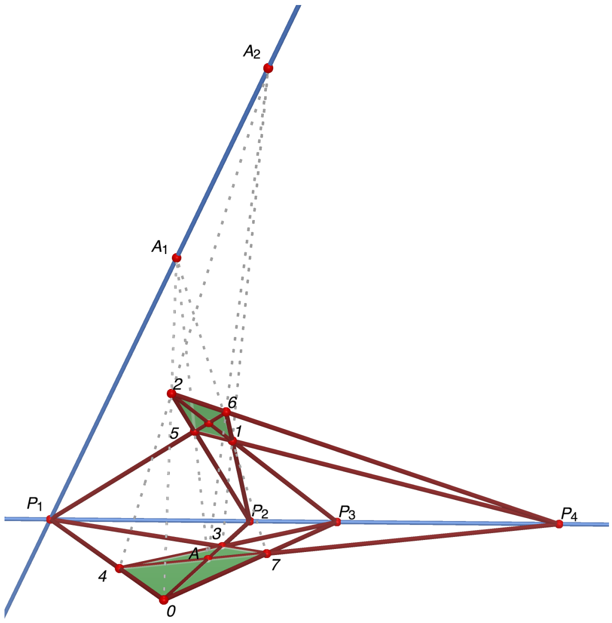
Stelling 3.2. *Van twee driehoeken zijn de snijpunten van corresponderende zijden collineair, dan en slechts dan als de verbindingslijnen van de corresponderende hoekpunten concurrent zijn.*

Het bewijs hiervoor wordt gegeven in [4] op bladzijde 59

Stel P_1 is representeerbaar over een lichaam F, dan is er een afbeelding $\psi : E(P_1) \to V(4, F)$



Figuur 3.1: de matroïde P_8



Figuur 3.2: De matroïde P_1 is niet representeerbaar

zo dat $\rho(X) = \dim\langle\psi(X)\rangle$ voor alle $X \subseteq E(P_1)$. Noteer de deelruimte $\langle\psi(\{x_1, x_2, ..., x_k\}\rangle$ als $W(x_1, x_2, ..., x_k)$.

Er geldt:

$$\begin{aligned}\dim(W(0,4) \cap W(5,6)) &= \dim(W(0,4)) + \dim(W(5,6)) - \dim(W(0,4) + W(5,6)) \\ &= 2 + 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

Dus $W(0,4) \cap W(5,6) = \langle \underline{v} \rangle$ voor een niet-nul $\underline{v}$ in $V(4, F)$. We kunnen een punt $p_{1,1}$ toevoegen die correspondeert met de deelruimte $\langle \underline{v} \rangle$. Net zo kunnen we een punt $p_{1,2}$ toevoegen die correspondeert met de deelruimte $\langle \underline{w} \rangle$, waarbij

$$\langle \underline{w} \rangle = W(0,4) \cap W(3,7)$$

Daarnaast is:

$$\dim(W(0,3) \cap W(1,2,5,6)) = 1,\ \dim(W(0,3) \cap W(1,2)) = 1,\ \dim(W(0,3) \cap W(5,6)) = 1$$

Dus $W(0,3) \cap W(1,2,5,6) = \langle \underline{x} \rangle$ voor een niet-nul $\underline{x}$ in $V(4, F)$.

Maar ook:

$$\begin{aligned}W(0,3) \cap W(1,2) &\subseteq W(0,3) \cap W(1,2,5,6) \\ W(0,3) \cap W(5,6) &\subseteq W(0,3) \cap W(1,2,5,6)\end{aligned}$$

Dus:

$$W(0,3) \cap W(1,2,5,6) = W(0,3) \cap W(1,2) = W(0,3) \cap W(5,6)$$

Net zo is:

$$W(2,5) \cap W(0,3,1,6) = W(2,5) \cap W(0,3) = W(2,5) \cap W(1,6)$$
$$W(1,6) \cap W(0,3,2,5) = W(1,6) \cap W(0,3) = W(1,6) \cap W(2,5)$$

