

BACHELOR

Een model voor twee-fase stroming

Groot, J.A.W.M.

Award date:
2004

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Bachelor Project Toegepaste Analyse:
Een model voor twee-fase stroming

J.A.W.M. Groot 482929

Begeleider: Dhr. C.J. van Duijn

11 augustus 2004

Voorwoord

Er is erg veel baat bij om de productie van olie te kunnen onderzoeken. Het winnen van olie is immers van het grootste belang voor onze samenleving. Motorvoertuigen dienen tegenwoordig voor alledaags gebruik en het beeld van de overvolle wegen is onmisbaar geworden in de huidige samenleving. Deze vervoermiddelen bewegen zich over het algemeen voort door een verbrandingsproces met brandstoffen als benzine en diesel. Een onmisbaar bestanddeel in deze brandstoffen is olie. Het is dan ook niet vreemd dat een aantal mensen zich behoorlijk wat luxe kunnen permitteren dankzij de olie industrie. Voor veel landen is de winning van deze grondstof van economisch belang en politieke standpunten zijn niet onregelmatig gebaseerd op het behalen van winst uit de handel in het zwarte goud.

Dit verslag behandelt transport verschijnselen die zich voordoen in poreuze media in verband met olie winning door water injectie. We kunnen ons allereerst afvragen wat we precies verstaan onder de term poreus. In [2] wordt een materiaal of structuur gerelateerd aan een poreus medium indien tenminste een van de volgende beweringen van kracht is.

1. Het materiaal bevat open ruimten, zogenaamde porieën, die vaste of vrije lichamen vormen in de vaste materie, in dit geval een rotsblok. De porieën bevatten vaak vloeistoffen, gassen of mengsels hiervan, zoals lucht, water of olie.
2. Het materiaal moet permeabel zijn voor een variëteit aan vloeistoffen. In dit geval verwijzen we naar een permeabel poreus medium.

We kunnen dus stellen dat een poreus materiaal een specifieke permeabiliteit dient te hebben, uniek bepaald door de geometrie van de porieën en onafhankelijk van de doordringende vloeistoffen of gassen (zie ook sectie 2.1 - “de wet van Darcy”).

Om enig inzicht in de situatie te krijgen waar het wiskundige probleem van de twee-fase stroming uit voortkomt, zullen we een globale beschrijving geven van de chemische en fysische verschijnselen die aan het probleem vooraf gaan, zoals ze gepresenteerd worden in [3].

Een algemene misvatting over olie winning is dat de olie in grote ondergrondse meren gevonden wordt en uit het reservoir gepompt moet worden op dezelfde wijze als waarop een vloeistof uit een opslagtank wordt gepompt. In het algemeen is dit echter niet het geval en is de olie ingesloten in de microscopische porieën van een rotsblok, zoals zandsteen, en zal slechts door de rots stromen onder invloed van extreem grote druk differentiëlen. De porieën zijn gevormd als ruimten tussen de zand kristallen, die samengepakt en onderling

gefuseerd zijn met verschillende soorten klei. Een aanzienlijk percentage van de porieën zijn met elkaar verbonden en de vloeistoffen kunnen door de paden van de aaneengesloten porieën stromen. De paden zijn echter erg klein, onregelmatig en in elkaar gedraaid. Dus in plaats van een vlakke laminaire stroming resulteert de ongunstige structuur van deze paden in een onstabiele, wringende vloeistof stroming op microscopisch niveau. De verhouding van het volume van de paden van aaneengeschakelde porieën waardoor de vloeistof gepompt kan worden tot het totale volume van het betreffende rotsblok wordt de porositeit van de rots genoemd en is extreem klein (in de trant van 1-20%). Het type rots waarin zich het reservoir bevindt is van grote invloed op de mogelijkheid van de vloeistoffen om door het reservoir te kunnen stromen. Wanneer de geologie van de reservoirs verandert, dan bezit het reservoir vaak gebieden met hoge en gereduceerde stromingssnelheden. Deze heterogene aard van de meeste reservoirs kan het wiskundige modelleer proces aanzienlijk gecompliceerder maken, zeker wanneer een reservoir niet toegankelijk is en informatie over de porositeit in de eerste plaats alleen verkregen kan worden via de olie bronnen, die wel honderden meters uit elkaar kunnen staan.

In veel situaties is de druk in de reservoirs zo groot dat de aanwezige vloeistoffen uit het poreuze medium en uit de putten stromen zonder dat er veel gepompt hoeft te worden bij de bronnen. Dit type van olie winning wordt ook wel primaire winning genoemd. Wanneer de druk in het reservoir afneemt door de vloeistof extractie, neemt ook de stromingssnelheid van de olie af en stagneert de productie. Als reactie hierop zou een vloeistof als water via enkele bronnen in het reservoir geïnjecteerd kunnen worden, terwijl de olie gewonnen kan worden via de andere bronnen. Hiermee wordt het tweevoudige doel nagestreefd om de druk en stromingssnelheden in de reservoirs hoog te houden enerzijds en om het poreuze medium te doorspoelen om de olie richting de bronnen te verdringen anderzijds. Dit type van druk handhaving en doorspoeling met water wordt meestal secundaire winning genoemd. In dit proces mengt het water zich niet met de olie door de spankrachten aan de oppervlakten en het proces wordt ook wel aangegeven met de term *immiscible displacement*. Dit proces wordt uitvoerig behandeld in hoofdstuk 6 van [2].

Helaas is doorspoeling met water nog steeds niet extreem effectief en significante hoeveelheden olie blijven meestal achter in het reservoir (meer dan 50%). Als gevolg van de sterke effecten van de spanningstensors worden grote hoeveelheden olie ingesloten in kleine, nauwe porieën en kan de olie niet worden weggespoeld met de standaard doorspoel technieken met water. Als de stromingssnelheid voldoende groot is ontstaat er een onstabiel patroon en voert het water niet langer meer de olie naar de productie bronnen, maar verschijnt er nog slechts water aan de oppervlakte. Wanneer er eenmaal een pad gevuld met water van een injectie put naar een productie bron ontstaat, dan zal die productie bron in de eerste plaats alleen nog maar water voortbrengen, dat veel gemakkelijker door de porieën kan stromen als gevolg van de lagere viscositeit. De olie productie van die bron zal dan aanzienlijk reduceren al dan niet stagneren. Om meer van de resterende olie te kunnen winnen zijn er verschillende geavanceerde technieken ter bevordering van de olie productie ontwikkeld, die complexe chemische en thermische effecten met zich mee brengen. Deze technieken maken deel uit van het aanbod aan methoden die vallen onder de tertiaire winning van olie. De stromingsproblemen die we behandelen in dit verslag hebben slechts betrekking op het secundaire proces.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
1.1	Het twee-fase stromingsprobleem in poreuze media	5
1.2	Doelstelling	5
1.3	Opbouw	6
2	Formulering van het probleem: twee-fase stroming in poreuze media	7
2.1	De wet van Darcy	7
2.2	De fysische achtergrond en interpretatie van de Buckley-Leverett vergelijking	9
2.3	De wiskundige aspecten van de Buckley-Leverett vergelijking	14
2.3.1	Karakteristieken	14
2.3.2	Schokoplossingen	15
2.3.3	Expansie golven	18
3	De constructie van lopende golf oplossingen voor verstoringen van de Buckley-Leverett vergelijking	21
3.1	Lopende golven	21
3.2	De entropie conditie	21
3.2.1	De entropie conditie bij constante capillair geïnduceerde diffusie	21
3.2.2	Onafhankelijkheid van de entropie conditie bij veranderingen in de capillair geïnduceerde diffusie	26
3.3	Een evenwichtsverstoring door hysteresis	32
3.3.1	Een tweede orde differentiaalvergelijking voor het twee-fase stromingsprobleem	33

3.3.2	Het gedrag in de buurt van de evenwichten	33
3.3.3	Het faseportret	36
3.3.4	Numerieke resultaten	41
4	Conclusies	46
5	Appendices	48
5.1	Appendix A	
	Definities	48
5.1.1	Grootheden	48
5.1.2	Functies	49
5.2	Appendix B	
	Bijlagen	49
5.2.1	Bijlage 1: schaling van de saturaties in (2.5)	49
5.2.2	Bijlage 2: afleiding van de massa balans in differentiaal vorm in (2.10)	50
5.2.3	Bijlage 3: eigenschappen van de fractionele stromingsfunctie F	51

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Het twee-fase stromingsprobleem in poreuze media

Olie bevindt zich in de poriën van een rotsblok. Wanneer de rots permeabel is, kan de olie door de poriën stromen. Een methode om de olie te winnen uit een reservoir is vandaar het injecteren van water ter beïnvloeding van de permeabiliteit. Water injectie bij olie winning leidt tot een multi-fase stromingsprobleem in poreuze media. Wanneer er zich slechts olie en water in het poreuze medium bevinden, dan spreken we van een twee-fase systeem. Als er bijvoorbeeld ook nog gas aanwezig zou zijn, dan zou er sprake zijn van een drie-fase systeem.

Beschouwen we een vlakke, gladde laag in een poreus medium, dan beperken we ons tot een één-dimensionaal model. We zijn nu geïnteresseerd in hoe de water saturatie, die afhangt van de plaats en de tijd, zich gedraagt. Wanneer we de transportvergelijking opstellen als in hoofdstuk 2, ontstaan er schokoplossingen voor het stromingsprobleem. Deze oplossingen kunnen slechts begrepen worden in de context van de verdwijnende viscositeit.

1.2 Doelstelling

We zullen in hoofdstuk 2 zien dat uit de massabehoudswet, de wet van Darcy en enkele andere fysische relaties onder bepaalde aannamen een partiële differentiaalvergelijking voortkomt die beter bekend staat als de Buckley-Leverett vergelijking. Wanneer we enkele verstoringen van de Buckley-Leverett vergelijking beschouwen in verband met de viscositeit en de capillair druk, verkrijgen we onder bepaalde condities lopende golf oplossingen. Ons doel is om het bestaan van deze oplossingen en hun relatie tot schokoplossingen voor het stromingsprobleem te onderzoeken. In dit onderzoek zullen aspecten als partiële differentiaalvergelijkingen, stabiliteit in de evenwichtstoestanden en fase-vlak analyse aan bod komen. Voor de benodigde wiskundige voorkennis verwijzen we naar [4].

1.3 Opbouw

In hoofdstuk 2 zullen we de probleemstelling nader specificeren en de fundering leggen voor ons onderzoek. In sectie 2.2 zullen we de transport balans opstellen voor het stromingsprobleem. Onder bepaalde aannamen kunnen we deze balans schrijven als de Buckley-Leverett vergelijking, die een centrale rol speelt in dit onderzoek. Om de Buckley-Leverett vergelijking uit de massa balans af te kunnen leiden maken we o.a. gebruik van de wet van Darcy, die we voor een beter begrip in sectie 2.1 zullen uitleggen. In sectie 2.3 zullen we laten zien dat er zich problemen voordoen bij het vinden van oplossingen van de Buckley-Leverett vergelijking, doordat er hierbij sprake is van discontinuïteiten in de oplossingen, waardoor ze geen enkele betekenis hebben in de fysica. Hoe we hiermee om moeten gaan vormt het uitgangspunt voor ons onderzoek.

In hoofdstuk 3 zullen we proberen een verklaring te geven voor de discontinuïteiten in de oplossingen door enkele verstoringen van de Buckley-Leverett vergelijking te bekijken. Hierbij zullen we steeds zoeken naar lopende golf oplossingen voor de vergelijkingen. In sectie 3.1 stellen we het beginwaarde probleem op en onderzoeken we de relatie van lopende golf oplossingen tot dit probleem. Vanwege de aanwezigheid van discontinuïteiten in de oplossingen voor dit beginwaarde probleem onderzoeken we in sectie 3.2 het viskeuze profiel van het beginwaarde probleem en zullen we zien dat er onder bepaalde condities wél gladde oplossingen bestaan voor het stromingsprobleem. In sectie 3.3 bekijken we ook de invloed van effecten die optreden als gevolg van hysteresis in de capillaire druk die resulteren in een extra term in de reeds ontstane transportvergelijking. Met behulp van een numerieke methode zullen we laten zien dat we bij iedere initiële waarde voor de water saturatie een differentiaalvergelijking voor de transport balans kunnen formuleren, waarvoor er een lopende golf oplossing bestaat.

In hoofdstuk 4 zullen we tenslotte de resultaten uit hoofdstuk 3 bespreken en hier enkele conclusies uit trekken.

In hoofdstuk 5 zijn een aantal definities en bijlagen terug te vinden. In dit verslag zal zo nu en dan naar de bijlagen verwezen worden. De declaraties van grootheden en functies die met regelmaat gebruikt worden kunnen altijd worden teruggevonden in Appendix A.

Hoofdstuk 2

Formulering van het probleem: twee-fase stroming in poreuze media

In dit hoofdstuk zullen we een uitdrukking voor de fractionele stromingsfunctie voor water F_w afleiden en zijn relatie tot de water saturatie in de Buckley-Leverett vergelijking, die een centrale rol speelt in het één-dimensionale stromingsprobleem, wanneer we de capillair krachten verwaarlozen. Deze kunnen we afleiden door een aantal vergelijkingen op te stellen uit de stromingsleer die het twee-fase stromingsprobleem in poreuze media beschrijven. Hierbij is de wet van Darcy een belangrijk hulpmiddel en het is nuttig om hier eerst enige aandacht aan te schenken, alvorens de benodigde behoudwetten af te leiden.

2.1 De wet van Darcy

We zullen de wet van Darcy behandelen zoals beschreven in [3]. De wet van Darcy is een van de meest gebruikte wetten die kan worden toegepast in analytische modellen voor stromingen in poreuze media. De wet van Darcy is in 1856 ontdekt door de Franse ingenieur Henry Darcy.

De wet van Darcy stelt dat vloeistoffen in poreuze media worden voortgedreven door druk gradiënten (∇p) en de zwaartekracht en dat de volumetrische stromingssnelheid \mathbf{Q} [$m^3 s^{-1}$] van een homogene vloeistof door een poreus medium evenredig is met de oppervlakte van de dwarsdoorsnede A loodrecht op de stromingsrichting (zie figuur 2.1). Volgens de wet van Darcy kunnen we de oppervlakte stromingssnelheid \mathbf{q} [$m_{vloeistof}^3 m_{rots}^{-2} s^{-1}$], ook wel bekend als de Darcy snelheid, nu schrijven als

$$\mathbf{q} = \frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta A} \mathbf{n} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \quad (\text{wet van Darcy}). \quad (2.1)$$

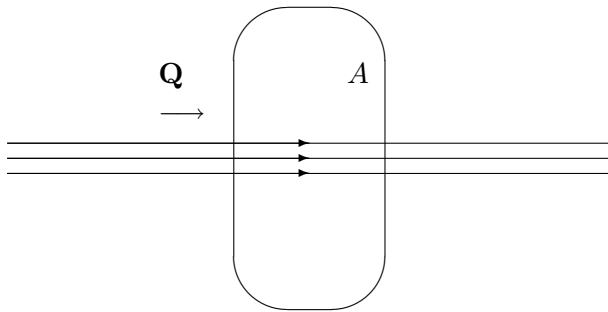
Hierin is

- μ [$Pa \cdot s$]: de viscositeit van de vloeistof,
- p [Pa]: de vloeistof druk,
- ρ [$kg \cdot m^{-2}$]: de dichtheid van de vloeistof,
- \mathbf{g} [$m \cdot s^{-2}$]: een vector die de grootte en richting van de gravitatie versnelling weergeeft,
- k : een absolute permeabiliteit¹ tensor in darcies (1 darcy = $0.987 \mu m^2$) voorstelt.

