

## BACHELOR

### Lopende golven

Frederix, K.I.M.

*Award date:*  
2004

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

#### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Bachelorproject  
Lopende golven

Katrijn Frederix

17 augustus 2004

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Beschrijving van het probleem</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Lopende golven</b>	<b>6</b>
3.1	Bepalen van evenwichtspunten . . . . .	6
3.2	Lineariseren van de evenwichten . . . . .	6
3.2.1	Stabiliteit voor $\mathbf{u}_{e1} = (0, 0)$ . . . . .	7
3.2.2	Stabiliteit voor $\mathbf{u}_{e2} = (1, 0)$ . . . . .	8
3.3	Fasevlak . . . . .	9
3.4	Bestaan van de lopende golf . . . . .	9
3.5	Tekenen van banen . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Algemeen beginwaarde probleem</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Bibliografie</b>	<b>17</b>

# 1 Inleiding

Naar aanleiding van het artikel “Etude de l’équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique”, gepubliceerd door A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, N. Piscounoff in 1937, ga ik de existentie van de lopende golf voor een speciaal geval van de reactie-diffusie-vergelijking aantonen. De Fisher vergelijking is een ander speciaal geval, deze vergelijking is één van de meest fundamentele modellen in de biologie en de ecologie.

Het artikel (zie [1]) heeft als handleiding gediend voor mijn onderzoek en heeft na al die jaren zijn waarde nog niet verloren. Het behandelt een groot gedeelte van de analyse die ik de afgelopen jaren in mijn studie ben tegengekomen, wel op een andere manier dan tegenwoordig maar de basiseeën blijven hetzelfde.

Het doel van het project is het bepalen van een voorwaarde op de snelheid,  $\lambda$ , zodat de lopende golf een oplossing is van

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + f(v)$$

met  $k$  een positieve constante. De functie  $f(v)$  waar voorwaarden voor gelden, kan verschillende vormen aannemen, wij nemen  $f(v) = av(1-v)^2$  met  $a$  een positieve constante. Bij de Fisher vergelijking is  $f(v) = v(1-v)$ . M.b.v het fasevlak hebben we aangetoond dat voor  $\lambda \geq \sqrt{4ak}$  er een lopende golf bestaat en dat de baan in het fasevlak een oplossing is van de vergelijking

$$\begin{cases} \lambda \frac{dv}{dz} = k \frac{d^2v}{dz^2} + f(v) & \text{met } -\infty < z < +\infty \\ v(-\infty) = 0 \\ v(+\infty) = 1 \end{cases}$$

In het tweede deel gaan we voor het algemene beginwaarde probleem kijken of er een oplossing bestaat, dit doen we m.b.v. een iteratief proces waardoor we een rij functies construeren. We laten dan zien dat deze rij functies uniform convergeert.

Dit project werd begeleid door Hans van Duijn, waarvoor dank.

## 2 Beschrijving van het probleem

Om te beginnen nemen we de diffusie-vergelijking in twee dimensies. Deze ziet er als volgt uit

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

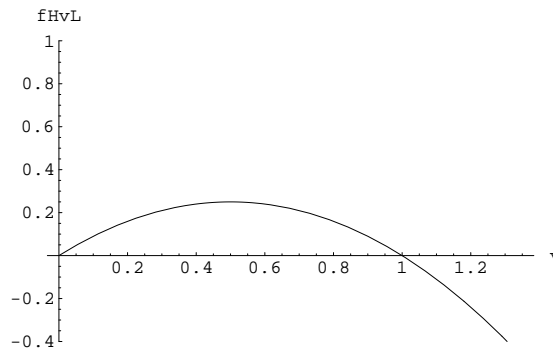
met  $k$  een positieve constante. Waarbij  $x$  en  $y$  de coördinaten zijn van een punt in het vlak,  $t$  is de tijd en  $v$  de dichtheid van een stof in een punt  $(x, y)$  op tijdstip  $t$ . Stel dat buiten de diffusie er ook een verhoging van de hoeveelheid stof plaats heeft. Deze verhoging hangt af van de dichtheid  $v$ . We verkrijgen nu de volgende klasse van differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f(v)$$

Waarbij we alleen geïnteresseerd zijn in waarden van de reactie term  $f(v)$  met  $v \geq 0$ . We veronderstellen dat  $f(v)$  een continue functie is waarvan alle noodzakelijke afgeleide met betrekking op  $v$  bestaan en dat  $f(v)$  voldoet aan de voorwaarden :

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ f(v) > 0 & 0 < v < 1 \\ f'(0) = a \\ f'(v) < a & 0 < v \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

met  $a$  een positieve constante. Dus  $f(v)$  ziet er uit als op Figuur 1.

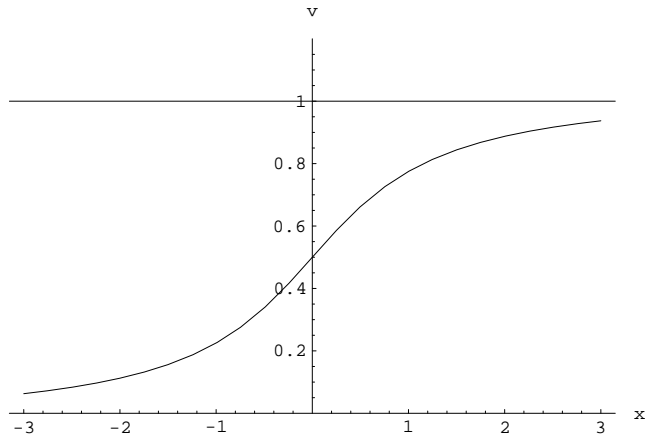


Figuur 1: Voorbeeld van  $f(v)$

We beschouwen alleen oplossingen die voldoen aan de voorwaarde  $0 \leq v \leq 1$  en we beperken ons tot het één dimensionale geval, dus dat de dichtheid  $v$  niet afhangt van de  $y$ -coördinaat. We verkrijgen dan de partiële niet-lineaire vergelijking :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + f(v) \quad (2)$$

Vervolgens veronderstellen we dat op begintijdstip,  $t = 0$ , voor  $x < s$ , de dichtheid verdwijnt en voor  $x > r \geq s$ , zijn grootst mogelijke waarde  $v = 1$  bereikt. We zoeken naar een lopende



Figuur 2: Lopende golf

golf die er uit ziet als op Figuur 2.