Dus:

$$\langle \underline{x} \rangle = W(0,3) \cap W(1,2,5,6) = W(2,5) \cap W(0,3,1,6) = W(1,6) \cap W(0,3,2,5)$$

We kunnen een punt p_2 toevoegen die correspondeert met de deelruimte $\langle \underline{x} \rangle$
Net zo kunnen we de punten p_3 en p_4 corresponderend met respectievelijk de deelruimten $\langle \underline{y} \rangle$ en $\langle \underline{z} \rangle$, waarbij

$$\begin{aligned} \langle \underline{y} \rangle &= W(1,2) \cap W(0,3,4,7) = W(0,7) \cap W(1,2,3,4) = W(3,4) \cap W(0,1,2,7) \\ \langle \underline{z} \rangle &= W(4,7) \cap W(1,2,5,6) = W(1,5) \cap W(4,7,2,6) = W(2,6) \cap W(4,7,1,5) \end{aligned}$$

$$\dim(W(0,3,4,7) \cap W(1,2,5,6)) = 3 + 3 - 4 = 2$$

Deze deelruimte corresponderen we met de lijn l. Hiervoor geldt

$$\begin{aligned} W(0,3) \cap W(1,2,5,6) &\subseteq W(0,3,4,7) \cap W(1,2,5,6) \\ W(1,2) \cap W(0,3,4,7) &\subseteq W(0,3,4,7) \cap W(1,2,5,6) \\ W(4,7) \cap W(1,2,5,6) &\subseteq W(0,3,4,7) \cap W(1,2,5,6) \end{aligned}$$

Dus p_2, p_3 en p_4 liggen op l. Verder is

$$\dim(W(0,3) \cap W(4,7)) = 1$$

Hier voegen we ook weer een punt (A) toe die correspondeert met de deelruimte $W(0,3) \cap W(4,7)$

We gebruiken nu de stelling van Desargues op de driehoeken $\triangle(0,A,7)$ en $\triangle(2,5,1)$. De driehoeken zijn lijn-perspectief (p_2, p_3 en p_4 zijn collineair) dus $(W(0,2)$, $W(A,5)$ en $W(7,1)$ zijn concurrent). Dus

$$\dim(W(0,2) \cap W(A,5) \cap W(7,1)) = 1 \tag{3.1}$$

Hier voegen we ook weer een punt (A_1) toe die correspondeert met de deelruimte $W(0,2) \cap W(A,5) \cap W(7,1)$.
Op dezelfde manier passen we de stelling van Desargues toe op $\triangle(3,A,4)$ en $\triangle(1,6,2)$ en krijgen zo het punt A_2 die correspondeert met $W(3,1) \cap W(A,6) \cap W(4,2)$.

In p_3 snijden drie lijnen $(W(0,7)$, $W(4,3)$ en $W(2,1))$ en in $\triangle(0,4,2)$ en $\triangle(7,3,1)$ zijn dit de verbindingslijnen tussen de overeenkomstige hoekpunten. Dan zijn (Desargues) de snijpunten van de overeenkomstige zijden collineair. Dus $W(0,4) \cap W(3,7)$, $W(0,2) \cap W(7,1)$ en $W(3,1) \cap W(4,2)$ liggen op één lijn (k). Dit zijn de punten $p_{1,2}$, A_1 en A_2 respectievelijk.

Omdat $A_1 \subset W(A,6)$ en $A_2 \subset W(A,5)$ ligt de lijn k in het vlak $W(A,5,6)$. Net zo is $A_1 \subset W(0,2)$ en $A_2 \subset W(2,4)$ dus ligt de lijn k in het vlak $W(0,2,4)$. Maar $\dim(W(0,2,4) \cap W(A,5,6)) = 3 + 3 - 4 = 2$ dus k correspondeert ook met $W(0,4,2) \cap W(A,5,6)$. De lijnen $W(0,4)$ en $W(5,6)$ hebben precies één snijpunt $(p_{1,1})$ dus deze ligt op k. $p_{1,1}$ en $p_{1,2}$