In de meeste toepassingen van de wet van Darcy bij stromingen in poreuze media wordt aangenomen dat k de vorm heeft van de diagonaal tensor

$$k = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

waarin k_x , k_y en k_z kunnen worden geïnterpreteerd als permeabiliteiten in respectievelijk de x -, de y - en de z -richting. Als $k_x = k_y = k_z$ dan noemen we het medium isotroop; anders wordt het medium anisotroop genoemd. De zwaartekracht zal veelal te verwaarlozen zijn t.o.v. de grote drukkrachten die werkzaam zijn in het reservoir dat de olie bevat. We zullen daarom in het vervolg de term $\rho \mathbf{g}$ weglaten in de wet van Darcy.



Figuur 2.1: Schets van een stroming met volumetrische stromingssnelheid \mathbf{Q} door een oppervlakte A , waarbij geldt dat $\mathbf{Q} \sim A$.

We beschouwen nu een twee-fase stroming in een poreus medium. Beide vloeistoffen zullen een eigen druk niveau hebben (p_α), een eigen viscositeit (μ_α) en een eigen Darcy snelheid (\mathbf{q}_α).

¹We verwijzen naar [2]. Permeabiliteit is de term gebruikt voor het geleidingsvermogen van het poreuze medium met respect voor de doordringing van een Newtonse vloeistof. De permeabiliteit in deze algemene zin is maar beperkt toepasbaar doordat de waarde in een poreus medium kan variëren met de eigenschappen van de doordringende vloeistof en de stromingsmechanismen. Het is gebruikelijk en eenvoudiger om slechts de parameter te beschouwen met respect voor de bijdrage van het poreuze medium aan de doordringbaarheid en die onafhankelijk is van de vloeistof eigenschappen en de stromingsmechanismen. Deze grootte is de specifieke permeabiliteit k , ook vaak gewoon permeabiliteit genoemd, en zijn waarde wordt uniek bepaald door de structuur van de porieën. Wanneer het medium homogeen is, is de specifieke permeabiliteit k dus constant.

In de meeste gevallen hangen zowel de permeabiliteiten als de viscositeiten van de saturaties van verschillende fasen af. Deze afhankelijkheden vormen de basis voor de benaderingen van de relatieve permeabiliteit. Via experimenten zijn we namelijk in staat voor elk van de fasen een relatieve permeabiliteit te bepalen, die we definiëren als

$$k_{r\alpha} = \frac{k_\alpha}{k} \leq 1, \quad (2.3)$$

waarin k_α dan de effectieve permeabiliteit is van de vloeistof. Voor elk van beide vloeistoffen bestaat er dan een Darcy snelheid

$$\mathbf{q}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} k \nabla p_\alpha. \quad (2.4)$$

Wanneer de vloeistoffen mengbaar zijn en als een fase door de porieën stromen dan is er geen stromingsinterferentie tussen beide vloeistoffen en geldt voor beide vloeistoffen dat $k_\alpha = k$.

2.2 De fysische achtergrond en interpretatie van de Buckley-Leverett vergelijking

Bij het afleiden van de Buckley-Leverett vergelijking volgen we de richtlijnen in hoofdstuk 12 van [1]. Bij het twee-fase stromingsprobleem nemen we aan dat de porieën van een homogeen en isotroop, poreus medium geheel gevuld zijn met water (saturatie S_w) en olie (saturatie S_o). Wanneer de porieën voldoende klein zijn, zijn deze vloeistoffen niet mengbaar en vindt er dus ook geen massa overdracht tussen beide vloeistoffen plaats. Indien nodig zullen we de saturaties zodanig schalen (zie sectie 5.2.1 - “bijlage 1: schaling van de saturaties”) opdat de saturaties aan de volgende eisen voldoen:

$$S_w + S_o = 1, \quad (2.5)$$

met $S_w \in [0, 1]$ en $S_o \in [0, 1]$.

De wet van Darcy voor twee-fase stromingen in een homogeen en isotroop, poreus medium (2.4) luidt

$$\mathbf{q}_w = -\frac{k_{rw}}{\mu_w} k \nabla p_w, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{q}_o = -\frac{k_{ro}}{\mu_o} k \nabla p_o. \quad (2.7)$$

In de termen van het onderzoek naar olie winning nemen we aan dat de relatieve permeabiliteiten van het Corey-type zijn, dat wil zeggen dat

$$k_{rw} = k' S_w^2, \quad (2.8)$$

$$k_{ro} = k'' S_o^2. \quad (2.9)$$

Hierin zijn kk' en kk'' de constante permeabiliteiten van water bij resterende olie saturatie en van olie bij ingesloten water saturatie respectievelijk.

De massa van ieder willekeurig niet-bewegend volume van het poreuze medium blijft behouden. De massabehoudswet komt tot uiting in de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi S_\alpha \rho_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{q}_\alpha) = 0, \quad \alpha = w, o, \quad (2.10)$$

die wordt afgeleid van de integrale massabehoudswet in sectie 5.2.2 - “bijlage 2: afleiding van de massa balans in differentiaal vorm voor twee-fase stromingen in poreuze media”. Hierin is $\Phi [m_{leegte}^3 m_{rots}^{-3}]$ de porositeit van het medium, gedefinieerd door de fractie van open ruimten of porieën in het poreuze medium, en $\rho_\alpha [kg_{vloeistof} \cdot m_{vloeistof}^{-3}]$ de vloeistof dichtheid. Typische waarden voor de porositeit liggen tussen 5 – 35%.

In ons onderzoek zullen we ons beperken tot het één-dimensionale geval van stroming in een poreuze laag, parallel aan de x -as. We nemen nu aan dat:

1. de laag een constante dikte heeft;
2. de vloeistoffen incompressibel zijn (constante dichtheid hebben);
3. de porositeit overal constant is.

De volumestroom is nu parallel aan de x -as met $\mathbf{q}_\alpha = q_\alpha \mathbf{e}_x$, waarin \mathbf{e}_x de eenheidsvector is in de x -richting. Het resultaat is dat we (2.10) kunnen schrijven als

$$\Phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x} = 0. \quad (2.11)$$

Conditie (2.5) resulteert nu in

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2.12)$$

waarin $q = q_w + q_o$, en dus hangt q slechts van de tijd variabele t af. Wanneer we aan de linkerzijde van de poreuze laag met een constante Darcy snelheid q_{inj} vloeistof (water of een mengsel van olie en water) injecteren, vinden we dus dat $q(t) = q_{inj}$ voor alle t door de hele poreuze laag.

We zijn nu in staat om via de wet van Darcy snelheden q_w en q_o uit te drukken in termen van S_w . Hiertoe dienen we eerst de capillair druk te definiëren als het gemiddelde druk verschil tussen de aanwezige vloeistoffen in het controle volume:

$$p_c = p_o - p_w. \quad (2.13)$$

De capillair druk is afhankelijk van de saturaties van de vloeistoffen en bij het onderzoek naar olie winning is het gebruikelijk deze te beschrijven volgens het Leverett model

$$p_c = p_c(S_w) = \sigma \sqrt{\frac{\Phi}{k}} J(S_w) \quad (\text{Leverett model}), \quad (2.14)$$

waarin σ de oppervlakte spanningstensor tussen de vloeistoffen in de porieën is en $J : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ de Leverett functie is. Experimenten tonen aan (hysterese effecten buiten beschouwing gelaten) dat J strikt dalend is en dat $J(0^-) = \infty$. Wanneer we nu (2.13) gebruiken in (2.6) en (2.7) dan vinden we

$$\begin{aligned} q_o &= -\frac{k_{ro}}{\mu_o} k \frac{\partial p_o}{\partial x} = -\frac{k_{ro}}{\mu_o} k \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{k_{ro}}{\mu_o} k \frac{\partial p_w}{\partial x} \\ &= -\frac{k_{ro}}{\mu_o} k \frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{k_{ro} \mu_w}{k_{rw} \mu_o} q_w. \end{aligned}$$

Substitutie van $q_o = q_{inj} - q_w$ geeft dan

$$q_w = \frac{\frac{k_{rw}}{\mu_w}}{\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o}} q_{inj} + \frac{\frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{k_{ro}}{\mu_o}}{\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o}} k \frac{\partial p_c}{\partial x}. \quad (2.15)$$

Wanneer we deze uitdrukking voor q_w substitueren in (2.11), dan vinden we de niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking

$$\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{k_{rw}}{\mu_w}}{\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o}} q_{inj} + \frac{\frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{k_{ro}}{\mu_o}}{\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o}} k \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Tenslotte willen we deze vorm van de massa balans in dimensielose vorm schrijven. Hiertoe schrijven we de vergelijking met gebruik van (2.8) en (2.9) eerst als

$$\frac{\Phi}{q_{inj}} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\frac{\mu_w k'' S_o^2}{\mu_o k' S_w^2} + 1} + \frac{1}{\frac{\mu_w k'' S_o^2}{\mu_o k' S_w^2} + 1} \frac{k k'' S_o^2}{q_{inj} \mu_o} \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Introduceren we een referentie lengte L , dan kunnen we de dimensielose tijds- en afstandscoördinaat definiëren door

$$x := \frac{x}{L}, \quad t := \frac{q_{inj}}{L\Phi} t. \quad (2.18)$$

Wanneer we gebruik maken van deze coördinaten verkrijgen we uit (2.17) de dimensieloze vergelijking

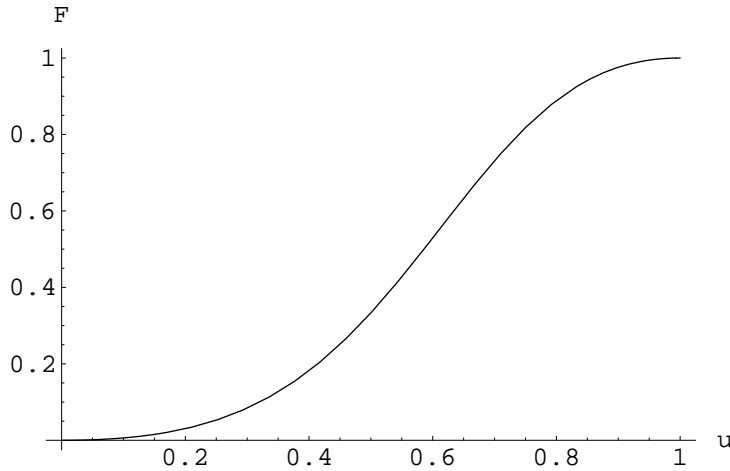
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (F(u) - N_c D(u) \frac{\partial u}{\partial x}) = 0. \quad (2.19)$$

Hierin is

- $u(x, t)$ de water saturatie;
- $F(u)$ de fractionele stromingsfunctie, gedefinieerd door

$$F(u) = \frac{u^2}{M(1-u)^2 + u^2}, \quad (2.20)$$

met viscositeitsratio $M = \frac{\mu_w k''}{\mu_o k'} \geq 1$ (zie ook sectie 5.2.3 - “bijlage 3: eigenschappen van de fractionele stromingsfunctie F ”);



Figuur 2.2: Grafiek van de fractionele stromingsfunctie F met $M = 2$.

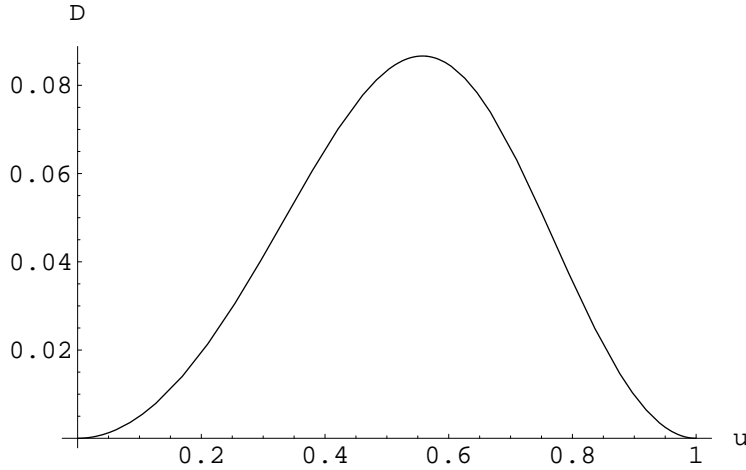
- N_c het capillair getal,

$$N_c = \frac{k'' \sigma \sqrt{k \Phi}}{q \mu_o L}; \quad (2.21)$$

- $D(u)$ de capillair geïnduceerde diffusie, gedefinieerd door

$$\begin{aligned}
D(u) &= -F(u) \frac{(1-u)^2}{\sigma} \sqrt{\frac{k}{\Phi}} \frac{dp_c}{du} \\
&= -F(u)(1-u)^2 \frac{dJ}{du};
\end{aligned} \tag{2.22}$$

waarin we gebruik hebben gemaakt van het Leverett model (2.14), waarbij de Leverett functie is uitgedrukt in termen van de geschaalde water saturatie.



Figuur 2.3: Grafiek van de capillair geïnduceerde diffusie D met $M = 2$ en $\frac{dJ}{du} \equiv 1$.

De praktijk gebiedt ons om dit probleem op grote schaal te beschouwen. Dit leidt tot de keuze voor een grote referentie lengte L zodat $N_c \ll 1$. In de limiet $N_c \downarrow 0$ geeft dit de Buckley-Leverett vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (\text{Buckley-Leverett vergelijking}). \tag{2.23}$$

De Buckley-Leverett vergelijking is eenvoudig in verband te brengen met de massa balans: voor ieder gedeelte van de poreuze laag tussen twee willekeurige punten $x = a$ en $x = b$ wordt de verandering in de massa op (a, b) gedurende een tijdsinterval Δt veroorzaakt door het verschil in massa flux over de randen $x = a$ en $x = b$. In formulevorm lezen we dan

$$\int_a^b (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) dx + \int_t^{t+\Delta t} (F(u(b, s)) - F(u(a, s))) ds = 0.$$

We zijn vervolgens geïnteresseerd in de oplossingen die de Buckley-Leverett vergelijking geeft. We hebben dan immers een goed beeld van hoe de water saturatie zich gedraagt als functie van tijd en plaats. In de volgende sectie zullen we echter zien dat we niet altijd gladde oplossingen kunnen vinden voor de Buckley-Leverett vergelijking.

2.3 De wiskundige aspecten van de Buckley-Leverett vergelijking

In hoofdstuk 2 van [1] wordt de vergelijking $u_t + (\varphi(u))_x$ behandeld voor $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ (d.w.z. voor φ twee maal continu differentieerbaar in \mathbb{R}) en $\varphi'' > 0$. Hoewel de fractionele stromingsfunctie (2.20) niet aan de tweede conditie voldoet, zullen we in dit hoofdstuk de wiskundige aspecten van de Buckley-Leverett vergelijking (2.23) behandelen volgens de richtlijnen in hoofdstuk 2 van [1].