Om een oplossing van vergelijking (2) te bepalen onderzoeken we de kromme waarbij de vorm, die de afhankelijkheid tussen  $v$  en  $x$  voorstelt, niet verandert terwijl de kromme zich verplaatst met snelheid  $\lambda$ . Zo een oplossing is van de vorm

$$v(x, t) = v(x + \lambda t)$$

We beschouwen nu  $v$  als een functie van één variabele, stel  $z = x + \lambda t$ . De snelheid van de golf,  $\lambda$ , is op voorhand niet gekend. Omdat het systeem geen voorgeschreven richting heeft, nemen we  $\lambda > 0$  dan geldt dat de baan van rechts naar links zal gaan. Door de transformatie,  $z = x + \lambda t$ , bekomen we

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = \lambda \frac{dv}{dz} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 v}{dz^2} \end{cases} \quad (3)$$

Als we (3) vervangen in (2) dan bekomen we een gewone tweede orde differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} \lambda \frac{dv}{dz} = k \frac{d^2 v}{dz^2} + f(v) & \text{met } -\infty < z < +\infty \\ v(-\infty) = 0 \\ v(+\infty) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

met  $\lambda > 0$ ,  $k > 0$  en waarbij  $f(v)$  voldoet aan de voorwaarden in (1).

Het doel is het vinden van de relatie tussen  $\lambda$ ,  $k$  en  $a$  waarvoor de vergelijking (4) een oplossing heeft die voldoet aan de voorwaarden

$$\begin{aligned} & 0 \leq v(z) \leq 1 \\ v(z) \rightarrow 1 & \quad \text{voor} \quad z \rightarrow +\infty \\ v(z) \rightarrow 0 & \quad \text{voor} \quad z \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (5)$$

### 3 Lopende golven

Om de relatie te vinden gaan we eerst de vergelijking (4) schrijven als een stelsel van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen. Stel

$$\begin{cases} v = v \\ \frac{dv}{dz} = w \end{cases}$$

m.b.v. (4) krijgen we dan het stelsel

$$\begin{cases} \frac{dv}{dz} = w \\ \lambda w = k \frac{dw}{dz} + f(v) \end{cases}$$

Of in matrixvorm

$$\begin{pmatrix} \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \frac{\lambda w - f(v)}{k} \end{pmatrix}$$

Het gedrag van de oplossing hangt af van de vorm van de functie  $f(v)$ . We gaan het geval bestuderen als  $f(v) = av(1-v)^2$  met  $a$  een positieve constante. In matrixvorm bekommen we :

$$\begin{pmatrix} \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \frac{\lambda w - av(1-v)^2}{k} \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (6)$$

met  $\mathbf{u}=(v,w)$ . Om het fasevlak te bestuderen gaan we eerst de evenwichtspunten bepalen, zodat we een beter idee hebben, hoe de banen zich gedragen rond deze punten.

#### 3.1 Bepalen van evenwichtspunten

Nu gaan we de evenwichtspunten of kritieke punten bepalen. Dit zijn de punten waarvoor geldt  $\mathbf{F}'(\mathbf{u}_e)=0$ . M.a.w.

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\lambda w - av(1-v)^2}{k} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w = 0 \\ -av(1-v)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} w = 0 \\ v = 1 \end{cases}$$

We hebben dus twee evenwichtspunten,  $\mathbf{u}_{e1}=(0,0)$  en  $\mathbf{u}_{e2}=(1,0)$ .

#### 3.2 Lineariseren van de evenwichten

De lineariseringstechniek is een methode om de stabiliteit van een evenwicht te bepalen (zie [3]). Hierbij zullen we de differentiaalvergelijking in de buurt van het evenwicht benaderen door een lineaire vergelijking. Om te lineariseren rond de evenwichten, moet je eerst de functionaalmatrix of matrix van Jacobi bepalen. Deze matrix bevat de partiële afgeleiden als elementen.

Om de functionaalmatrix te kunnen uitrekenen moet  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  totaal differentieerbaar zijn, dus m.a.w. de functie  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  moet continu en continu differentieerbaar in  $\mathbf{u}$  zijn, op het hele definitiegebied. Dit is waar voor  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ , dus we kunnen de functionaalmatrix voor (6) berekenen en zo bekomen we

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-a(1-v)^2 + 2av(1-v)}{k} & \frac{\lambda}{k} \end{pmatrix}$$

### 3.2.1 Stabiliteit voor $\mathbf{u}_{e1} = (0, 0)$

We krijgen voor het evenwichtspunt  $\mathbf{u}_{e1} = (0, 0)$  de volgende functionaalmatrix

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}_{e1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a}{k} & \frac{\lambda}{k} \end{pmatrix} = A$$

Rond  $\mathbf{u}_{e1} = (0, 0)$  kunnen we dus schrijven

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} + r(\mathbf{u})$$

waarbij  $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow 0} \left( \frac{\|r(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} \right) = 0$ . Dit is de gelineariseerde vergelijking.