liggen ook allebei op $W(0,4)$. Maar $\dim(W(0,4) \cap W(0,2,4) \cap W(A,5,6)) = \dim(W(0,4) \cap W(A,5,6)) = 2+3-4 = 1$ dus

$$p_1 := p_{1,1} = p_{1,2}.$$

Punt p_1 ligt op de lijnen $W(3,7)$ en $W(5,6)$. Dus

$$\begin{aligned}\dim(W(3,5,6,7)) &= \dim(W(3,7)+W(5,6)) \\ &= 2+2-\dim(W(3,7)\cap W(5,6)) \leq 3.\end{aligned}$$

Dit wil zeggen dat {3,5,6,7} afhankelijk is maar $\rho(\{3,5,6,7\}) = 4$. Dit is een tegenspraak dus de matroïde P_1 is niet representeerbaar. $\square$

Om nu een ongelijkheid uit dit bewijs te halen is niet zo triviaal. Het is een ingewikkelder bewijs dan dat voor de Vamos matroïde. Het gebruik van de stelling van Desargues bemoeilijkt ook het inzicht in de matroïde P_1.

Eventueel kan er uit de non-Desargues matroïde ook wel een ongelijkheid komen. Hier heb ik ook naar gekeken, maar heb daar eveneens niets gevonden.

Het vinden van een nieuwe ongelijkheid is niet gelukt, dus ben ik gaan kijken naar de originele ongelijkheid van Ingleton, om daar een generalisatie van te maken.

4 Generalisatie van de Ingleton ongelijkheid

In dit hoofdstuk wordt een generalisatie van de Ingleton ongelijkheid afgeleid. Hier is $\rho(A) = \dim(\langle A \rangle)$

4.1 Ingleton voor vijf deelruimten

Voor elke twee deelruimten A en B van een vectorruimte V geldt het volgende:

(M) $\rho(A+B) + \rho(A \cap B) = \rho(A) + \rho(B)$

(R) Als $A \subseteq B$, dan $\rho(A) \leq \rho(B)$

Voor elke vier deelruimten weten we de Ingleton ongelijkheid:

$$\rho(A) + \rho(B) + \rho(A+B+C) + \rho(A+B+D) + \rho(C+D) \leq \rho(A+B) + \rho(A+C) + \rho(A+D) + \rho(B+C) + \rho(B+D)$$

In zijn artikel [2], leidt Ingleton het volgende af:

(I_1) voor drie deelruimten:

$$\rho(A \cap B \cap C) \geq \rho(A \cap B) + \rho(C) - \rho(A+C) - \rho(B+C) + \rho(A+B+C)$$

(I_2) voor vier deelruimten:

$$\rho(A \cap B \cap C \cap D) \geq \rho(A \cap B \cap C) + \rho(A \cap B \cap D) - \rho(A \cap B)$$

Met deze ongelijkheden wordt het volgende afgeleid:

$$\begin{aligned}
\rho(A \cap B \cap C \cap D \cap E) &= \rho(A \cap B \cap C \cap D) + \rho(A \cap B \cap C \cap E) && (M)\\
&\quad -\rho((A \cap B \cap C \cap D) + (A \cap B \cap C \cap E)) \\
&\geq \rho(A \cap B \cap C \cap D) + \rho(A \cap B \cap C \cap E) - \rho(A \cap B \cap C) && (R)\\
&\geq \rho(A \cap B \cap C) + \rho(A \cap B \cap D) - \rho(A \cap B) && (I_2)\\
&\quad +\rho(A \cap B \cap C) + \rho(A \cap B \cap E) - \rho(A \cap B) \\
&\quad -\rho(A \cap B \cap C) \\
&\geq \rho(A \cap B) + \rho(C) - \rho(A+C) - \rho(B+C) + \rho(A+B+C) && (I_1)\\
&\quad +\rho(A \cap B) + \rho(D) - \rho(A+D) - \rho(B+D) + \rho(A+B+D) \\
&\quad +\rho(A \cap B) + \rho(E) - \rho(A+E) - \rho(B+E) + \rho(A+B+E) \\
&\quad -\rho(A \cap B) - \rho(A \cap B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(A \cap B \cap C \cap D \cap E) \;\geq\; & \rho(A)+\rho(B)+\rho(C)+\rho(D)+\rho(E)-\rho(A+B)-\rho(A+C) \quad (M)\\ & -\rho(A+D)-\rho(A+E)-\rho(B+C)-\rho(B+D)-\rho(B+E)\\ & +\rho(A+B+C)+\rho(A+B+D)+\rho(A+B+E);\end{aligned}$$