2.3.1 Karakteristieken

In paragraaf 2.1 van [1] worden de karakteristieken geïntroduceerd. In paragraaf 2.2 van [1] wordt aangetoond hoe je oplossingen kunt construeren aan de hand van de methode van karakteristieken. Er zal blijken dat deze oplossingen discontinuïteiten kunnen vertonen.

Aangezien we verwachten dat de water saturatie geleidelijk zal veranderen in de tijd en ruimte, zoeken we naar gladde oplossingen van de Buckley-Leverett vergelijking. Hiertoe beschouwen we het beginwaarde probleem voor de Buckley-Leverett vergelijking

$$(BL) \begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dat het niet altijd mogelijk is om gladde oplossingen te vinden voor de Buckley-Leverett vergelijking kunnen we aantonen aan de hand van het gedrag van de karakteristieke krommen van vergelijking (2.23). Een karakteristieke kromme $x(t)$ voldoet aan het beginwaarde probleem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(u(x, t)) := F'(u(x, t)), & t > 0; \\ x(t_0) = x_0, & \text{voor gegeven } (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Langs deze kromme hebben we

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + (F(u))_x = 0.$$

Dus u is constant langs een karakteristieke kromme, en dientengevolge is ook $\frac{dx}{dt} = f(u)$ constant. Hieruit volgt dat voor ieder willekeurig punt (x, t) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ er een $y \in \mathbb{R}$ is, gegeven door $y = x - f(u)t$, met $u = u_0(y)$. Dan wordt $u = u(x, t)$ impliciet gedefinieerd door de vergelijking

$$u = u_0(x - f(u)t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

We nemen nu aan dat u_0 continu differentieerbaar is en dat u_0 en u_0' begrensd zijn op \mathbb{R} . Door partiële differentiatie van u naar x en t vinden we de vergelijkingen

$$\begin{aligned}u_x &= (1 - f'(u)u_x t)u'_0, \\u_t &= -(f'(u)u_t t + f(u))u'_0.\end{aligned}$$

Wanneer we deze vergelijkingen oplossen naar respectievelijk u_x en u_t dan krijgen we de uitdrukkingen

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{u'_0}{1 + f'(u)u'_0 t}, \\u_t &= -\frac{f(u)u'_0}{1 + f'(u)u'_0 t}.\end{aligned}$$

We zien nu dat als $f'(u)u'_0 \geq 0$ de afgeleiden u_x en u_t begrensd zijn voor $t > 0$. Indien daarentegen $f'(u)u'_0 < 0$ blazen de afgeleiden op wanneer $f'(u)u'_0 t \rightarrow -1$. In zulke punten zal er sprake zijn van een schok of discontinuïteit in de oplossing.

2.3.2 Schokoplossingen

In paragraaf 2.3 van [1] worden schokken behandeld. De Rankine-Hugoniot schok-conditie wordt er geïntroduceerd en er worden enkele voorbeelden voor de Burgers vergelijking besproken.

Wanneer er sprake is van een schok of discontinuïteit in de oplossing spreken we van schokoplossingen. In de context van twee-fase stroming in poreuze media kunnen we ons afvragen wat de fysische interpretatie is van deze schokoplossingen. Om hier antwoord op te kunnen geven dienen we ons te realiseren dat (2.23) een behoudswet is. Als zo'n schok daadwerkelijk plaatsvindt, dan zouden we momentaan een totaal verschillende water saturatie waar moeten nemen. Om in te zien wat er dan aan de hand is zullen we de Buckley-Leverett vergelijking als behoudswet bekijken op een zeker interval $[a, b]$ voor willekeurige $-\infty < a < b < \infty$. Dit leidt tot de vergelijking voor de massa balans

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} \right) dx = 0. \quad (2.24)$$

Wanneer u een discontinuïteit bezit over een gladde kromme $x(t)$ dan mogen we ten minste aannemen dat de behoudswet aan beide zijden van de kromme geldt. Dan vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx + \int_a^b \frac{\partial F(u)}{\partial x} dx &= \frac{d}{dt} \left(\int_a^{x(t)} u(x, t) dx + \int_{x(t)}^b u(x, t) dx \right) + F_{x=b} - F_{x=a} \\
&= \int_a^{x(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dx - F_{x=a} + \int_{x(t)}^b \frac{\partial u}{\partial t} dx + F_{x=b} \\
&\quad + \frac{dx}{dt} u(x(t)^-, t) - \frac{dx}{dt} u(x(t)^+, t) \\
&= F(u_r) - F(u_l) + \frac{dx}{dt} (u_l - u_r),
\end{aligned}$$

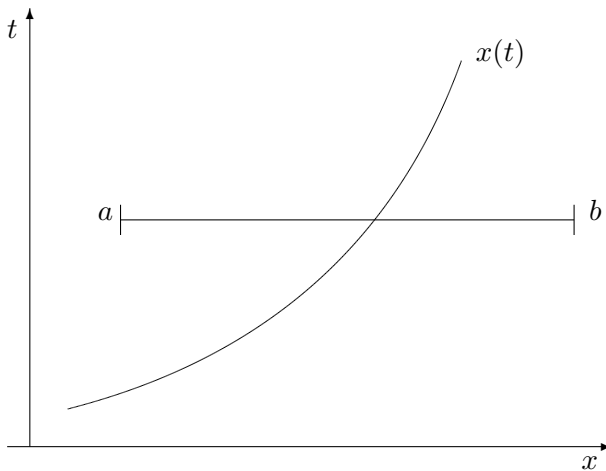
waarin $u_l = u(x(t)^-, t)$ en $u_r = u(x(t)^+, t)$ de waarden voor de water saturatie zijn aan weerszijden van de kromme $x(t)$ waarin $u(x(t), t)$ discontinu is (zie figuur 2.5). Dus als

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}, \quad (2.25)$$

dan hebben we volgens (2.24)

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial F(u)}{\partial x} dx = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} dx. \quad (2.26)$$

Conditie (2.25) staat bekend als de Rankine-Hugoniot schok-conditie. Deze conditie is het onmiddellijke gevolg van het behoud van massa over de schok.



Figuur 2.4: Kromme $x(t)$ waarin de oplossing $u(x, t)$ discontinu is.

Schokken in oplossingen van de Buckley-Leverett vergelijking ontstaan doordat we de capillaire krachten hebben verwaarloosd. We gaan er van uit dat de schokoplossingen van

de Buckley-Leverett vergelijking geen enkele fysische betekenis hebben. In het volgende hoofdstuk zullen we deze oplossingen diepgaander analyseren door enkele verstoringen van de Buckley-Leverett vergelijking te bekijken.

Om in te zien hoe oplossingen van een vergelijking van het type (2.23) zich gedragen zullen we een zelfde soort partiële differentiaalvergelijking beschouwen. Misschien wel de meest bekende vergelijking van dit type is de Burgers vergelijking

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \quad (\text{Burgers vergelijking}). \quad (2.27)$$

De Rankine-Hugoniot schok conditie (2.25) resulteert hier in

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_l + u_r}{2}. \quad (2.28)$$

Wanneer we naar een oplossing zoeken voor deze vergelijking hebben we een beginvoorwaarde nodig. Neem

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x < 0; \\ 0 & \text{voor } x > 0. \end{cases}$$

Volgens Rankine-Hugoniot geldt hier tijdens de schok $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ en de karakteristieke kromme wordt dus gegeven door $x(t) = \frac{t}{2}$. Dit leidt tot de oplossing

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x < \frac{t}{2}; \\ 0 & \text{voor } x > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

In het algemeen kunnen we bij een beginvoorwaarde

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{voor } x < 0; \\ u_r & \text{voor } x > 0 \end{cases}$$

een oplossing

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{voor } x < \frac{u_l + u_r}{2} t; \\ u_r & \text{voor } x > \frac{u_l + u_r}{2} t \end{cases}$$

construeren. Dat deze oplossingen niet eenduidig zijn kunnen we in het geval $u_l = 0$, $u_r = 1$ eenvoudig aantonen met de voorbeelden

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < \frac{t}{2}; \\ 1 & \text{voor } x > \frac{t}{2}, \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq 0; \\ \frac{x}{t} & \text{voor } 0 < x < t; \\ 1 & \text{voor } x \geq t, \end{cases}$$

en

$$u_3(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq t; \\ \frac{x-t}{1-t} & \text{voor } t < x < 1; \\ 1 & \text{voor } x \geq 1. \end{cases}$$

Dit zijn alle oplossingen van de Burgers vergelijking bij de gegeven beginvoorwaarde. Het valt meteen op dat de laatste twee oplossingen geen schokken vertonen in tegenstelling tot de eerste. De tweede oplossing is continu voor alle $t > 0$ en de derde oplossing is continu voor $t < 1$, maar volstaat niet voor $t \geq 1$. De oplossingen verschillen opzienbarend van elkaar en we kunnen uit de Burgers vergelijking dus niet direct opmaken hoe de water saturatie zich gedraagt als functie van x en t . Wanneer we naar continue oplossingen zoeken biedt $u_2(x, t)$ daarentegen een uitkomst. Hier worden de randwaarden $u_l = 0$ en $u_r = 1$ verbonden door een golfvorm $\tilde{u}(x, t) = \frac{x}{t}$. We spreken van expansie golven (Engels: *rarefaction waves*).

2.3.3 Expansie golven

In [1] worden zgn. zwakke entropie oplossingen geïntroduceerd. In hoofdstuk 4 van [1] wordt bewezen dat zwakke entropie oplossingen van (BL) uniek zijn. Het bestaan van expansie golven is gebaseerd op dit uniciteitsargument. Deze expansiegolven worden behandeld in paragraaf 2.4 van [1].

Laat $-\infty < u_l < u_r < \infty$ zijn en beschouw (BL) met

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0; \\ u_r, & x > 0. \end{cases}$$

Laat $u(x, t)$ een zwakke entropie oplossing zijn van (BL). Wanneer we voor $k > 0$ het probleem anders schalen met coördinaten kx en kt verandert het probleem niet. Dus de geschaalde functie $u_k(x, t) := u(kx, kt)$ is een oplossing van (BL). Vanwege een uniciteitsargument voor zwakke entropie oplossingen hebben we dan

$$u(x, t) = u_k(x, t) = u(kx, kt),$$

voor alle $k > 0$ en $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. We concluderen dat u de volgende vorm heeft:

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{t}, 1\right) = r(\eta), \quad \text{met } \eta = \frac{x}{t} \tag{2.29}$$

We verifiëren dat

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{t}.$$

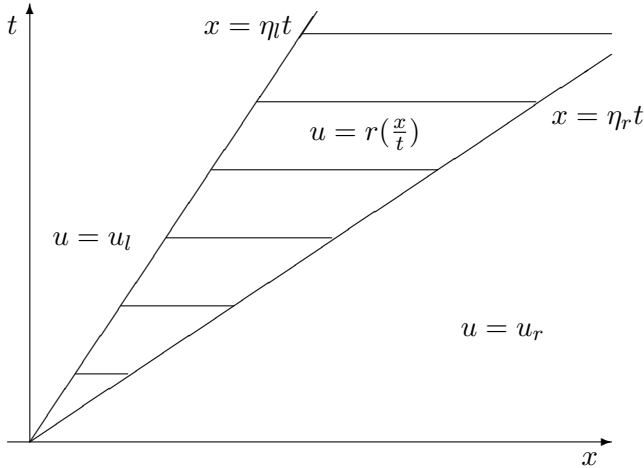
Dus substitutie van (2.29) in (BL) resulteert in het randwaarde probleem

$$(\text{RWP}) \quad \begin{cases} (-\eta + f(r))r' = 0, & \eta \in \mathbb{R}; \\ r(-\infty) = u_l, & r(\infty) = u_r. \end{cases}$$

Oplossingen van (RWP) worden expansie golven genoemd. De oplossing $u(x, t)$ is van de vorm

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{voor } x \leq \eta_l t; \\ r\left(\frac{x}{t}\right) & \text{voor } \eta_l t < x < \eta_r t; \\ u_r & \text{voor } x \geq \eta_r t, \end{cases}$$

waarin $r(\eta_l) = u_l$ en $r(\eta_r) = u_r$.



Figuur 2.5: Expansie golf.

Wanneer $F \in C^2((u_l, u_r)) \cap C([u_l, u_r])$ voldoet aan $F'' > 0$ bestaat er een expansie golf waarbij $r(\eta) = f^{-1}(\eta)$ voor $\eta_l < \eta < \eta_r$. De fractionele stromingsfunctie voldoet hier echter niet aan. Bovendien zijn we in dit geval niet zonder meer in staat om een gesloten uitdrukking voor r als functie van η te vinden die voldoet aan (RWP).

In dit hoofdstuk hebben we de Buckley-Leverett vergelijking opgesteld uit enkele fysische relaties waarbij we de viscositeit hebben verwaarloosd. In het volgende hoofdstuk zullen we de lopende golf oplossingen introduceren, waarmee we in staat zijn om de Buckley-Leverett vergelijking en enkele verstoringen daarvan in verband met de verdwijnende viscositeit en

een evenwichtsverstoring in de capillaire druk (hysterese effecten) te analyseren. Het doel van dit verslag is dan om te onderzoeken in hoeverre het mogelijk is om de schokoplossingen van de Buckley-Leverett vergelijking zo goed mogelijk te benaderen door een gladde, continu differentieerbare lopende golf oplossing, die de verandering van de water saturatie in de horizontale poreuze laag als functie van x en t beschrijft.

Hoofdstuk 3

De constructie van lopende golf oplossingen voor verstoringen van de Buckley-Leverett vergelijking

3.1 Lopende golven

In dit hoofdstuk zullen we het bestaan van lopende golf oplossingen en hun relatie tot de schokoplossingen voor (BL) bestuderen. Lopende golven zijn functies van de vorm $v(\eta)$ met $\eta = x - ct$, waarin c de golfsnelheid is en v het golfprofiel. Een lopende golf oplossing is dus een oplossing die afhangt van de variabele $\eta = x - ct$.

Voor het stromingsprobleem hebben we de lopende golf oplossing eigenlijk al stilzwijgend geïntroduceerd met de karakteristieke kromme van (BL). Wanneer $f(u) = c$, voor zekere constante c , dan ontstaat als oplossing de lopende golf $u_0(x - ct)$. De golfsnelheid komt dan precies overeen met de snelheid van de karakteristieke $\frac{dx}{dt}$. In sectie 2.3.1 werd echter duidelijk dat een dergelijke oplossing voor (BL) tot schokoplossingen kan leiden. Vandaar zullen we in de loop van dit hoofdstuk enkele verstoringen van (BL) introduceren en condities afleiden voor het bestaan van lopende golf oplossingen.