Om de stabiliteit voor het punt  $\mathbf{u}_{e1} = (0, 0)$  te bepalen moeten we de eigenwaarde zoeken van  $\mathbf{F}'(\mathbf{u}_{e1}) = A$ . We nemen  $\mu$  als de eigenwaarde en berekenen  $\det(A - \mu I) = 0$ .

$$\det(A - \mu I) = \begin{vmatrix} -\mu & 1 \\ -\frac{a}{k} & \frac{\lambda}{k} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

Dit geeft de karakteristieke vergelijking :

$$\mu^2 - \frac{\lambda}{k}\mu + \frac{a}{k} = 0$$

Deze tweede graadsvergelijking heeft als discriminant  $D = \frac{\lambda^2}{k^2} - 4\frac{a}{k}$ . Er zijn drie gevallen te onderscheiden.

- $D > 0$

Dan geldt  $\lambda^2 > 4ak$  zodat we als eigenwaarden krijgen

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4ak}}{2k} \\ \mu_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4ak}}{2k} \end{cases} \quad (7)$$

De eigenwaarden,  $\mu_1$  en  $\mu_2$ , zijn allebei positief, dus  $\mathbf{u}_{e1} = (0, 0)$  is een instabiel knooppunt.

- $D = 0$

We hebben nu de eigenwaarde  $\mu = -\frac{\lambda}{2k}$ . Daar  $\lambda$  en  $k$  positief zijn, geldt  $\mu < 0$  en dat  $\mathbf{u}_{e1} = (0, 0)$  een instabiel knooppunt is.



- $D < 0$

Dan geldt  $\lambda^2 < 4ak$  zodat we de als eigenwaarden krijgen

$$\begin{cases} \mu'_1 = \frac{\lambda + i\sqrt{-\lambda^2 + 4ak}}{2k} \\ \mu'_2 = \frac{\lambda - i\sqrt{-\lambda^2 + 4ak}}{2k} \end{cases}$$

De reële delen van  $\mu_1$  en  $\mu_2$  zijn allebei positief, dus  $\mathbf{u}_{e1} = (0, 0)$  is een instabiel spiraalpunt.

Om de eigenvectoren te bepalen, moeten we het stelsels  $(A - \mu I)k = 0$  oplossen. Voor de eerste eigenwaarden  $\mu_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4ak}}{2k}$  bekomen we het volgende stelsel.

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 & 1 \\ -\frac{a}{k} & \frac{\lambda}{k} - \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\mu_1 & 1 \\ 0 & \frac{\lambda\mu_1}{k} - \mu_1^2 - \frac{a}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daar het element op de tweede rij in de tweede kolom  $\frac{\lambda\mu_1}{k} - \mu_1^2 - \frac{a}{k} = 0$  (want  $\mu_1$  is een oplossing van de karakteristieke vergelijking), bekomen we voor de eigenvector  $k_1 = (k_{11}, k_{12}) = (1, \mu_1)$ . Op analoge manier bekomen we voor de eigenwaarde  $\mu_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4ak}}{2k}$ ,  $\mu'_1 = \frac{\lambda + i\sqrt{-\lambda^2 + 4ak}}{2k}$  en  $\mu'_2 = \frac{\lambda - i\sqrt{-\lambda^2 + 4ak}}{2k}$  de eigenvectorer,  $k_2 = (k_{21}, k_{22}) = (1, \mu_2)$ ,  $k'_1 = (k'_{11}, k'_{12}) = (1, \mu'_1)$  en  $k'_2 = (k'_{21}, k'_{22}) = (1, \mu'_2)$ .

### 3.2.2 Stabiliteit voor $\mathbf{u}_{e2} = (1, 0)$

We krijgen voor het evenwichtspunt  $\mathbf{u}_{e2} = (1, 0)$  de volgende functionaalmatrix

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}_{e2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\lambda}{k} \end{pmatrix} = B$$

Rond  $\mathbf{u}_{e2} = (1, 0)$  kunnen we dus schrijven

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = B\mathbf{u} + r(\mathbf{u})$$

waarbij  $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow 0} \left( \frac{\|r(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} \right) = 0$ . Dit is de gelineariseerde vergelijking.

Om de stabiliteit voor het punt  $\mathbf{u}_{e2} = (1, 0)$  te bepalen moeten we de eigenwaarde zoeken van  $\mathbf{F}'(\mathbf{u}_{e2}) = B$ . We nemen  $\tau$  als de eigenwaarde en berekenen

$$\det(B - \tau I) = \begin{vmatrix} -\tau & 1 \\ 0 & \frac{\lambda}{k} - \tau \end{vmatrix} = 0$$

Dit geeft de volgende karakteristieke vergelijking :

$$\tau^2 - \frac{\lambda}{k}\tau = 0$$

Als eigenwaarden krijgen we

$$\begin{cases} \tau_1 = 0 \\ \tau_2 = \frac{\lambda}{k} \end{cases}$$

Daar er een eigenwaarde nul is kan men niks zeggen over de stabiliteit van het evenwichtspunt  $\mathbf{u}_{e2} = (1, 0)$ .

### 3.3 Fasevlak

Na het bepalen van de aard van de evenwichtspunten, kijken we naar wat voor banen er kunnen zijn in het fasevlak en of er een kromme voldoet aan vergelijking (4) en aan de voorwaarden (5). Bij het tekenen van de oplossingen als banen in het fasevlak speelt, naast het niet kunnen snijden van de banen, het tekenschema van het rechterlid van de vergelijking een belangrijke rol (zie [3]). We moeten gaan kijken naar

$$\begin{cases} \frac{dv}{dz} = F_1(v, w) \\ \frac{dw}{dz} = F_2(v, w) \end{cases}$$

We beschouwen het eerste kwadrant.

Voor  $F_1(v, w) = w$  geldt in het eerste kwadrant dat  $\frac{dv}{dz} > 0$ . De banen bewegen dan naar rechts.

Voor  $F_2(v, w) = \frac{\lambda w - av(1-v)^2}{k}$  geldt in het eerste kwadrant dat als  $\frac{dw}{dz} = \frac{\lambda w - av(1-v)^2}{k} <$

0 dat de banen naar beneden gaan en als  $\frac{dw}{dz} = \frac{\lambda w - av(1-v)^2}{k} > 0$  dat de banen naar boven gaan.