dit geeft:

$$\begin{aligned}\rho(A \cap B \cap C \cap D \cap E) \;\geq\; & \rho(A)+\rho(B)+\rho(C)+\rho(D)+\rho(E)-\rho(A+B)-\rho(A+C)\\ & -\rho(A+D)-\rho(A+E)-\rho(B+C)-\rho(B+D)-\rho(B+E)\\ & +\rho(A+B+C)+\rho(A+B+D)+\rho(A+B+E). \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Maar tevens geldt:

$$\begin{aligned}\rho(A \cap B \cap C \cap D \cap E) \;\leq\; & \rho(C \cap D \cap E)) \;=\; \rho(C)+\rho(D \cap E)-\rho(C+(D \cap E)) && (R, M)\\ =\; & \rho(C)+\rho(D)+\rho(E)-\rho(D+E)-\rho(C+(D \cap E)) && (M)\\ \leq\; & \rho(C)+\rho(D)+\rho(E)-\rho(D+E)-\rho(C) && (R)\\ \leq\; & \rho(C)+\rho(D)+\rho(E)-\rho(C+D+E). && (M)\ (4.2)\end{aligned}$$

Het combineren van (4.1) en (4.2) geeft

$$\begin{aligned}&\rho(A)+\rho(B)+\rho(A+B+C)+\rho(A+B+D)+\rho(A+B+E)+\rho(C+D+E)\\ &\leq\; \rho(A+B)+\rho(A+C)+\rho(A+D)+\rho(A+E)+\rho(B+C)+\rho(B+D)+\rho(B+E) \quad (4.3)\end{aligned}$$

Als $X_1, X_2, \ldots$ eindige deelverzamelingen van een vectorruimte V zijn, dan is $\rho(X_i) = \rho(X_i')$ en $\rho(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k) = \rho(X_1' + X_2' + \ldots + X_k')$, waarbij X_i' de deelruimten opgespannen door X_i zijn. Zo is de volgende stelling bewezen.

Stelling 4.1. *Voor alle deelverzamelingen X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 van een representatieve matroïde (E, ρ), geldt dat*

$$\begin{aligned}&\rho(X_1)+\rho(X_2)+\rho(X_1 \cup X_2 \cup X_3)+\rho(X_1 \cup X_2 \cup X_4)+\rho(X_1 \cup X_2 \cup X_5)+\rho(X_3 \cup X_4 \cup X_5)\\ &\leq\; \rho(X_1 \cup X_2)+\rho(X_1 \cup X_3)+\rho(X_1 \cup X_4)+\rho(X_1 \cup X_5)+\rho(X_2 \cup X_3)+\rho(X_2 \cup X_4)+\rho(X_2 \cup X_5) \quad (4.4)\end{aligned}$$

4.2 Ingleton voor N deelruimten

Propositie 4.2. *Voor alle deelruimten $V_1, V_2, \ldots, V_N$ van een vectorruimte V geldt voor alle $N \geq 4$ met $N \in \mathbb{N}$*

$$\rho(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_N) \geq \sum_{i=1}^{N} \rho(V_i) - \sum_{i=2}^{N} \rho(V_1 + V_i) - \sum_{i=3}^{N} \rho(V_2 + V_i) + \sum_{i=3}^{N} \rho(V_1 + V_2 + V_i)$$