3.2 De entropie conditie

3.2.1 De entropie conditie bij constante capillair geïnduceerde diffusie

Lopende golf oplossingen lijken uitermate geschikt om vergelijking (2.19) te onderzoeken wanneer we de capillaire krachten niet geheel verwaarlozen, ofwel de viscositeit niet geheel laten verdwijnen, maar waarin we de viscositeit meenemen als een kleine waarde in de nul-omgeving. Dit resulteert in een kleine verstoring in de Buckley-Leverett vergelijking. We schrijven vergelijking (2.19) dan als

$$u_t + (F(u))_x - N_c(D(u)u_x)_x = 0, \text{ voor } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (3.1)$$

Gemakshalve beschouwen we D voorlopig als een positieve constante en kiezen we $\epsilon := N_c D$. We beschouwen dan lopende golf oplossingen van de vergelijking

$$u_t + (F(u))_x = \epsilon u_{xx}, \text{ voor } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (3.2)$$

Het is praktisch om hier randwaarden te definiëren voor alle $t > 0$. Hiertoe nemen we aan dat via de water injectie de water saturatie aan de linkerzijde van de poreuze laag constant blijft met een waarde u^+ . Daarnaast veronderstellen we dat er uiterst rechts in de poreuze laag alleen maar olie aanwezig is. Hiermee voldoet de oplossing van vergelijking (3.2) aan

$$u(-\infty, t) = u^+, \quad u(\infty, t) = 0, \text{ voor alle } t > 0. \quad (3.3)$$

Vervolgens zoeken we naar lopende golf oplossingen van (3.2) die aan (3.3) voldoen en de volgende gedaante hebben:

$$u(x, t) = v(\eta), \text{ met } \eta = \frac{x - ct}{\epsilon}. \quad (3.4)$$

Substitutie hiervan levert na vermenigvuldiging met ϵ en integratie naar η het randwaarde probleem

$$\begin{aligned} -cv + F(v) &= v' + A \text{ op } \mathbb{R}; \\ v(-\infty) &= u^+, \quad v(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hierin is A een integratieconstante. Vanwege (3.3) moet gelden dat

$$v'(\pm\infty) = 0. \quad (3.6)$$

Doordat $v(\infty) = 0$ volgt dan voor de integratieconstante $A = 0$. De conditie $v(-\infty) = u^+$ geeft dan

$$c = \frac{F(u^+)}{u^+}. \quad (3.7)$$

We merken hierbij op dat de golfsnelheid overeen komt met de schoksnelheid vanwege de Rankine-Hugoniot conditie (2.25). De resulterende vergelijking is

$$v' = F(v) - cv \text{ op } \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Wanneer nu $v'(\eta_0) = 0$ voor zekere $\eta_0 \in \mathbb{R}$, dan geldt dat $v(\eta) = v(\eta_0)$ voor alle $\eta \in \mathbb{R}$ (dit is een rechtstreeks gevolg van eenduidigheid voor (3.8)), en dus dat de enige oplossing van (3.5) een constante zou moeten zijn, die uiteraard onmogelijk aan beide condities in (3.3) kan voldoen. We concluderen dus dat een lopende golf oplossing strikt monotoon is en dat

$$v' < 0 \Rightarrow 0 < v < u^+.$$

Dus (3.8) impliceert de existentie conditie

$$\frac{F(v)}{v} < c, \text{ voor alle } 0 < v < u^+, \quad (3.9)$$

Deze existentie conditie wordt ook wel aangeduid als entropie conditie. De conditie is onafhankelijk van ϵ en bestaat dus ook in de limiet $\epsilon \downarrow 0$. In deze limiet naderen lopende golf oplossingen naar schokoplossingen en we spreken dan van toegestane schokken (Engels: *admissible shocks*) in de oplossing. Soms zeggen we ook wel dat de schokken een viskeus profiel hebben.

N.B. Vanwege (3.7) kunnen we vergelijking (3.8) ook schrijven als

$$v' = F(v) - F(u^+) - c(v - u^+) \text{ op } \mathbb{R}.$$

Het mag dus opgemerkt worden dat de entropie conditie ook geformuleerd had kunnen worden in de minder eenvoudig ogende vorm

$$\frac{F(v) - F(u^+)}{v - u^+} > c, \text{ voor alle } 0 < v < u^+.$$

Onder de entropie conditie geldt

$$\frac{v'}{F(v) - cv} = 1.$$

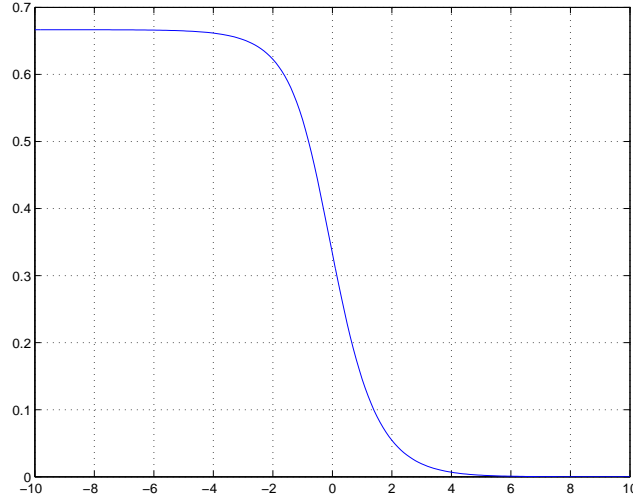
Integratie van deze vergelijking geeft

$$\int_{\frac{1}{2}u^+}^{v(\eta)} \frac{d\omega}{F(\omega) - c\omega} = \eta, \quad (3.10)$$

en hiermee hebben we een unieke lopende golf gedefinieerd die voldoet aan $v(0) = \frac{1}{2}u^+$. Merk hierbij op dat de integrand kleiner is dan 0 voor $\omega \in (0, u^+)$, terwijl de integraal positief blijkt te zijn voor $\eta > 0$. De entropie conditie is dus voldoende om het bestaan van een lopende golf oplossing te kunnen aantonen. De entropie conditie in (3.9) verzekert het bestaan van

lopende golf oplossingen van (3.2) die de waarden $v(-\infty) = u^+$ en $v(\infty) = 0$ met elkaar verbinden.

De integraalvergelijking (3.10) stelt ons in staat om het golfprofiel af te leiden. Figuur 3.1 laat een strikt dalende lopende golf zien die convergeert naar de asymptoten $v = 0$ ($\eta \rightarrow \infty$) en $v = u^+$ ($\eta \rightarrow -\infty$), en die bovendien voldoet aan $v(0) = \frac{1}{2}u^+$. Figuur 3.1 doet bovendien vermoeden dat $v(\eta)$ exponentieel convergeert in de buurt van de asymptoten.



Figuur 3.1: Golfprofiel ($M = 2$, $u^+ = \frac{2}{3}$), berekend met de expliciete Euler methode.

Het golfprofiel in figuur 3.1 bevestigt het monotone gedrag van de lopende golf oplossing voor (3.8) op $(0, u^+)$. Wanneer we de vergelijking $v' = 0$ proberen op te lossen vinden we echter dat er meer oplossingen zijn buiten de bekende oplossingen $v = 0$ en $v = u^+$. Combinatie van $v' = 0$ en de vergelijking (3.8) levert $F(v) - cv = 0$, oftewel $u^+F(v) = vF(u^+)$. Wanneer we deze vergelijking vermenigvuldigen met $(M(1-v)^2 + v^2)(M(1-u^+)^2 + (u^+)^2)$ krijgen we na enige algebra

$$(M+1)(u^+)^2v^2(u^+ - v) + Mu^+v(v - u^+) = 0.$$

We zien nu onmiddellijk de twee reeds bekende wortels van de vergelijking, n.l. $v = 0$ en $v = u^+$. Deling door $v(u^+ - v)$ resulteert vervolgens in de vergelijking

$$(M+1)u^+v - M = 0,$$

ofwel in een derde oplossing

$$v = \frac{M}{(M+1)u^+}. \quad (3.11)$$

Aangezien $v' \neq 0$ op $(0, u^+)$ moet dus gelden dat

$$u^+ \leq \frac{M}{(M+1)u^+},$$

oftewel

$$u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}. \quad (3.12)$$

Dit sluit natuurlijk de keuze $u^+ = 1$ uit, wat erg onpraktisch is.

De argumenten die we gebruikt hebben voor deze bovengrens zijn in principe dezelfde als degene die we hebben gebruikt om de entropie conditie af te leiden. Hiermee komen we tot de volgende stelling.

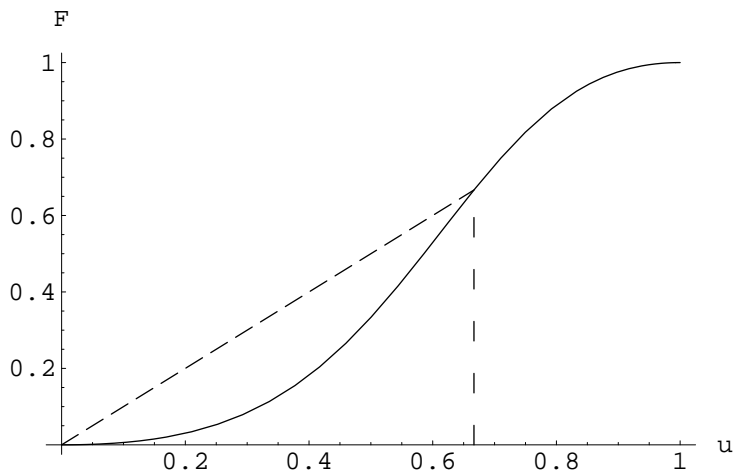
Stelling 3.1 *Aan de entropie conditie (3.9) kan worden voldaan dan en slechts dan als $u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}$.*

Bewijs: We voeren het bewijs in twee richtingen.

- Stel dat (3.9) geldt. Dan geldt dus de ongelijkheid $u^+F(v) - vF(u^+) < 0$ op $(0, u^+)$. Enige algebra levert dan $v < \frac{M}{(M+1)u^+}$ op $(0, u^+)$. Dit betekent dat $u^+ \leq \frac{M}{(M+1)u^+}$. Dus als aan de entropie conditie is voldaan geldt dat $u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}$.
- Stel dat $u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}$. Dan $u^+ \leq \frac{M}{(M+1)u^+}$, oftewel $v < \frac{M}{(M+1)u^+}$ voor alle $0 < v < u^+$. Zodoende geldt dat $u^+F(v) - vF(u^+) < 0$, oftewel $\frac{F(v)}{v} < c$, voor alle $0 < v < u^+$. Dus als geldt dat $u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ dan is aan de entropie conditie voldaan.

□

Conditie (3.9) en conditie (3.12) zijn dus equivalent. Hiermee concluderen we dat conditie (3.12) noodzakelijk en voldoende is voor het bestaan van een lopende golf oplossing van (3.2) die de randwaarden (3.3) met elkaar verbindt. We kunnen deze conditie het gemakkelijkst als volgt interpreteren. Voorwaarde dat v een oplossing is van (3.5) is dat de lijn $l : v \mapsto cv$ en de parabool gegeven door $F(v)$ elkaar niet mogen snijden tussen $v = 0$ en $v = u^+$ (zie figuur 3.2), want anders zou immers gelden dat $v' = F(v) - cv = 0$ op $(0, u^+)$. We zoeken nu de grootst mogelijke bovengrens u^+ voor v , z.d.d. aan deze voorwaarde voldaan is, m.a.w. we zoeken de grootst mogelijke waarde voor u^+ , z.d.d. dat de entropie conditie geldt. Aangezien $F(v)$ onafhankelijk is van u^+ eisen we dus dat de helling $c = \frac{F(u^+)}{u^+}$ van l zo groot mogelijk is. Dit is het geval als l en $F(v)$ elkaar nog net raken in het punt $v = u^+$, oftewel als $f(u^+) = c$ (zie figuur 5.1). Deze waarde van u^+ vinden we in sectie 5.2.3 - "bijlage 3: eigenschappen van de fractionele stromingsfunctie F ". We concluderen dat $F(v) < cv$ op $(0, u^+)$ voor $u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ en dat $F(v) \not< cv$ op $(0, u^+)$ voor $u^+ > \sqrt{\frac{M}{M+1}}$.



Figuur 3.2: Grafieken van $F(v)$ en $l : v \mapsto cv$ ($M = 2$, $u^+ = \frac{2}{3}$). De lijn snijdt $F(v)$ niet tussen $v = 0$ en $v = u^+$, dus is aan de entropie conditie voldaan.

3.2.2 Onafhankelijkheid van de entropie conditie bij veranderingen in de capillair geïnduceerde diffusie

We bekijken nu het geval waarin D niet constant is en kiezen vervolgens $\epsilon := N_c$. Het randwaarde probleem luidt nu

$$\begin{aligned} D(v)v' &= -cv + F(v) \text{ op } \mathbb{R}; \\ v(-\infty) &= u^+, \quad v(\infty) = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

De vraag is nu of de entropie conditie weer de gedaante (3.9) heeft en daarmee onafhankelijk is van de capillair geïnduceerde diffusie D . De volgende stelling maakt duidelijk dat iedere lopende golf oplossing van (3.13) eveneens aan (3.9) voldoet.

Stelling 3.2 *Zij $D : (0, u^+) \rightarrow \mathbb{R}^+$ een willekeurige positieve functie. Dan voldoet iedere lopende golf oplossing $v(\eta)$ van (3.13) aan (3.9).*

Bewijs: Stel dat voor zekere $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}$ geldt dat $F(\tilde{v}) \geq c\tilde{v}$, waarin $\tilde{v} = v(\tilde{\eta})$. Vanwege het eenduidigheidsargument geldt weer dat $v'(\eta) \neq 0$ voor $-\infty < \eta < \infty$. Doordat $D(v) > 0$ op $(0, u^+)$ en $v(-\infty) = u^+ > 0 = v(\infty)$ geldt dan dat $F(v) - cv = D(v)v' < 0$ voor alle $v \in (0, u^+)$, wat het bestaan van \tilde{v} op $(0, u^+)$ uitsluit. \square

Conditie (3.9) is dus noodzakelijk voor het bestaan van een lopende golf oplossing van (3.13), zolang D positieve waarden aanneemt in \mathbb{R} . Dit wil echter nog niet zeggen dat conditie (3.9) ook voldoende is voor het bestaan van een lopende golf oplossing. We formuleren nu de volgende stelling, waarin we eisen dat D aan bepaalde condities voldoet.

Stelling 3.3 *Zij $D \in C(0, u^+)$ een functie voor de capillair geïnduceerde diffusie, waarvoor geldt dat $0 < \delta \leq D(v) \leq D^+ < \infty$ voor $v \in (0, u^+)$. Onder deze voorwaarden bestaat er een lopende golf oplossing waarmee de entropie conditie onafhankelijk is van de vorm van D .*

Bewijs: De entropie conditie houdt in dat er een lopende golf oplossing $v(\eta)$ van (3.13) is dan en slechts dan als $F(v) < cv$ voor alle $0 < v < u^+$. Volgens stelling 3.2 geldt voor iedere lopende golf oplossing van (3.13) dat $F(v) < cv$ voor alle $0 < v < u^+$. We willen dus bewijzen dat indien $F(v) < cv$ voor alle $0 < v < u^+$ er een lopende golf oplossing van (3.13) bestaat.