De isoclinen, dit zijn de krommen gedefinieerd door  $F_1 = 0$  en  $F_2 = 0$ , spelen ook een belangrijke rol, omdat zij een scheiding aanbrengen tussen de verschillende gebieden in het fasevlak.

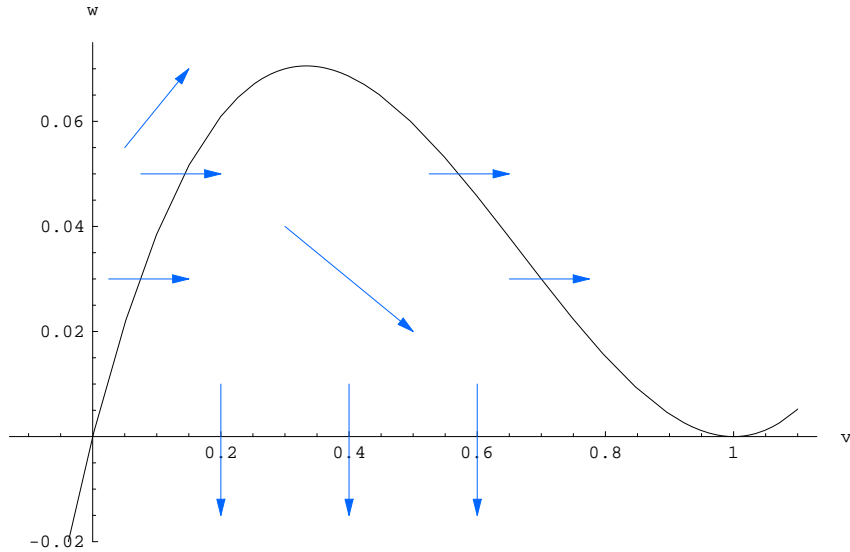
In ons geval zijn de isoclinen  $w = 0$  en  $w = \frac{av(1-v)^2}{\lambda}$ . Bij  $w = 0$  gaan de banen er verticaal door en bij de andere isocline gaan de banen er horizontaal door. Het fasevlak ziet er uit als in Figuur 3.

### 3.4 Bestaan van de lopende golf

We moeten nu nagaan of er een baan is die voor  $z \rightarrow -\infty$  in de oorsprong is en voor  $z \rightarrow +\infty$  naar het punt  $(1, 0)$  toe gaat. Voor  $\lambda^2 < 4ak$  is de oorsprong een spiraalpunt. Oplossingen die uit zo een punt vertrekken zullen rond het punt draaien. Dit is geen gewenste oplossing, want dan worden  $v < 0$  en  $w < 0$ . We stellen dus de voorwaarde dat

$$\lambda^2 \geq 4ak \tag{8}$$

moet gelden.



Figuur 3: Fasevlak

Om het gemakkelijker te maken gaan we nu een mogelijke baan volgen in de omgekeerde richting. Stel daarvoor  $\zeta = -z$ . Dan krijgen we als stelsels van eerste orde differentiaalvergelijkingen :

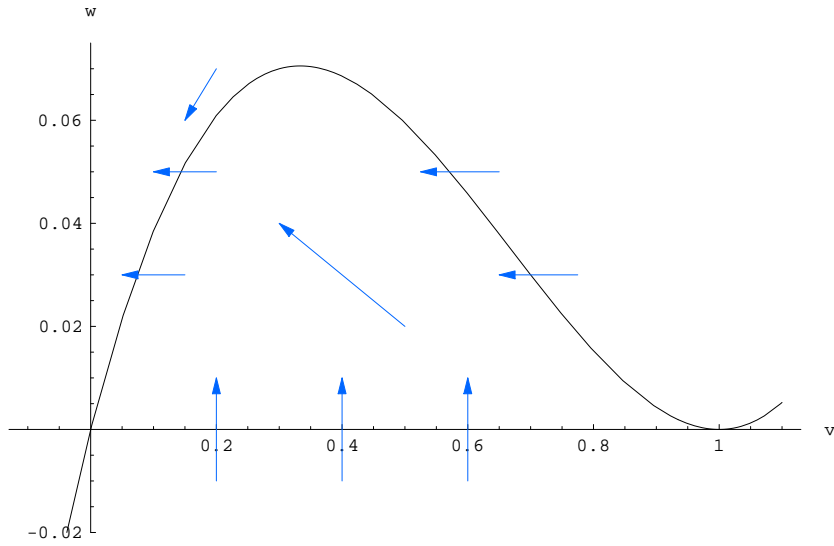
$$\begin{cases} \frac{dv}{d\zeta} = -w \\ \frac{dw}{d\zeta} = \frac{f(v) - \lambda w}{k} \end{cases} \quad (9)$$

met  $v(+\infty) = 0$  en  $v(-\infty) = 1$ . Dit impliceert dat het richtingsveld ook om draait, zie Figuur 4.

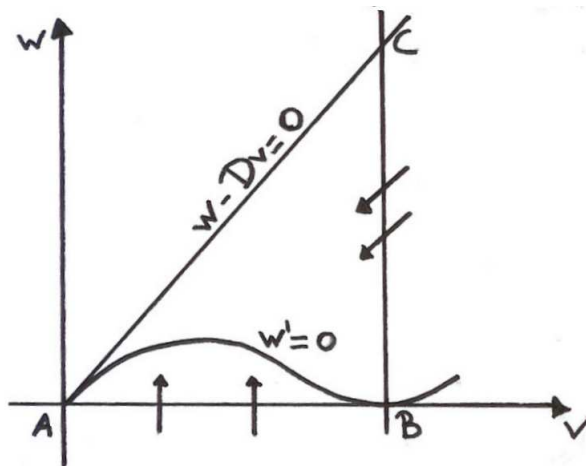
We beschouwen nu een rechthoekige driehoek  $ABC$ , waarbij  $A = (0, 0)$  het eerste evenwichtspunt is,  $B = (1, 0)$  het tweede evenwichtspunt en  $AC$  de rechte  $w = Dv$  is met  $D > 0$ . We weten dat er geldt  $\frac{dw}{d\zeta} > 0$  en  $\frac{dv}{d\zeta} = 0$  langs de rechte  $AB$ , zodat het richtingsveld langs die rechte verticaal en naar boven is gericht. Langs de rechte  $BC$  zijn alle banen dalend en naar links gericht omdat  $\frac{dw}{d\zeta} < 0$  en  $\frac{dv}{d\zeta} < 0$ . Zie Figuur 5.