Bewijs.
We bewijzen eerst met volledige inductie dat voor alle $N \geq 3$ met $N \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\rho(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_N) \geq \sum_{i=3}^{N} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) - (N-3)\rho(V_1 \cap V_2)$$

Voor $N = 3$ geldt:

$$\rho(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \geq \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_3) - 0 \cdot \rho(V_1 \cap V_2) = \textstyle\sum_{i=3}^{N} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) - (N-3)\rho(V_1 \cap V_2)$$

Voor $N = 4$ geldt:

$$\begin{aligned} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) &\geq \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_4) - \rho(V_1 \cap V_2) \\ &= \sum_{i=3}^{N} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) - (N-3)\rho(V_1 \cap V_2) \end{aligned}$$

Stel het geldt voor N en $N-1$, dan is

$$\begin{aligned} \rho(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_{N+1}) &\geq \rho(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_N) + \rho(V_1 \cap \ldots \cap V_{N-1} \cap V_{N+1}) \\ &\quad -\rho(V_1 \cap \ldots \cap V_{N-1}) \\ &\geq \sum_{i=3}^{N} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) - (N-3)\rho(V_1 \cap V_2) + \sum_{i=3}^{N-1} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) \\ &\quad +\rho(V_1 \cap V_2 \cap V_{N+1}) - (N-3)\rho(V_1 \cap V_2) - \sum_{i=3}^{N-1} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) \\ &\quad +(N-1-3)\rho(V_1 \cap V_2) \\ &= \sum_{i=3}^{N+1} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) - (N-2)\rho(V_1 \cap V_2) \\ &= \sum_{i=3}^{N+1} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) - (N+1-3)\rho(V_1 \cap V_2) \end{aligned}$$

Dus geldt voor alle $N \geq 3$ met $N \in \mathbb{N}$:

$$\rho(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_N) \geq \sum_{i=3}^{N} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) - (N-3)\rho(V_1 \cap V_2)$$

We weten dat voor alle deelruimten A,B en C geldt:

$$\rho(A \cap B \cap C) \geq \rho(A \cap B) + \rho(C) - \rho(A + C) - \rho(B + C) + \rho(A + B + C)$$

Dus:

$$\begin{aligned}
\rho(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_N) \;&\geq\; \sum_{i=3}^{N} \rho(V_1 \cap V_2 \cap V_i) - (N-3)\rho(V_1 \cap V_2) \\
&\geq\; \sum_{i=3}^{N} \Big(\rho(V_1 \cap V_2) + \rho(V_i) - \rho(V_1 + V_i) - \rho(V_2 + V_i) + \rho(V_1 + V_2 + V_i)\Big) - (N-3)\rho(V_1 \cap V_2) \\
&=\; \rho(V_1 \cap V_2) + \sum_{i=3}^{N} \Big(\rho(V_i) - \rho(V_1 + V_i) - \rho(V_2 + V_i) + \rho(V_1 + V_2 + V_i)\Big) \\
&=\; \rho(V_1) + \rho(V_2) - \rho(V_1 + V_2) + \sum_{i=3}^{N} \Big(\rho(V_i) - \rho(V_1 + V_i) - \rho(V_2 + V_i) + \rho(V_1 + V_2 + V_i)\Big) \\
&=\; \sum_{i=1}^{N} \rho(V_i) - \sum_{i=2}^{N} \rho(V_1 + V_i) - \sum_{i=3}^{N} \rho(V_2 + V_i) + \sum_{i=3}^{N} \rho(V_1 + V_2 + V_i) \qquad \square
\end{aligned}$$

Propositie 4.3. *Voor alle deelruimten* $V_1, V_2, \ldots, V_N$ *van een vectorruimte* V *geldt voor alle* $N \geq 4$ *met* $N \in \mathbb{N}$

$$\rho(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_N) \;\leq\; \sum_{i=3}^{N} \rho(V_i) - \rho(V_3 + V_4 + \ldots + V_N)$$