Stel dat geldt $F(v) < cv$ voor alle $0 < v < u^+$. We zoeken een lopende golf oplossing van (3.13) die voldoet aan $v(0) = \frac{1}{2}u^+$. Wanneer we (3.13) delen door $cv - F(v)$ en vervolgens integreren dan krijgen we

$$\int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} \frac{D(\omega)d\omega}{c\omega - F(\omega)} = \eta. \quad (3.14)$$

Voor alle η voldoet nu $v(\eta)$ aan de differentiaalvergelijking in (3.13) en aan de eis dat $v(0) = \frac{1}{2}u^+$. Om aan te tonen dat $v(\eta)$ ook aan de randwaarden voldoet rest ons nog om aan te tonen dat de integraal goed gedefinieerd is op $(0, u^+)$, maar niet in de randwaarden $v = 0$ en $v = u^+$. De integrand wordt gegeven door de functie $G(\omega) = \frac{D(\omega)}{c\omega - F(\omega)}$ en is gedefinieerd op het domein $(0, u^+)$. We verifiëren dat

- $G > 0$ op $(0, u^+)$;
- $G(0) = G(u^+) = \infty$;
- $G \in C(0, u^+)$.

De functie G is dus goed gedefinieerd op $(0, u^+)$. Om aan te tonen dat de integraal goed is gedefinieerd, moeten we nog slechts aantonen dat de functie $v(\eta)$ waarden aanneemt binnen het bereik $(0, u^+)$ en voldoet aan de randwaarden $v(-\infty) = u^+$ en $v(\infty) = 0$. Hiertoe onderscheiden we twee gevallen.

$0 < \eta < \infty$: Uit de afchatting

$$\eta = \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} G(\omega)d\omega > \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} \frac{D(\omega)d\omega}{c\omega} \geq \frac{\delta}{c} \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\delta}{c} \log \frac{u^+}{2v(\eta)},$$

volgt dat

$$v(\eta) > \frac{1}{2}u^+ e^{-\frac{c}{\delta}\eta} > 0.$$

Doordat $\frac{F(v)}{v} < c$ ($= \frac{F(u^+)}{u^+}$) voor $0 < v < u^+$ moet er een $\mu > 0$ zijn z.d.d. $cv - F(v) > \mu v$ op $(0, \frac{1}{2}u^+)$. Voor zekere $\mu > 0$ vinden we dus dat

$$\eta = \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} G(\omega)d\omega < \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} \frac{D(\omega)d\omega}{\mu\omega} \leq \frac{D^+}{\mu} \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{D^+}{\mu} \log \frac{u^+}{2v(\eta)},$$

en zodoende hebben we de afschatting

$$v(\eta) < \frac{1}{2}u^+ e^{-\frac{\mu}{D^+}\eta} < \frac{1}{2}u^+.$$

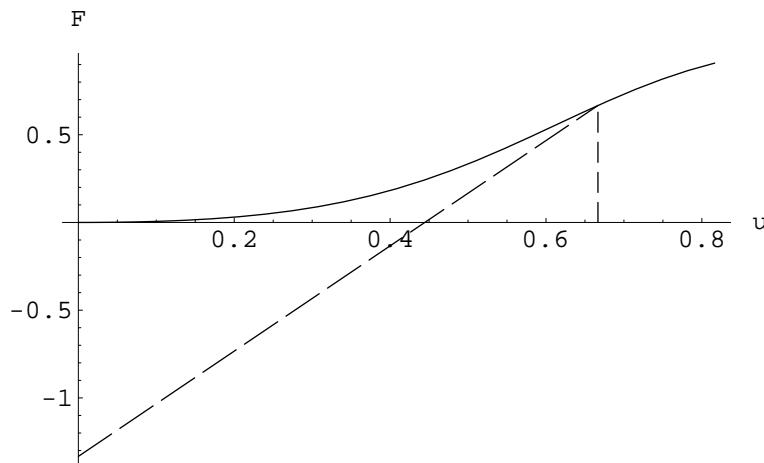
$-\infty < \eta < 0$: We willen aantonen dat $F(v) - cv > \alpha(v - u^+)$ voor zekere $\alpha > 0$ op $(\frac{1}{2}u^+, u^+)$. Voor alle $\alpha > 0$ hebben de lijn $l_\alpha : y = (\alpha + c)v - \alpha u^+$ en de hyperbool $F(v)$ een snijpunt in $v = u^+$. Kies nu $\alpha > 0$ z.d.d. $\alpha > \sup_{\{\frac{1}{2}u^+ < v < u^+\}} f(v) - c$. Dan is voor alle $v \in (\frac{1}{2}u^+, u^+)$ de richtingscoëfficiënt $\alpha + c$ van l_α groter dan $f(v)$. Dus ligt voor zekere $\alpha > 0$ de grafiek van $F(v)$ boven de lijn l_α op $(\frac{1}{2}u^+, u^+)$ (zie figuur 3.3).

Dus kunnen we voor zekere $\alpha > 0$ schrijven

$$\begin{aligned} \eta &= - \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} G(\omega)d\omega = \int_{\frac{1}{2}u^+}^{u^+ - v(\eta)} \frac{D(u^+ - \omega)d\omega}{F(u^+ - \omega) - c(u^+ - \omega)} \\ &< -\frac{\delta}{\alpha} \int_{\frac{1}{2}u^+}^{u^+ - v(\eta)} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\delta}{\alpha} \log \frac{2(u^+ - v(\eta))}{u^+}, \end{aligned}$$

wat resulteert in de afschatting

$$v(\eta) < u^+ \left(1 - \frac{1}{2} e^{\frac{\alpha}{\delta}\eta}\right) < u^+.$$



Figuur 3.3: Grafiek van $F(v)$ met $M = 2$, $u^+ = \frac{2}{3}$. De één kwart onderbroken lijn is de lijn l_2 .

Anderzijds is er een $\mu > 0$ z.d.d. $F(v) - cv < -\mu v < \mu(v - u^+)$ voor $v \in (\frac{1}{2}u^+, u^+)$ en geldt voor zo'n μ dat

$$\begin{aligned}
\eta &= - \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} G(\omega) d\omega = \int_{\frac{1}{2}u^+}^{u^+ - v(\eta)} \frac{D(u^+ - \omega) d\omega}{F(u^+ - \omega) - c(u^+ - \omega)} \\
&> - \frac{D^+}{\mu} \int_{\frac{1}{2}u^+}^{u^+ - v(\eta)} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{D^+}{\mu} \log \frac{2(u^+ - v(\eta))}{u^+},
\end{aligned}$$

ofwel

$$v(\eta) > u^+ \left(1 - \frac{1}{2} e^{\frac{\mu}{D^+} \eta}\right) > \frac{1}{2} u^+.$$

Dus $0 < v(\eta) < u^+$ voor alle $-\infty < \eta < \infty$ en $v(\eta)$ voldoet aan de randwaarden. Dus de integraal is goed gedefinieerd. \square

Het is nuttig om hier op te merken dat stelling 3.1 nog steeds van kracht is in het geval dat D niet constant is, zolang $D(v) > 0$ voor alle $v \in (0, u^+)$. Essentieel is dan wel dat de entropie conditie nog steeds de vorm (3.9) heeft. De capillair geïnduceerde diffusie zoals gedefinieerd in (2.22) voldoet echter niet aan de condities in stelling 3.3. Vandaar formuleren we een stelling voor het speciale geval waarin $D(u) = u^p(1-u)^q$, $p, q > 0$.

Stelling 3.4 *Zij de functie voor de capillair geïnduceerde diffusie $D : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ gegeven door*

$$D(u) = u^p(1-u)^q,$$

waarin $p, q > 0$. Dan bestaat er een lopende golf oplossing waarmee de entropie conditie onafhankelijk is van p en q .

Bewijs: Volgens stelling 3.2 is de entropie conditie, zoals in (3.9), noodzakelijk voor het bestaan van een lopende golf oplossing voor (3.13). We willen dus aantonen dat de entropie conditie eveneens voldoende is voor het bestaan van een lopende golf oplossing.

Stel dat geldt $F(v) < cv$ voor alle $0 < v < u^+$. We zoeken een lopende golf oplossing van (3.13) die voldoet aan $v(0) = \frac{1}{2}u^+$. Wanneer we (3.13) delen door $cv - F(v)$ en vervolgens integreren dan krijgen we

$$\int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} \frac{\omega^p(1-\omega)^q d\omega}{c\omega - F(\omega)} = \eta.$$

Voor alle η voldoet nu $v(\eta)$ aan de differentiaalvergelijking in (3.13) en aan de eis dat $v(0) = \frac{1}{2}u^+$. Om aan te tonen dat $v(\eta)$ ook aan de randwaarden voldoet rest ons nog om aan te

tonen dat de integraal goed gedefinieerd is op $(0, u^+)$. De integrand wordt gegeven door de functie $G(\omega) = \frac{\omega^p(1-\omega)^q}{c\omega - F(\omega)}$ en is gedefinieerd op het domein $(0, u^+)$, waarbij $u^+ < 1$ volgens stelling 3.1. We verifiëren dat

- $G > 0$ op $(0, u^+)$;
- $G(u^+) = \infty$;
- $G \in C(0, u^+)$.

De functie G is dus goed gedefinieerd op $(0, u^+)$. Echter, $G(0) < \infty$ voor $p \geq 1$ en is bovendien de integraal eindig voor $p > 0$. Dit zal betekenen dat er een $0 < \eta^* < \infty$ is z.d.d. $v(\eta^*) = 0$. Dit zal uiteindelijk geen probleem zijn, omdat we dan de oplossing voort kunnen zetten met $v = 0$ op (η^*, ∞) om zo toch aan de conditie $v(\infty) = 0$ te kunnen voldoen. Om aan te tonen dat de integraal goed is gedefinieerd, moeten we nog slechts aantonen dat de functie $v(\eta)$ waarden aanneemt binnen het bereik $(0, u^+)$ en voldoet aan $v(-\infty) = u^+$ en $v(\eta^*) = 0$, voor zekere $0 < \eta^* < \infty$. Hiertoe onderscheiden we twee gevallen.

$0 < \eta < \eta^*$: Zij $\mu > 0$ z.d.d. $\mu v < cv - F(v) < cv$ op $(0, \frac{1}{2}u^+)$, dan vinden voor $v \in (0, \frac{1}{2}u^+)$ we de afchatting

$$\frac{1}{c}v^{p-1}(1 - u^+) \leq G(v) \leq \frac{1}{\mu}v^{p-1}.$$

Integratie geeft nu met (3.14)

$$\int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} \frac{1 - u^+}{c} \omega^{p-1} d\omega \leq \eta \leq \int_{v(\eta)}^{\frac{1}{2}u^+} \frac{1}{\mu} \omega^{p-1} d\omega,$$

oftewel

$$\frac{1 - u^+}{pc} \left(\left(\frac{u^+}{2} \right)^p - (v(\eta))^p \right) \leq \eta \leq \frac{1}{p\mu} \left(\left(\frac{u^+}{2} \right)^p - (v(\eta))^p \right).$$

Als een resultaat kunnen we de functie $v(\eta)$ afschatten door

$$\left(\left(\frac{u^+}{2} \right)^p - p\mu\eta \right)^{\frac{1}{p}} \leq v(\eta) \leq \left(\left(\frac{u^+}{2} \right)^p - \frac{pc}{1 - u^+} \eta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Een rechtstreeks gevolg is dat

$$\frac{1 - u^+}{pc} \left(\frac{u^+}{2} \right)^p < \eta^* < \frac{1}{p\mu} \left(\frac{u^+}{2} \right)^p$$

$-\infty < \eta < 0$: We maken hier gebruik van stelling 3.1 en de afschattingen die we hebben gebruikt in het bewijs van stelling 3.3. Op $(\frac{1}{2}u^+, u^+)$ is D begrensd door

$$\left(\frac{u^+}{2}\right)^p(1-u^+)^q < D(v) < (u^+)^p\left(1-\frac{u^+}{2}\right)^q.$$

Zij $\alpha, \mu > 0$ nu z.d.d. $\alpha(v-u^+) < F(v) - cv < \mu(v-u^+)$ op $(\frac{1}{2}u^+, u^+)$, dan vinden voor $v \in (\frac{1}{2}u^+, u^+)$ we de afschatting

$$\frac{(u^+)^p\left(1-\frac{u^+}{2}\right)^q}{\mu(v-u^+)} \leq -G(v) \leq \frac{\left(\frac{u^+}{2}\right)^p(1-u^+)^q}{\alpha(v-u^+)}.$$

Schrijf vervolgens de integraal als

$$-\int_{\frac{1}{2}u^+}^{u^+-v(\eta)} G(u^+-\omega)d\omega = \eta,$$

dan vinden we

$$-\int_{\frac{1}{2}u^+}^{u^+-v(\eta)} \frac{(u^+)^p\left(1-\frac{u^+}{2}\right)^q d\omega}{\mu\omega} < \eta < -\int_{\frac{1}{2}u^+}^{u^+-v(\eta)} \frac{\left(\frac{u^+}{2}\right)^p(1-u^+)^q d\omega}{\alpha\omega},$$

oftewel

$$\frac{(u^+)^p\left(1-\frac{u^+}{2}\right)^q}{\mu} \log \frac{2(u^+-v(\eta))}{u^+} < \eta < \frac{\left(\frac{u^+}{2}\right)^p(1-u^+)^q}{\alpha} \log \frac{2(u^+-v(\eta))}{u^+}.$$

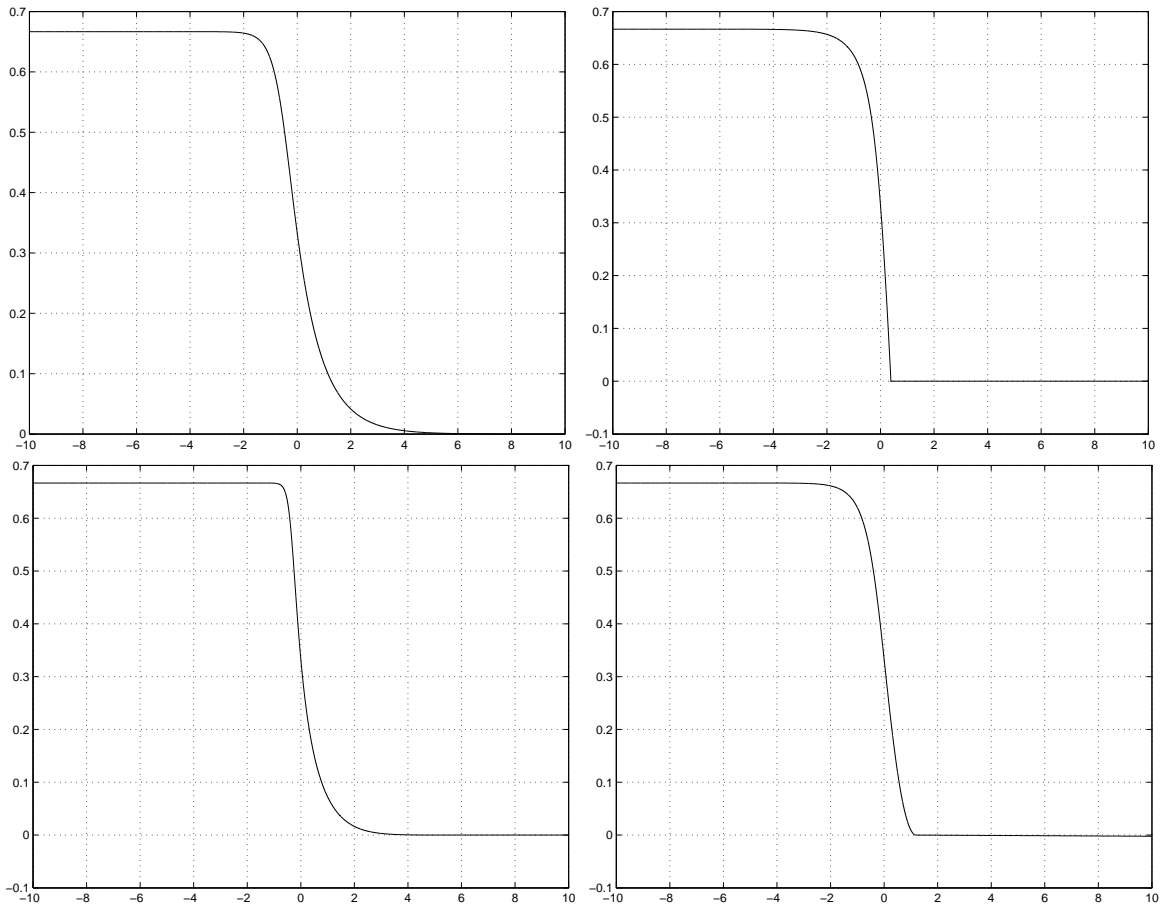
Zodoende kunnen we de functie $v(\eta)$ afschatten door

$$u^+\left(1-\frac{1}{2}\exp(\mu(u^+)^{-p}\left(1-\frac{u^+}{2}\right)^{-q}\eta)\right) < v(\eta) < u^+\left(1-\frac{1}{2}\exp(\alpha\left(\frac{u^+}{2}\right)^{-p}(1-u^+)^{-q}\eta)\right).$$

Dus $0 < v(\eta) < u^+$ voor alle $-\infty < \eta < \eta^*$ en $v(\eta)$ voldoet aan de randwaarden $v(-\infty) = u^+$ en $v(\eta^*) = 0$. Dus de integraal is goed gedefinieerd.