Als we nu een baan volgen, beginnend in  $\zeta = -\infty$  in het punt  $B$  en in de richting zodat we de rechthoekige driehoek  $ABC$  binnen gaan. Vertrekken boven de isocline  $w = \frac{av(1-v)^2}{\lambda}$  is niet mogelijk, want dan zou de baan naar beneden gedrukt worden wegens het richtingsveld en de baan zou de rechte  $BC$  niet kunnen kruisen. Dus we vertrekken op een isocline of wel tussen de twee isoclinen in. Wegens het richtingsveld gaan de banen tussen de isoclinen naar links en zijn ze stijgend. De banen kunnen niet weg langs de rechte  $AB$  wegens  $\frac{dw}{d\zeta} > 0$  en  $\frac{dv}{d\zeta} = 0$ .

Nu moeten we nog gaan aantonen dat de baan, die we aan het volgen zijn, voor  $\zeta \rightarrow +\infty$



Figuur 4: Omgekeerd fasevlak met  $z = -\zeta$



Figuur 5: Omgekeerd fasevlak met  $z = -\zeta$  met driehoek

naar  $A$  toe gaat. Dit zal mogelijk zijn, want we kunnen een rechte,  $w = \frac{\lambda}{2k}v$ , construeren zodat er geen banen zijn die deze rechte snijden.

Beschouw nu de rechte  $AC$ , die wordt voorgesteld door de vergelijking  $w = Dv$  met  $D > 0$ . Als een kromme de rechte  $AC$  kruist van rechts naar links op  $\zeta = \zeta_0$  dan gaat de uitdrukking  $w - Dv$  vermeerderen van een negatieve waarde voor  $\zeta < \zeta_0$  aan de rechterkant van  $AC$  tot een positieve waarde voor  $\zeta > \zeta_0$  aan de linkerkant van  $AC$ . Stel dat er nu een baan bestaat die de driehoek  $ABC$  verlaat door de rechte  $AC$  in het punt  $(v(\zeta_0), w(\zeta_0))$ , dan moet er gelden

$$\frac{dw}{d\zeta}(\zeta_0) - D\frac{dv}{d\zeta}(\zeta_0) > 0 \quad \text{en} \quad w(\zeta_0) - Dv(\zeta_0) = 0$$

Aan de andere kant, geldt er ook wegens het stelsel van eerste orde differentiaalvergelijkingen (9) dat

$$\frac{dw}{d\zeta}(\zeta) - D\frac{dv}{d\zeta}(\zeta) = \frac{av(1-v)^2 - \lambda w}{k} + Dw = \frac{a}{k}v(1-v)^2 + \left(D - \frac{\lambda}{k}\right)w$$

In het bijzonder, geldt er langs de rechte  $AC$ :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta}(\zeta_0) - D\frac{dv}{d\zeta}(\zeta_0) &= \frac{a}{k}v(\zeta_0)\left(1 - v(\zeta_0)\right)^2 + \left(D - \frac{\lambda}{k}\right)w(\zeta_0) \\ &= \frac{a}{k}v(\zeta_0)\left(1 - v(\zeta_0)\right)^2 + \left(D - \frac{\lambda}{k}\right)Dv(\zeta_0) \\ &= v(\zeta_0)\left(D\left(D - \frac{\lambda}{k}\right) + \frac{a}{k}\left(1 - v(\zeta_0)\right)^2\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Voor  $D = \frac{\lambda}{2k}$  geldt dan:

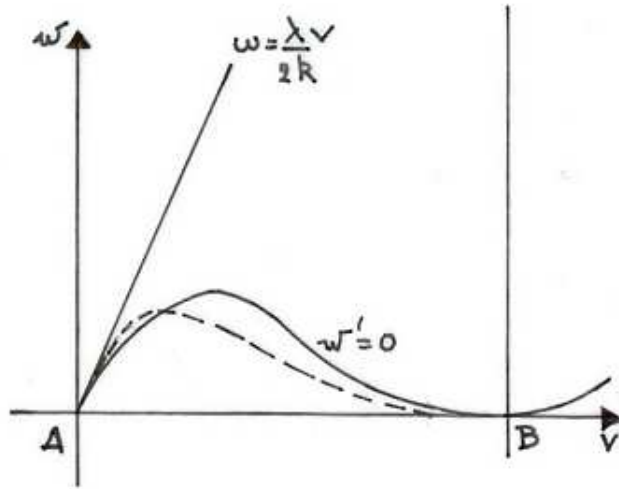
$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta}(\zeta_0) - D\frac{dv}{d\zeta}(\zeta_0) &= v(\zeta_0)\left(\frac{\lambda}{2k}\left(\frac{\lambda}{2k} - \frac{\lambda}{k}\right) + \frac{a}{k}\left(1 - v(\zeta_0)\right)^2\right) \\ &= v(\zeta_0)\left(-\frac{\lambda^2}{4k^2} + \frac{a}{k}\left(1 - v(\zeta_0)\right)^2\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Daar  $0 < \left(1 - v(\zeta_0)\right)^2 < 1$  geldt er

$$\frac{dw}{d\zeta}(\zeta_0) - D\frac{dv}{d\zeta}(\zeta_0) = v(\zeta_0)\left(-\frac{\lambda^2}{4k^2} + \frac{a}{k}\left(1 - v(\zeta_0)\right)^2\right) < 0 \quad \text{voor} \quad \lambda^2 \geq 4ak \quad (12)$$