Bewijs
Voor $N = 4$ geldt:

$$\rho(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) \;\leq\; \rho(V_3 \cap V_4) \;=\; \rho(V_3) + \rho(V_4) - \rho(V_3 + V_4)$$

Stel de propositie geldt voor N, dan is

$$\begin{aligned}
&\rho(V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1}) \\
&\quad=\; \rho(V_{N+1}) + \rho(V_1 \cap \ldots \cap V_N) - \rho((V_1 \cap \ldots \cap V_N) + V_{N+1}) \\
&\quad\leq\; \rho(V_{N+1}) + \sum_{i=3}^{N} \rho(V_i) - \rho(V_3 + V_4 + \ldots + V_N) - \rho((V_1 \cap \ldots \cap V_N) + V_{N+1}) \\
&\quad\leq\; \sum_{i=3}^{N+1} \rho(V_i) - \rho(V_3 + V_4 + \ldots + V_N) - \rho(V_{N+1}) \\
&\quad\leq\; \sum_{i=3}^{N+1} \rho(V_i) - \rho(V_3 + V_4 + \ldots + V_{N+1})
\end{aligned}$$

Dus voor alle $N \geq 4$ met $N \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\rho(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_N) \;\leq\; \sum_{i=3}^{N} \rho(V_i) - \rho(V_3 + V_4 + \ldots + V_N) \qquad \square$$

Uit propositie 4.2 en 4.3 volgt:

$$\sum_{i=1}^{N}\rho(V_i)-\sum_{i=2}^{N}\rho(V_1+V_i)-\sum_{i=3}^{N}\rho(V_2+V_i)+\sum_{i=3}^{N}\rho(V_1+V_2+V_i) \;\leq\; \sum_{i=3}^{N}\rho(V_i)-\rho(V_3+V_4+\ldots+V_N)$$

Zo is tevens de volgende stelling bewezen

Stelling 4.4. *Voor alle deelverzamelingen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ van een representatieve matroïde (E, ρ), geldt dat*

$$\rho(X_1)+\rho(X_2)+\rho(X_3\cup X_4\cup\ldots\cup X_N)+\sum_{i=3}^{N}\rho(X_1\cup X_2\cup X_i) \;\leq\; \sum_{i=2}^{N}\rho(X_1\cup X_i)+\sum_{i=3}^{N}\rho(X_2\cup X_i) \tag{4.5}$$

Het zou leuk zijn om te weten of deze generalisering ook daadwerkelijk iets toevoegt aan de oorspronkelijke Ingleton ongelijkheid. Om dit te controleren zou een computerprogramma geschreven kunnen worden die gestructureerd matroïden creëert die niet aan deze ongelijkheid voldoen en te kijken of er matroïden bij zitten die wel aan de oorspronkelijke ongelijkheid van Ingleton voldoet. Als deze gevonden kan worden volgt de nieuwe ongelijkheid niet direct uit de Ingleton ongelijkheid.

Er is recentelijk vrij veel gepubliceerd op dit onderwerp. In [5] wordt ook een generalisatie gegeven voor de Ingleton ongelijkheid. Deze anders is dan 4.5. Verder is er in [6] een complete lijst gegeven van 24 nieuwe ongelijkheden op vijf deelruimten. Hier staat 4.4 ook tussen in een andere notatie.

Bibliografie

[1] J. G. Oxley: *Matroid Theory*, Oxford University Press, New York (1992)

[2] A. Ingleton: *Representation of Matroids*, Londen: Academic Press, p149-167 (1971)

[3] D. Mayhew, G. F. Royle: *Matroids with nine elements*, Journal of Combinatorial Theory, p415-431 Series B 98 (2007)

[4] A. beutelspacher, U. Rosenbaum: *Projective Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge (1998)

[5] R. Kinser: *New Inequalities For Subspace Arrangements*, arXiv:0905.1519v3 (juni 2009)

[6] R. Doughterty, C. Freiling, K. Zeger: *Linear Rank Inequalities on Five or More Variables*, arXiv:0910.0284v2 (Oct 2009)