□

De golfprofielen kunnen berekend worden met behulp van de integraalvergelijking (3.14). Zoals verwacht blijken de asymptoten hetzelfde te zijn als in het geval waarin D constant is, maar blijkt de convergentie wel sterk afhankelijk te zijn van p en q , zoals te zien is in figuur 3.4. Het blijkt dat voor kleine waarden van p de kromme nog enigszins glad overloopt in de lijn $v = 0$, in tegenstelling tot het profiel bij een waarde $p = 1$, waarbij de kromme bijna de horizontale as bijna loodrecht snijdt. Aan de linkerkant is er sprake van zeer sterke convergentie voor grote waarden van q .



Figuur 3.4: Golfprofielen ($M = 2, u^+ = \frac{2}{3}$) voor de capillair geïnduceerde diffusie $D(u) = u^p(1 - u)^q$, met linksboven: $p = 0, q = 1$; rechtsboven: $p = 1, q = 0$; linksonder: $p = 0.1, q = 2$; rechtsonder: $p = 0.5, q = 0.5$;

3.3 Een evenwichtsverstoring door hysteresis

In de vorige sectie zagen we dat er slechts oplossingen voor het twee-fase stromingsprobleem bestaan, indien $u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}$. Het is tot nu toe dus nog de vraag wat er aan de hand is als we $u^+ > \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ kiezen. Het antwoord op deze vraag zit hem in het feit dat we nog een aspect bij het onderzoek naar het gedrag van de water saturatie achterwege hebben gelaten, n.l. de evenwichtsverstoring in de uitdrukking voor de capillaire druk in (2.13) als gevolg van hysteresis effecten.

3.3.1 Een tweede orde differentiaalvergelijking voor het twee-fase stromingsprobleem

Onderzoek toont aan dat geldt

$$p_o - p_w = p_c(u) - \tau u_t, \quad (3.15)$$

voor zekere $\tau > 0$. Deze relatie resulteert in een extra term in vergelijking (3.2):

$$u_t + (F(u))_x = \epsilon u_{xx} - \epsilon^2 \tau u_{xxt}, \text{ voor } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (3.16)$$

Door achtereenvolgens substitutie van (3.4) in deze vergelijking, vermenigvuldiging met ϵ en integratie naar η , vinden we de tweede orde differentiaalvergelijking met randwaarden

$$\begin{aligned} c\tau v'' - v' - cv + F(v) &= 0 \text{ op } \mathbb{R}; \\ v(-\infty) &= u^+, \quad v(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

De integratieconstante valt weg vanwege de conditie $v(\infty) = 0$. Uit de conditie $v(-\infty) = u^+$ volgt (3.7). De argumenten waarmee we in de vorige sectie de entropie conditie hebben afgeleid gaan hier niet op voor $\tau > 0$.

Het is nu de vraag welke rol de parameter τ precies zal spelen bij het onderzoek naar lopende golf oplossingen en of er een waarde voor τ bestaat z.d.d. er een lopende golf oplossing is die beide randwaarden met elkaar verbindt. De niet-lineaire term $F(v)$ in (3.17) maakt het lastig om een oplossing voor deze vergelijking te vinden. Daarom is het voor de hand liggend om de oplossingen van de differentiaalvergelijking allereerst in kwalitatieve zin te onderzoeken.

3.3.2 Het gedrag in de buurt van de evenwichten

Om de oplossingen van de tweede orde differentiaalvergelijking te kunnen representeren door banen in het fasevlak schrijven we de vergelijking als een stelsel van eerste orde differentiaalvergelijkingen in \mathbb{R}^2 . In dit geval krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{d\eta} &= \Psi(\mathbf{v}) \text{ op } \mathbb{R}^2; \\ \mathbf{v}(-\infty) &= (u^+, 0), \quad \mathbf{v}(\infty) = (0, 0), \end{aligned} \quad (3.18)$$

waarin \mathbf{v} de vector notatie is voor (v, θ) en de functie $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd is door

$$\Psi(\mathbf{v}) = \left(\theta, \frac{\theta + cv - F(v)}{c\tau} \right). \quad (3.19)$$

We zijn nu geïnteresseerd in de structuur van de oplossingen wanneer we τ variëren, met in het bijzonder het gedrag van de oplossingen in de buurt van de evenwichtspunten. Hiertoe kunnen we de functie Ψ lineariseren in de buurt van een evenwichtspunt \mathbf{v}_e . Doordat per definitie $\Psi(\mathbf{v}_e) = \mathbf{0}$ kunnen we in een kleine omgeving van \mathbf{v}_e schrijven

$$\Psi(\mathbf{v}_e + \mathbf{h}) = \Psi'(\mathbf{v}_e)\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}), \quad (3.20)$$

waarbij de restterm voldoet aan $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$ en waarin

$$\Psi'(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c-f(v)}{c\tau} & \frac{1}{c\tau} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

de functionaalmatrix is. De gelineariseerde vergelijking rond \mathbf{v}_e is dus

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\eta} = \Psi'(\mathbf{v}_e)\mathbf{v}. \quad (3.22)$$

We onderscheiden nu twee gevallen:

1. als $u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ bestaan er twee evenwichtspunten voor $v \in [0, 1]$: $(0, 0)$ en $(u^+, 0)$ (zie figuur 3.2),
2. als $u^+ > \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ bestaan er drie evenwichtspunten voor $v \in [0, 1]$: $(0, 0)$, $(\frac{M}{(M+1)u^+}, 0)$ (oplossing (3.11)) en $(u^+, 0)$ (zie figuur 3.5).

Indien $u^+ \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ is de entropie conditie van kracht en bestaat er een lopende golf oplossing voor $\tau = 0$. We zullen in het vervolg dus veronderstellen dat $u^+ > \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ en zodoende dat er drie evenwichtspunten bestaan voor $v \in [0, 1]$.

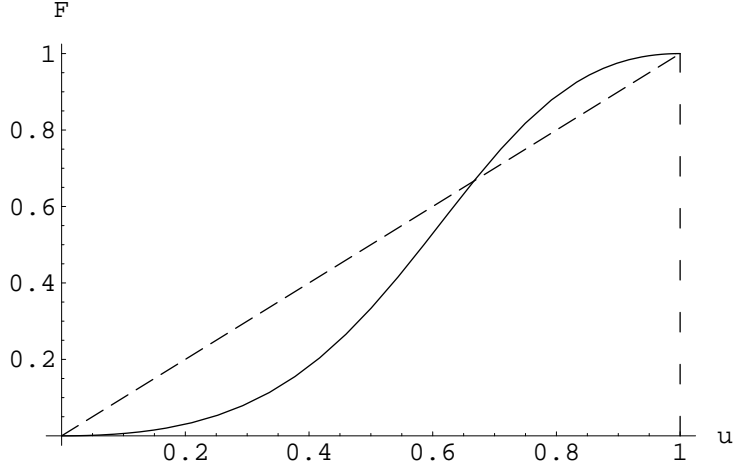
Teneinde een uitspraak te doen over de stabiliteit in de evenwichtspunten bepalen we de eigenwaarden van de functionaalmatrix. De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^2 - \frac{1}{c\tau}\lambda + \frac{f(v) - c}{c\tau} = 0. \quad (3.23)$$

Hieruit volgen de eigenwaarden

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c\tau(c - f(v))}}{2c\tau}. \quad (3.24)$$

We proberen nu aan de hand van de eigenwaarden een uitspraak te doen over de stabiliteit in de evenwichtspunten:



Figuur 3.5: Grafieken van $F(v)$ en $l : v \mapsto cv$ ($M = 2$, $u^+ = 1$). De lijn heeft drie snijpunten met $F(v)$ op $[0, u^+]$, corresponderende met de evenwichtspunten van (3.18).

$\mathbf{v}_e = (0, 0)$: Beide eigenwaarden zijn reëel en verschillen onderling van teken. Het punt $(0, 0)$ is dus een zadelpunt.

$\mathbf{v}_e = (\frac{M}{(M+1)u^+}, 0)$: Doordat $v = \frac{M}{(M+1)u^+}$ een oplossing is van $cv - F(v) = 0$ en $\frac{F(v)}{v} < f(v)$ voor $v < \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ (zie sectie 5.2.3 - “bijlage 3: eigenschappen van de fractionele stromingsfunctie F ”) geldt

$$c = \frac{F(\frac{M}{(M+1)u^+})}{\frac{M}{(M+1)u^+}} < f(\frac{M}{(M+1)u^+}).$$

De eigenwaarden zijn dus reëel dan en slechts dan als $\tau \leq (4c(f(\frac{M}{(M+1)u^+}) - c))^{-1}$. In het geval dat $u^+ = 1$ zijn de eigenwaarden bijvoorbeeld reëel voor $\tau \leq \frac{1}{4}$. Wanneer dit het geval is hebben we te maken met een zadelpunt.

Wanneer $1 + 4c\tau(c - f(v)) < 0$ is het evenwichtspunt eveneens instabiel, maar hebben we te maken met een bron. De eigenvectors \mathbf{k}_\pm bij de complexe eigenwaarden $\lambda_\pm = \alpha \pm i\beta$ voldoen aan

$$(\Psi'(\mathbf{v}_e) - \lambda_\pm I)\mathbf{k}_\pm = \mathbf{0},$$

en zijn dus eveneens complex. In een kleine omgeving van het punt $(\frac{M}{(M+1)u^+}, 0)$ hebben de oplossingen van (3.18) de gedaante

$$\mathbf{v}_\pm(\eta) = \mathbf{k}_\pm e^{\lambda_\pm \eta}.$$

Hiermee kunnen we de fundamentele oplossingsverzameling schrijven als

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\eta) &= \frac{c_1}{2}(\mathbf{v}_+(\eta) + \mathbf{v}_-(\eta)) + \frac{c_2}{2i}(\mathbf{v}_+(\eta) - \mathbf{v}_-(\eta)) \\
&= c_1 \operatorname{Re}(\mathbf{v}_+(\eta)) + c_2 \operatorname{Im}(\mathbf{v}_+(\eta)) \\
&= \Omega(\eta)e^{\alpha\eta},
\end{aligned}$$

waarin Ω een reële periodieke vectorfunctie is, onafhankelijk van de waarde van α . Doordat $\alpha > 0$ is $(\frac{M}{(M+1)u^+}, 0)$ dus een instabiel spiraalpunt.

$\mathbf{v}_e = (u^+, 0)$: We vinden hier dat $c - f(u^+) > 0$, dus $(u^+, 0)$ is een zadelpunt.

3.3.3 Het faseportret

Wanneer we het stelsel differentiaalvergelijkingen (3.18) bekijken zien we onmiddellijk dat de methode van Scheiden van variabelen hier geen uitkomst biedt. De banen in het fasevlak van de oplossingen van (3.18) voor verschillende waarden voor τ , M en u^+ zijn wel te schetsen door numerieke integratie van het stelsel. Merk dan allereerst op dat de oplossingen niet exact aan beide rand condities kunnen voldoen, doordat deze overeenkomen met de twee eerder gevonden zadelpunten. De verklaring hiervoor is het asymptotische gedrag van de lopende golf oplossingen in de buurt van de randwaarden $v = 0$ en $v = u^+$. We kunnen de banen daarom laten beginnen in een punt in de buurt van een van deze twee zadelpunten en trachten een τ te vinden z.d.d. de baan een voldoende kleine omgeving van het andere zadelpunt doorloopt.