M.a.w. voor  $\lambda^2 \geq 4ak$  kan geen enkele baan de driehoek  $ABC$  verlaten door  $w = \frac{\lambda}{2k}v$ . De rechte  $w = \frac{\lambda}{2k}v$  zal links van de isocline  $w = \frac{av(1-v)^2}{\lambda}$  liggen, want de helling van de isocline in het punt  $A = (0, 0)$  is  $\frac{a}{\lambda}$  en dit is kleiner dan de helling van de rechte,  $\frac{\lambda}{2k}$ , want  $\lambda^2 \geq 4ak$ .

Als we de baan van hierboven terug gaan volgen, deze baan startend in  $B$  ging naar links en was stijgend. Deze baan zal eerst de isocline  $w = \frac{av(1-v)^2}{\lambda}$  horizontaal snijden. Daarna zal die de rechte  $w = \frac{\lambda}{2k}v$  naderen. Daar we net hebben laten zien dat voor  $\lambda \geq \sqrt{4ak}$  er



Figuur 6: Fasevlak met baan

geen baan is die deze rechte kruist, zal de baan, die daalt, voor  $\zeta = +\infty$  wel naar het punt  $A$  moeten gaan. Op Figuur 6 kan je zien hoe de baan zou lopen van het punt  $B$  naar de oorsprong.

We hebben nu voor elke  $\lambda \geq \sqrt{4ak}$  een baan gevonden die start in het punt  $B$  voor  $\zeta = -\infty$  en eindigt in de oorsprong voor  $\zeta = +\infty$ . Als we terug transformeren,  $z = -\zeta$  bekommen we een baan die start in de oorsprong voor  $z = -\infty$  en eindigt in het punt  $B$  voor  $z = +\infty$  en dit geldt alleen als elke  $\lambda \geq \sqrt{4ak}$ . Met de voorwaarde  $\lambda \geq \sqrt{4ak}$  hebben we de relatie tussen  $\lambda$ ,  $a$ ,  $k$  bepaald waarvoor  $v(z)$  een oplossing is van (4) en voldoet aan de voorwaarden (5). We hebben voor elke  $\lambda \geq \sqrt{4ak}$  een lopende golf  $v(z) = v(z + \lambda t) = v(x, t)$  die de oplossing is van vergelijking (2).

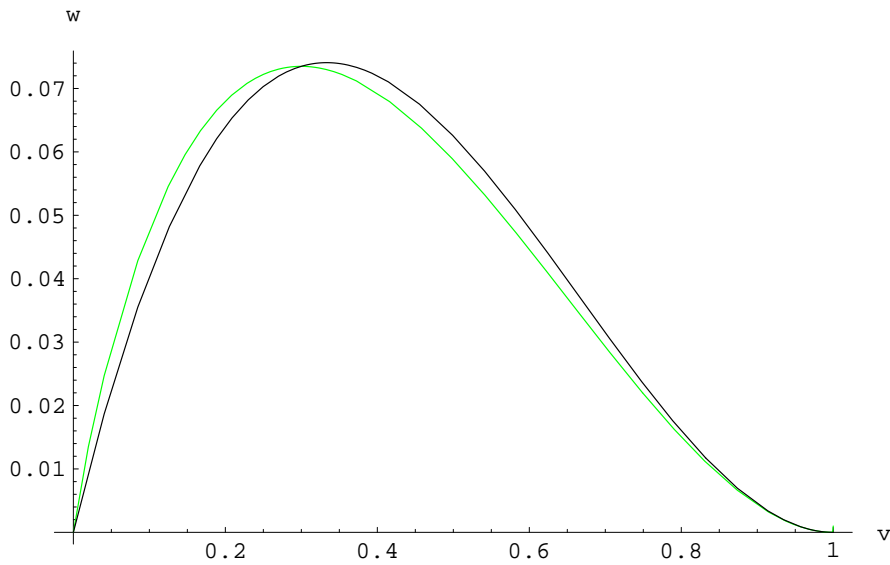
### 3.5 Teken van banen

We willen de banen expliciet gaan tekenen. We gaan voor elke  $\lambda \geq \sqrt{4ak}$  de oplossing plotten die loopt van de oorsprong  $(0, 0)$  naar het punt  $(1, 0)$ . Dit gaan we doen in het fasevlak. We hebben het volgende stelsel:

$$\begin{cases} k \frac{d^2 v}{dz^2} - \lambda \frac{dv}{dz} = -av(1-v)^2 \\ v(-\infty) = 0 \\ v(+\infty) = 1 \end{cases} \quad (13)$$

We gaan i.p.v.  $v = v(z)$  een andere variabele invoeren  $z = z(v)$ . We herschrijven alles in termen van  $v$ . Daar we weten dat in het eerste kwadrant  $\frac{dv}{dz} > 0$ , nemen we  $w(v) = \frac{dv}{dz}(z(v))$ . Dan geldt

$$\frac{dw}{dv} = \frac{d^2 v}{dz^2} \frac{dz}{dv} = \frac{d^2 v}{dz^2} \frac{1}{\frac{dv}{dz}} = \frac{d^2 v}{dz^2} \frac{1}{w}$$



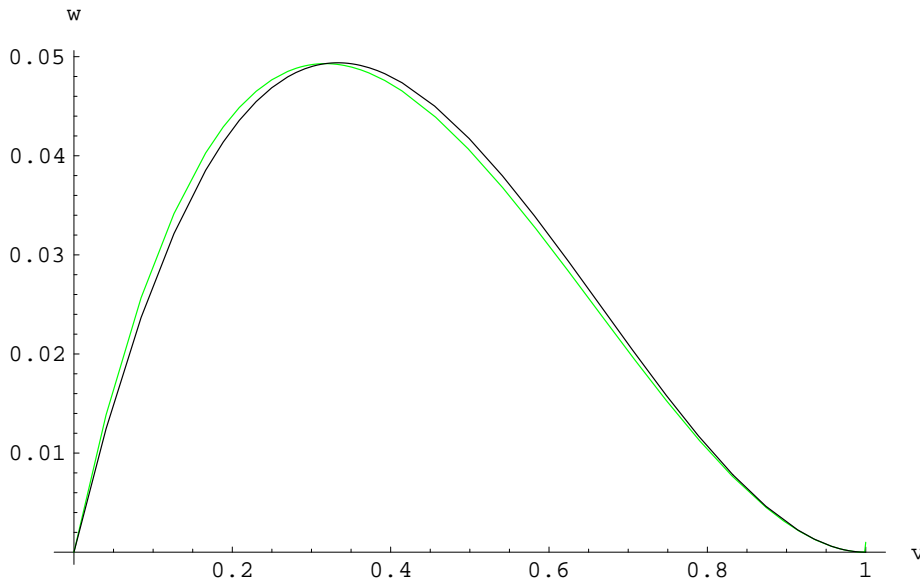
Figuur 7: Baan bij  $\lambda = 2.1$

Dan krijgen we het volgende stelsel:

$$\begin{cases} kw \frac{dw}{dv} - \lambda w = -av(1-v)^2 & 0 < v < 1 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Nu kunnen we m.b.v. Mathematica de banen plotten. We nemen  $a = 1$  en  $k = 1$ , dan bestaat er wegens vorig onderdeel een baan voor  $\lambda^2 \geq 4ak$ . In dit geval zal  $\lambda$  groter moeten zijn dan 2.

Als  $\lambda = 2$ , dit is het grensgeval, dan is er een expliciete oplossing van (14). Voor  $\lambda > 2$ , is er voor elke  $\lambda$  een andere baan en hoe groter  $\lambda$  neemt hoe dichter de baan bij de isocline  $w = \frac{v(1-v)^2}{\lambda}$  ligt en alle banen komen horizontaal aan in het punt  $B = (1, 0)$ . Zoals je ziet op Figuur 7 en Figuur 8.



Figuur 8: Baan bij grotere  $\lambda$

## 4 Algemeen beginwaarde probleem

We hebben net een speciaal geval bekijken van de partiële differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + f(v)$$

waarbij  $f(v) = av(1-v)^2$ . Waar we hebben aangetoond dat er een lopende golf als oplossing bestaat. Nu gaan we in het algemene geval kijken of er een oplossing  $v(x, t)$  bestaat die voor  $t > 0$  voldoet aan de algemene vergelijking (15) en voor  $t = 0$  gelijk is aan  $g(x)$  in alle continue punten van de functie. De algemene vergelijking waarbij we  $k = 1$  nemen, ziet eruit als volgt

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t, v) & , x \in \mathbb{R} \quad , t > 0 \\ v(x, 0) = g(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (15)$$

waarbij  $f(x, t, v)$  een continue en begrensde functie is. Om het bestaan van een oplossing van probleem (15) aan te tonen, gaan we op iteratieve manier een rij  $v_k(x, t)$  construeren waarvan we gaan laten zien dat deze rij convergeert naar  $v(x, t)$ . Om te beginnen stellen we

$$v(x, t) = v_0(x, t) + \tilde{v}_1(x, t)$$

Waarbij  $v_0(x, t)$  de oplossing is van

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & , x \in \mathbb{R} \quad , t > 0 \\ v(x, 0) = g(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (16)$$

En  $\tilde{v}_1(x, t)$  is de oplossing van

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v_0(x, t), x, t) & , x \in \mathbb{R} \quad , t > 0 \\ v(x, 0) = 0 & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (17)$$



Voor het beginwaarde probleem (16) is er een expliciete formule van de oplossing (zie [3]):

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) d\xi$$

Definieer nu  $v_1 = v_1(x, t) = v_0(x, t) + \tilde{v}_1(x, t)$ , deze functie voldoet aan

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v_0(x, t), x, t) & , x \in \mathbb{R} \quad , t > 0 \\ v(x, 0) = g(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (18)$$

De functie  $v_0(x, t)$  zorgt ervoor dat de voorwaarde  $v(x, 0) = g(x)$  geldt en de functie  $\tilde{v}_1(x, t)$  zorgt ervoor dat de reactie term  $f(v_0, x, t)$  erbij staat. Nu kunnen we het iteratie proces op gang brengen. Algemeen geldt er bij gegeven  $v_k(x, t)$  dat  $\tilde{v}_{k+1}(x, t)$  een oplossing is van

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v_k(x, t), x, t) & , x \in \mathbb{R} \quad , t > 0 \\ v(x, 0) = 0 & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (19)$$

Neem nu  $v_{k+1}(x, t) = v_0(x, t) + \tilde{v}_{k+1}(x, t)$ , dan voldoet  $v_{k+1}(x, t)$  aan

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v_k(x, t), x, t) & , x \in \mathbb{R} \quad , t > 0 \\ v(x, 0) = g(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (20)$$

De expliciete uitdrukking voor de oplossing van de inhomogene warmte vergelijking

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x, t) & , x \in \mathbb{R} \quad , t > 0 \\ v(x, 0) = 0 & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (21)$$

waarbij  $b(x, t)$  de bronterm voorstelt, wordt gegeven door (zie [4]):

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} b(\xi, \eta) \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)}{\sqrt{t-\eta}} d\xi \right) d\eta$$

In ons geval zal de bronterm  $b(x, t)$  voor gesteld worden door  $f(v_k(x, t), x, t)$ . In het algemeen geeft het iteratieve proces de integraalvergelijking:

$$v_{k+1}(x, t) = v_0(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_k(\xi, \eta), \xi, \eta) \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)}{\sqrt{t-\eta}} d\xi \right) d\eta, \quad k > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

We kiezen als startwaarde ( $k = 0$ ),  $v_0(x, t)$  de oplossing van (16). Dit bovenstaand proces definieert de rij  $\{v_k(x, t)\}_{k=0}^{\infty}$ . Nu moeten we gaan bepalen onder welke voorwaarden op  $f(v, x, t)$  deze rij gaat convergeren en welke soort convergentie we krijgen. Is het puntsgewijze of uniforme convergentie?