Alvorens ons met het weergeven van de banen zelf bezig te houden, zoeken we naar de isoclines en gaan we daarbij de richting bepalen in de verschillende gebieden in het fasevlak die gescheiden worden door de isoclines. De isoclines worden hier gegeven door de lijn

$$\theta = 0, \tag{3.25}$$

en de hyperbool

$$\theta = \frac{v^2}{v^2 + M(1-v)^2} - cv. \tag{3.26}$$

Nu zijn we in staat om de volgende vier gebieden te onderscheiden:

1. $\theta > \max\{0, \frac{v^2}{v^2 + M(1-v)^2} - cv\}$: $\frac{dv}{d\eta} > 0$, $\frac{d\theta}{d\eta} > 0$; de water saturatie neemt versnellend toe naarmate η groter wordt;
2. $0 < \theta < \frac{v^2}{v^2 + M(1-v)^2} - cv$: $\frac{dv}{d\eta} > 0$, $\frac{d\theta}{d\eta} < 0$; de water saturatie neemt vertragend toe naarmate η groter wordt en zal dus in zekere zin naar het evenwichtspunt $\mathbf{v}_e = (u^+, 0)$ neigen;

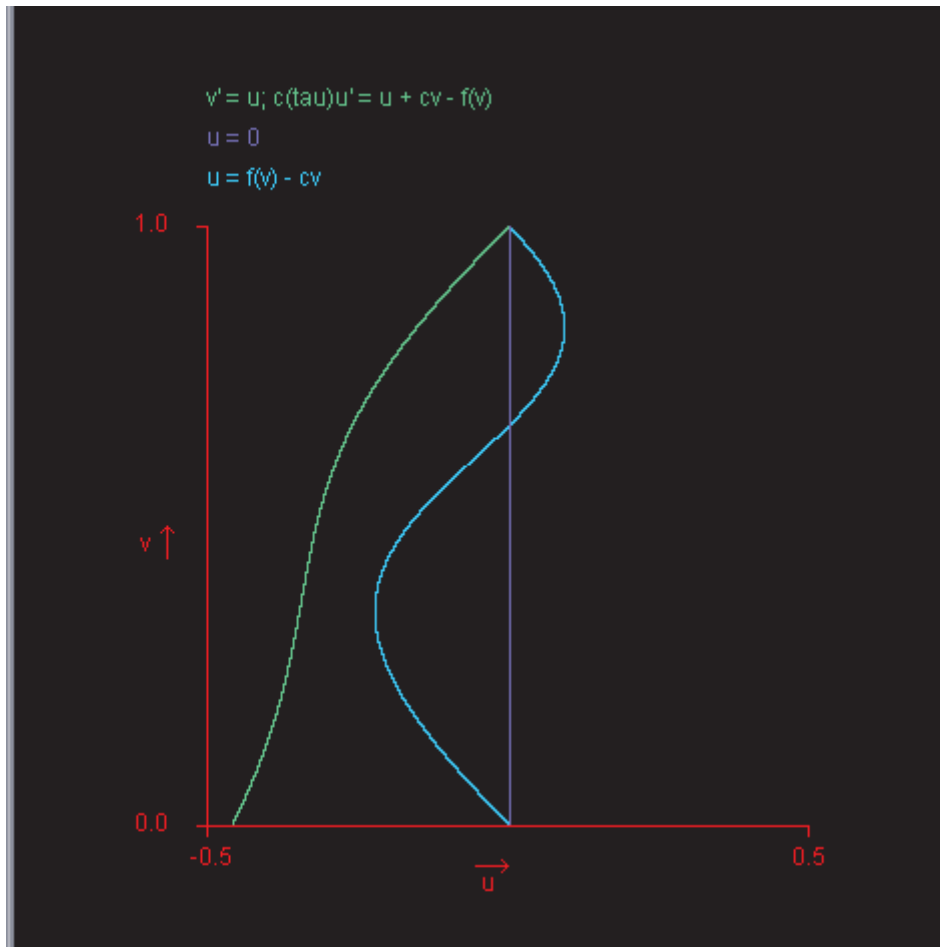
3. $\frac{v^2}{v^2+M(1-v)^2} - cv < \theta < 0$: $\frac{dv}{d\eta} < 0$, $\frac{d\theta}{d\eta} > 0$; de water saturatie neemt vertragend af naarmate η groter wordt en zal dus in zekere zin naar het evenwichtspunt $\mathbf{v}_e = (0, 0)$ neigen;
4. $\theta < \min\{0, \frac{v^2}{v^2+M(1-v)^2} - cv\}$: $\frac{dv}{d\eta} < 0$, $\frac{d\theta}{d\eta} < 0$; de water saturatie neemt versnellend af naarmate η groter wordt;

Een voorwaarde voor een lopende golf oplossing die de punten $(0, 0)$ en $(u^+, 0)$ met elkaar verbindt is dus dat de baan van de oplossing de hyperbool (3.26) snijdt. Ook maken we uit de verschillende richtingen in de vier gebieden op dat banen zich in een kleine omgeving van het middelste evenwichtspunt $(\frac{M}{(M+1)u^+}, 0)$ zullen gedragen als spiralen (zie figuur 3.12). Voor kleine waarden van τ wordt $\frac{d\theta}{dv}$ echter heel groot en zal de baan zich des te sneller van dit evenwichtspunt verwijderen.

We kunnen de banen van de oplossingen in het fasevlak schetsen door achtereenvolgende punten op de baan een voor een te bepalen. Dit is mogelijk door uitgaande van het beginpunt \mathbf{v}_0 steeds in ieder punt \mathbf{v}_i de raaklijn van de baan

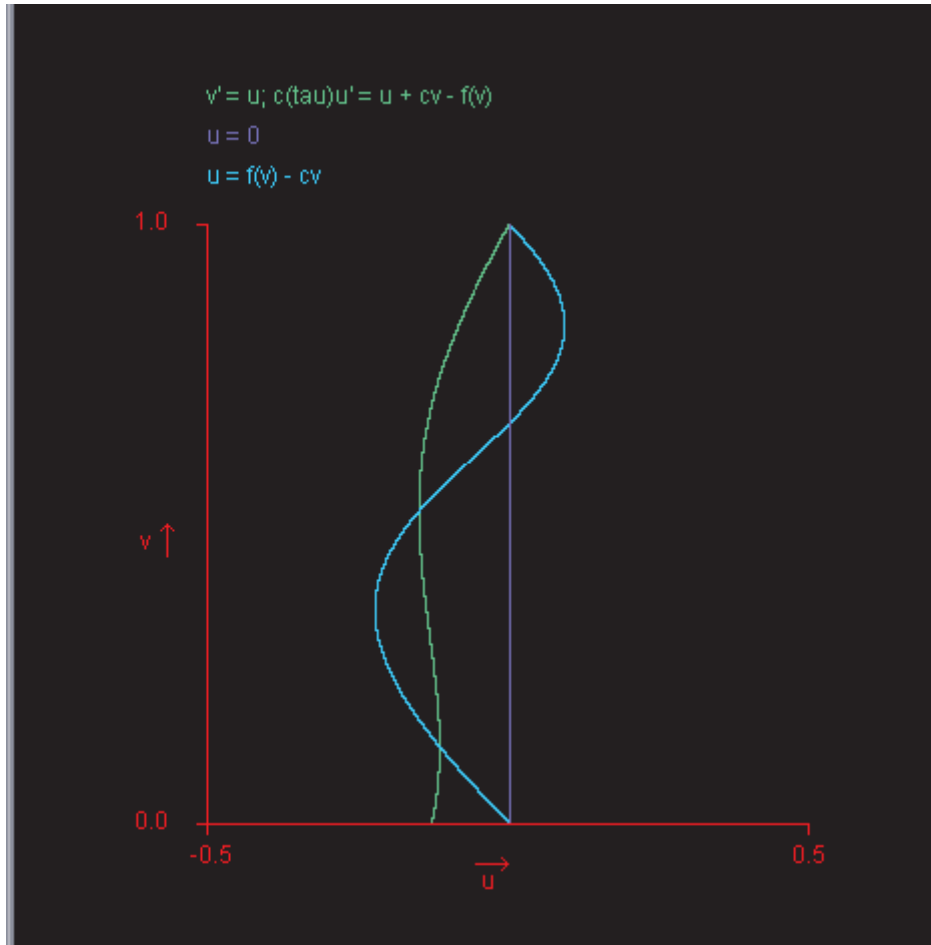
$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{\theta + cv - F(v)}{c\tau\theta}, \quad (3.27)$$

te bepalen en het volgende punt \mathbf{v}_{i+1} op de raaklijn te kiezen in een voldoende kleine omgeving van het punt \mathbf{v}_i . Het tekenen van deze banen gebeurt met behulp van Java. In de faseportretten representeert de variabele u de variabele $\theta = v'$ en is er voor gekozen om u tegen de horizontale as uit te zetten en v tegen de verticale as. De groene kromme representeert de baan van de lopende golf oplossing van (3.18), de lichtblauwe kromme is de hyperbool (3.26) en de donkerblauwe lijn is (3.25). Het beginpunt \mathbf{v}_0 van de baan kiezen we steeds in een zeer kleine omgeving $\mathbb{B}_{\mathbf{v}_e, \delta}$, met $0 < \delta \ll 1$, van het evenwichtspunt \mathbf{v}_e . Aan de hand van het voorgaande zullen we nu twee gevallen onderscheiden, die we zullen illustreren aan de hand van enkele faseportretten.



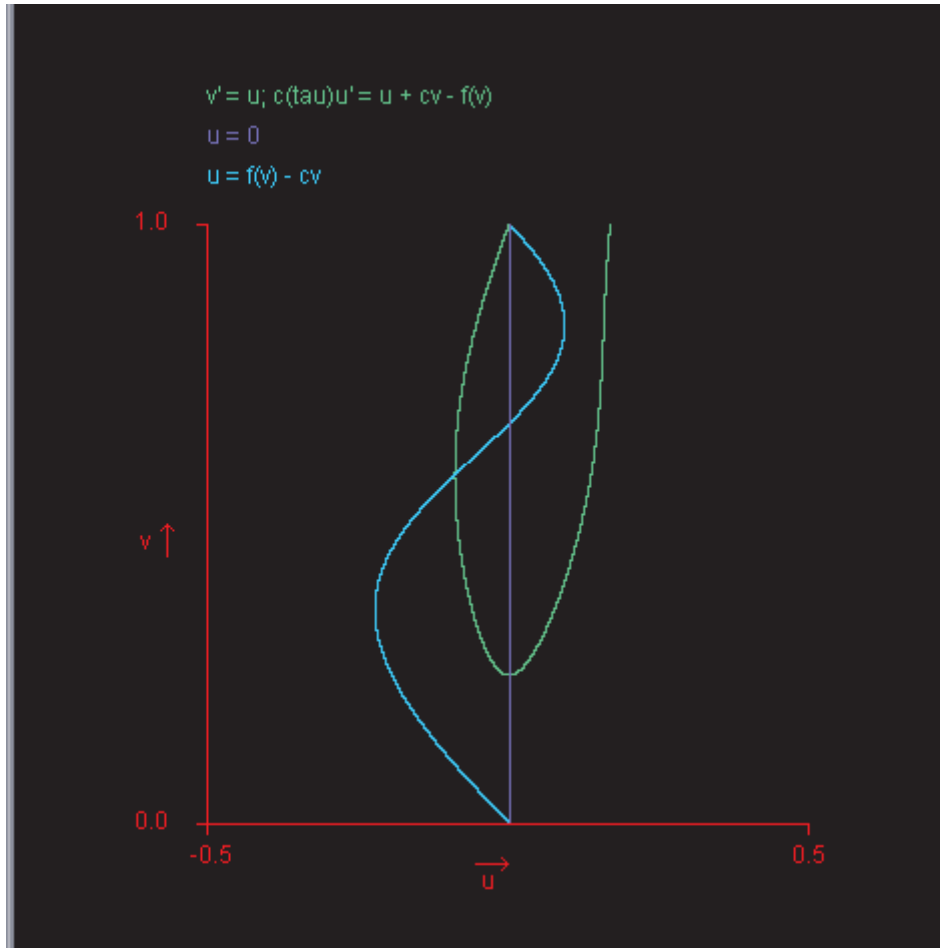
Figuur 3.6: Faseportret met $u^+ = 1$, $M = 2$, $\tau = 2$ en beginpunt $\mathbf{v}_0 = (0.999, -0.001)$. De baan verdwijnt naar het oneindige zonder eerst de isoclines te snijden.

- (1) De baan blijft aan een zijde van de lijn $\theta = 0$ of snijdt deze eenmaal voordat de baan de hyperbool (3.26) snijdt en blijft daarna steeds aan dezelfde zijde van $\theta = 0$. Naarmate we τ kleiner nemen, wordt $\frac{d\theta}{dv}$ groter en voor zekere kritieke waarde $\hat{\tau}$ zal de baan onmiddellijk verdwijnen naar het oneindige wanneer $\tau < \hat{\tau}$, zonder eerst de hyperbool (3.26) te snijden (zie figuur 3.6), terwijl de baan voor $\tau > \hat{\tau}$ eerst (3.26) snijdt, vervolgens naar de θ -as neigt en daarna nogmaals (3.26) snijdt om uiteindelijk te verdwijnen naar het oneindige (zie figuur 3.7).



Figuur 3.7: Faseportret met $u^+ = 1$, $M = 2$, $\tau = 5$ en beginpunt $\mathbf{v}_0 = (0.999, -0.001)$. De baan snijdt eerst de hyperbool tweemaal en verdwijnt vervolgens naar het oneindige.

- (2) De baan blijft enige tijd om het spiraalpunt $(\frac{M}{(M+1)u^+}, 0)$ cirkelen. De instabiele aard van het spiraalpunt zal er echter zorg voor dragen dat de baan in zijn spiraalvorm naar buiten gericht is en dus steeds wijdere bogen zal maken om het spiraalpunt. Het effect van het spiraalpunt is duidelijker wanneer het beginpunt dicht in de buurt van het spiraalpunt wordt gekozen, zoals te zien is in figuur 3.12. Doordat we het beginpunt van de baan steeds in een zeer kleine omgeving van een van de zadelpunten $(0, 0)$ en $(u^+, 0)$ kiezen, zal de baan dus slechts één boog maken om het spiraalpunt en vervolgens verdwijnen naar het oneindige (zie figuur 3.8). Hierbij is het voor grote waarden voor τ nog mogelijk dat de baan nogmaals (3.26) snijdt, maar zal daarna de lijn $\theta = 0$ niet meer snijden, mits δ voldoende klein is.



Figuur 3.8: Faseportret met $u^+ = 1$, $M = 2$, $\tau = 10$ en beginpunt $\mathbf{v}_0 = (0.999, -0.001)$. De baan maakt een boog om het spiraalpunt en verdwijnt vervolgens naar het oneindige.

De gewenste situatie is de situatie waarin de baan vanuit het ene zadelpunt precies in het andere zadelpunt terecht komt en voldoet in principe aan geen van de twee gevallen. Deze baan is dan ook analytisch gezien onmogelijk, maar we kunnen wel eisen dat de baan zo dicht mogelijk in de buurt van beide zadelpunten komt. Nu bestaat er bij gegeven u^+ en M een waarde $\tau^*(u^+, M)$ z.d.d. geval (1) geldt voor alle $\tau < \tau^*(u^+, M)$ en geval (2) geldt voor alle $\tau > \tau^*(u^+, M)$. Dan is $\tau^*(u^+, M)$ de waarde voor τ die we zoeken.

Gegeven dat $M \geq 1$, zijn we slechts in staat banen te vinden die van $(u^+, 0)$ naar $(0, 0)$ lopen, maar niet andersom. Dit is klaarblijkelijk te wijten aan de term $\frac{cv - F(v)}{c\tau}$ van $\frac{d\theta}{d\eta}$ in (3.18), waardoor θ veel meer toeneemt over het traject tussen het beginpunt $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{B}_{0,\delta}$ en het eerste snijpunt van de baan met hyperbool (3.26), dan dat deze afneemt op het traject tussen dit snijpunt en het volgende snijpunt met (3.26) (zie figuur 3.12). Alle banen die beginnen in een voldoende kleine omgeving van het punt $(0, 0)$ zijn dus van geval (1) en aldus concluderen we dat $\tau^*(u^+, M) \rightarrow \infty$ voor banen met een beginpunt in de omgeving van $(0, 0)$ en met

$M \geq 1$. We hoeven dus slechts de waarde van $\tau^*(u^+, M)$ te vinden voor banen die beginnen in een kleine omgeving van het punt $(u^+, 0)$.