De rij  $\{v_k(x, t)\}_{k=0}^{\infty}$  zal uniform convergeren als  $f(v, x, t)$  uniform Lipschitz continu is met betrekking tot  $v$  en  $x$ , m.a.w.

$$|f(x_2, t, v_2) - f(x_1, t, v_1)| < L|x_2 - x_1| + L|v_2 - v_1| \quad (23)$$

waarbij  $L$  een constante is onafhankelijk van  $x$ ,  $t$  en  $v$ .

Stel nu

$$M_{i+1}(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}, s \leq t} |v_{i+1}(x, s) - v_i(x, s)|$$

dan geldt wegens de uniforme Lipschitz continuïteit (23) dat

$$v_{i+1}(x, t) - v_i(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)}{\sqrt{t-\eta}} \left(f(v_i(\xi, \eta), \xi, \eta) - f(v_{i-1}(\xi, \eta), \xi, \eta)\right) d\xi d\eta$$

We nemen de absolute waarde en bekomen :

$$|v_{i+1}(x, t) - v_i(x, t)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)}{\sqrt{t-\eta}} |f(v_i(\xi, \eta), \xi, \eta) - f(v_{i-1}(\xi, \eta), \xi, \eta)| d\xi d\eta$$

Pas nu (23) toe

$$\begin{aligned} |v_{i+1}(x, t) - v_i(x, t)| &\leq \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)}{\sqrt{t-\eta}} |v_i(\xi, \eta) - v_{i-1}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \\ &\leq \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)}{\sqrt{t-\eta}} M_i(\eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t M_i(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (24)$$

omdat  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)}{\sqrt{t-\eta}} d\xi = 2\sqrt{\pi}$ .

Als we voor  $M_0$  de bovengrens nemen van de waarden  $|g(x)|$  en  $|f(x, t, 0)|$  dan krijgen we

$$|v_0(x, t)| \leq M_0$$

Er geldt ook

$$M_1(x, t) \leq \int_0^t LM_0 d\eta \leq \int_0^t (L+1)M_0 d\eta = (L+1)M_0 t = Mt \quad (25)$$

met  $M = (L + 1)M_0$  een constante. Als we nu laten zien dat

$$M_i(x, t) \leq \frac{ML^{i-1}t^i}{i!} \quad (26)$$

dan zal de rij  $\{v_k(x, t)\}_{k=0}^\infty$  een Cauchy rij zijn. We tonen ongelijkheid (26) aan m.b.v. inductie. We weten wegens (25) dat  $M_1(x, t) \leq Mt$  met  $M \in \mathbb{R}$ . Stel dat het geldt voor  $i - 1$  dan krijgen we als inductie hypothese:

$$M_{i-1}(x, t) \leq \frac{ML^{i-2}t^{(i-1)}}{(i-1)!}$$

Voor  $i$  geldt

$$M_i(x, t) \leq \int_0^t LM_{i-1}(x, \eta) d\eta \leq L \int_0^t \frac{ML^{i-2}\eta^{(i-1)}}{(i-1)!} d\eta = \frac{ML^{i-1}t^i}{i!}$$

Dus nu hebben we ongelijkheid (26) aangetoond voor  $-\infty \leq x \leq +\infty$  en  $t > 0$ . Dus we hebben aangetoond dat de rij  $\{v_k(x, t)\}_{k=0}^\infty$  een Cauchy rij is. Als deze rij een Cauchy rij is in een Banachruimte kunnen we wegens de stelling: Een uniforme Cauchy rij functies  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  van een verzameling  $X$  naar een Banachruimte  $E$  is uniform convergent, concluderen dat de rij  $\{v_k(x, t)\}_{k=0}^\infty$  uniform convergeert. We weten uit (zie [5]) dat  $C(\mathbb{R} \times [0, T], \|\cdot\|_\infty)$  een Banachruimte is. Daardoor kunnen we concluderen dat de rij  $\{v_k(x, t)\}_{k=0}^\infty$  uniform convergeert en mogen we limiet en integraal omwisselen.

Stel  $v(x, t) = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i(x, t)$ . Dan geldt voor  $t > 0$  dat

$$v(x, t) = v_0(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)}{\sqrt{t-\eta}} f(v(\xi, \eta), \xi, \eta) d\xi \right) d\eta$$

en voor  $t = 0$  wordt  $v(x, t)$  gelijk aan de functie  $g(x)$ . M.a.w.  $v(x, t)$  voldoet aan

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t, v)$$

Hiermee hebben we de existentie van een oplossing  $v(x, t)$  van het algemeen beginwaarde probleem (15) aangetoond.

## 5 Bibliografie

1. A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, N. Piscounoff, Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, 1937, pag 1-37.
2. R.M.M. Mattheij, J. Molenaar, Ordinary differential equations in theory and practice, John Wiley&Sons, 1996, pag 353 – 356.
3. C.J. van Duijn, M.J. de Neef, Analyse van differentiaalvergelijkingen, Delft Univeristy Press, 2001.
4. J.R. Cannon, The one-dimensional heat equation, Addison-Wesley Publishing Company, 1984, pag 327 – 344.
5. Prof. dr. P. Bonckaert, Differentiaal- en integraal rekening (deel 3), 2001, pag 6.