3.3.4 Numerieke resultaten

Het vinden van $\tau^*(u^+, M)$ gebeurt weer numeriek met behulp van Java. De methode die gebruikt wordt kan worden gezien als een variant op bisectie, waarmee men de numerieke waarden van de wortels van vergelijkingen kan vinden. Hierbij gaan we in iedere stap uit van een baan van geval (1) met $\tau = \tau_i^{(1)}$ en een baan van geval (2) met $\tau = \tau_i^{(2)}$, $i \geq 0$. In de eerste stap kiezen we normaal gesproken $\tau_0^{(1)} = 0$ en $\tau_0^{(2)} \gg \tau^*(u^+, M)$. (We zullen hier standaard $\tau_0^{(2)} = 10^8$ kiezen, wat voldoende groot zal blijken voor $M \geq 2$.) Vervolgens beschouwen we de baan in het fasevlak met $\tau_i^{(1)} < \tau_i < \tau_i^{(2)}$, uitgaande van $\tau_0 = 1$ en beginwaarde $\theta_0 < 0$, en bepalen we numeriek het eerste punt dat op deze baan ligt en waarvoor geldt dat ofwel $v \leq 0$ (de baan is van geval(1)), ofwel $\theta \geq 0$ (de baan is van geval(2)). Wanneer de baan van geval (1) is, dan kiezen we achtereenvolgens

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}^{(1)} &:= \tau_i; \\ \tau_{i+1}^{(2)} &:= \tau_i^{(2)}; \\ \tau_{i+1} &:= \frac{\tau_i + \tau_i^{(2)}}{2},\end{aligned}$$

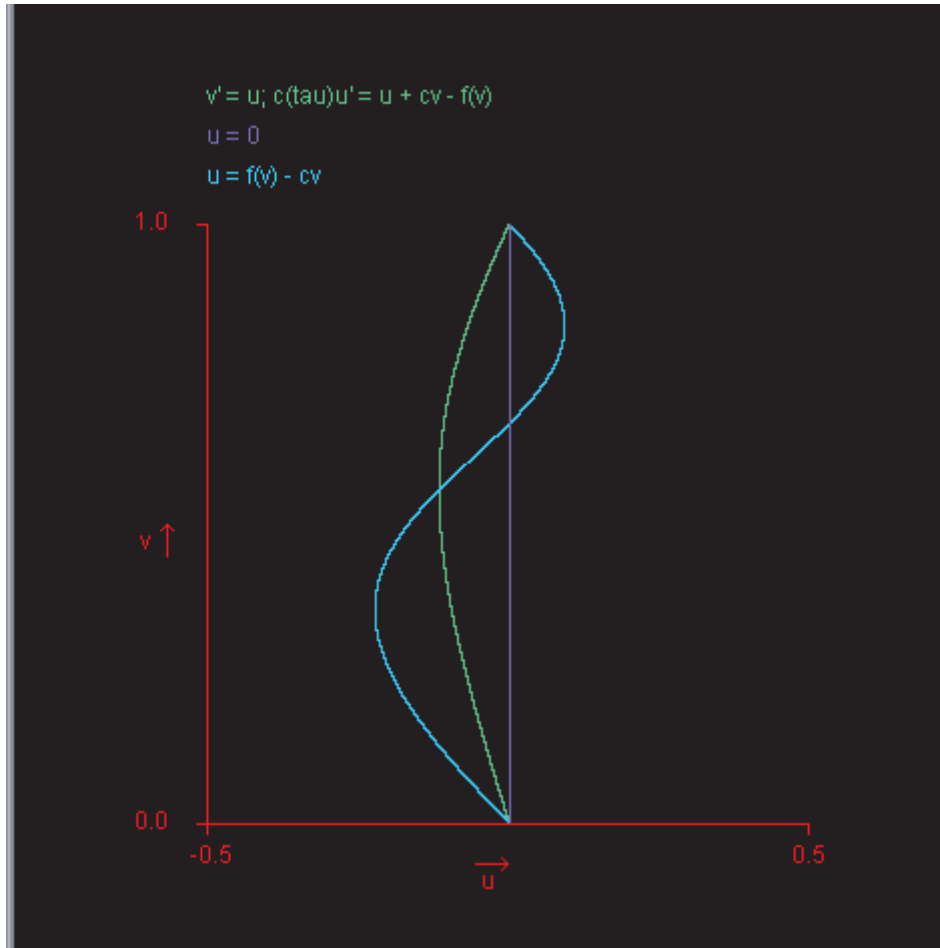
en indien de baan van geval (2) is, dan kiezen we

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}^{(1)} &:= \tau_i^{(1)}; \\ \tau_{i+1}^{(2)} &:= \tau_i; \\ \tau_{i+1} &:= \frac{\tau_i^{(1)} + \tau_i}{2}.\end{aligned}$$

Deze procedure blijven we herhalen tot τ voldoet aan een tevoren aangegeven stopcriterium.¹

We zullen nu met behulp van deze methode enkele waarden van M en u^+ de numerieke oplossing voor $\tau = \tau^*(u^+, M)$ bepalen. Hierbij is P het numeriek bepaalde eindpunt van de baan met $\tau = \tau^*(u^+, M)$, d.w.z. het eerste punt op de baan waarvoor geldt dat ofwel $v \leq 0$, ofwel $\theta \geq 0$. De coördinaten \mathbf{v}_P van P zullen een redelijke indruk geven van hoe dicht de baan het punt $(0, 0)$ nadert. Als beginpunt kiezen we steeds $\mathbf{v}_0 = (u^+, 0) - (1, 1) \times 10^{-12}$.

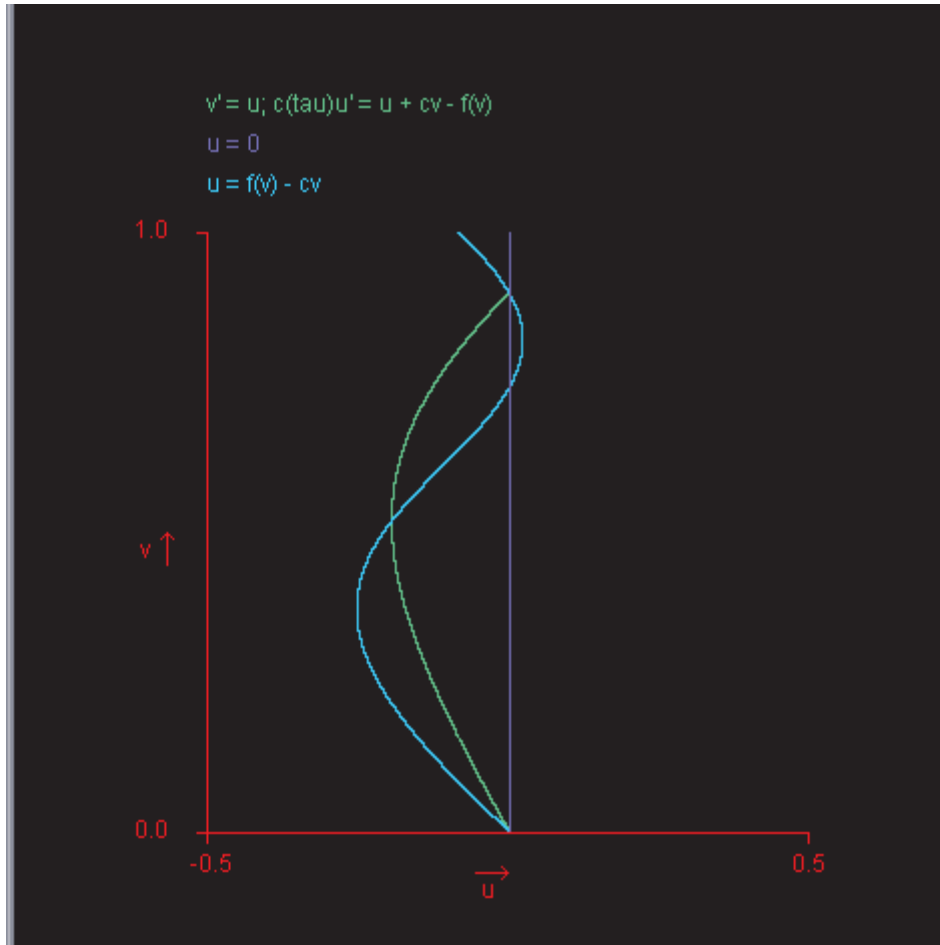
¹We zullen hier het stopcriterium $\frac{A_i(\tau_i - \tau_i^{(1)})}{1 - A_i} < \alpha$, met $A_i = \max\{|\frac{\tau_i - \tau_i^{(1)}}{\tau_i^{(2)} - \tau_i}|, \frac{1}{2}\}$, gebruiken.



Figuur 3.9: Faseportret met $\tau^*(1, 2)$.

u^+	M	$\tau^*(M, u^+)$	\mathbf{v}_P
1	2	6.957655696663442	$(-1.1430589542 \times 10^{-6}, -9.9999990837 \times 10^{-6})$
0.9	2	1.500621950478964	$(1.0224429772 \times 10^{-7}, 4.6118775234 \times 10^{-13})$
1	3	2.729779251926381	$(4.7283968793 \times 10^{-8}, 9.1626817014 \times 10^{-13})$
1	5	1.237340687531670	$(1.2986717902 \times 10^{-6}, 1.0000000916 \times 10^{-5})$
1	10	0.572756693687929	$(0.0284009492, 2.1000000092 \times 10^{-4})$

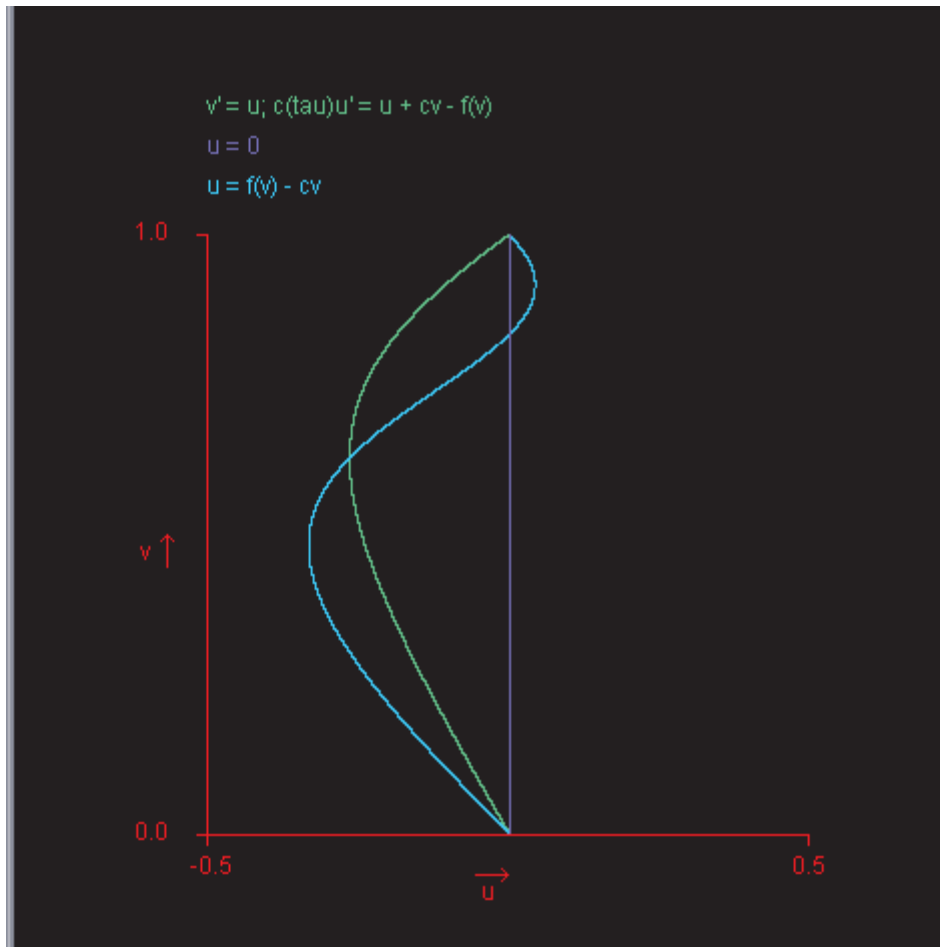
In de tabel is duidelijk te zien dat τ^* kleiner wordt naarmate u^+ kleiner wordt en naarmate M groter wordt. Hierbij neemt τ^* meer af voor kleine M , naarmate M groter wordt, dan voor grote M . Hieruit kunnen we concluderen dat als de viscositeiten van de vloeistoffen in de poreuze laag sterk van elkaar verschillen (en de viscositeit ratio M dus groot is), de



Figuur 3.10: Faseportret met $\tau^*(0.9, 2)$.

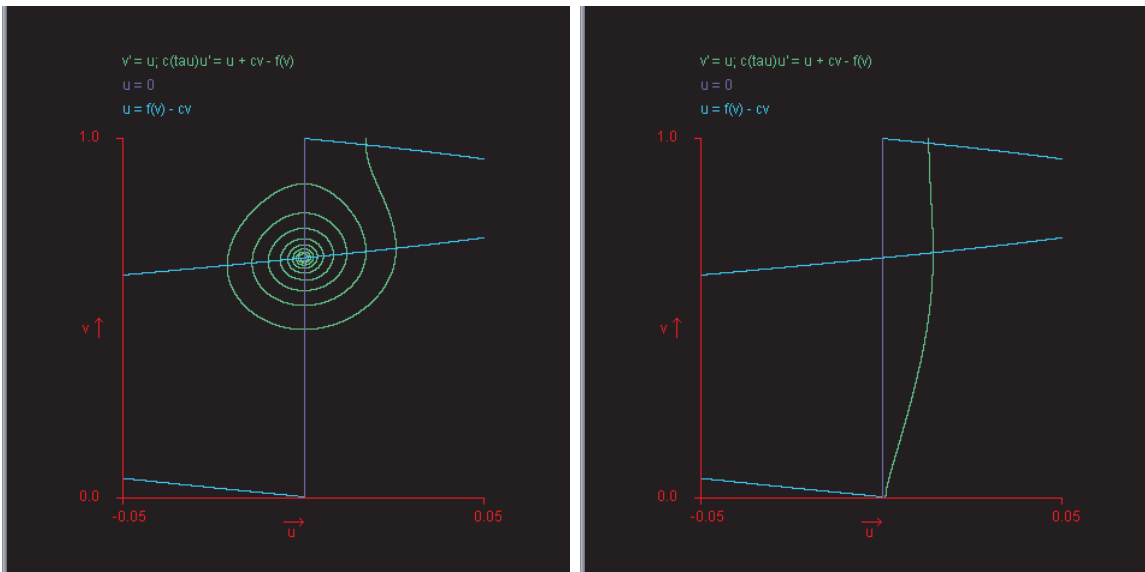
hysterese effecten in (3.16) minder sterk zullen optreden. Gezien de coördinaten van P , lijken de benaderingen minder nauwkeurig te worden naarmate M groter wordt, hoewel de benadering voor $\tau^*(1, 2)$ veel minder nauwkeurig lijkt dan die voor $\tau^*(1, 3)$. De verklaring hiervoor is waarschijnlijk dat de baan met $\tau = 6.957655696663442$ van geval (1) is, terwijl de banen bij de andere waarden voor τ in de tabel alle van geval (2) zijn.

Het feit dat we een numeriek bepaalde baan van een lopende golf oplossing van (3.18) zo dicht in de buurt van de punten $(0, 0)$ en $(u^+, 0)$ kunnen kiezen als wenselijk is (zolang we de hulpmiddelen die we tot onze beschikking hebben het toelaten), geeft aan dat er voor alle $M \geq 1$ en $\sqrt{\frac{M}{M+1}} < u^+ \leq 1$ een lopende golf oplossing moet bestaan die de punten $\mathbf{v} = (0, 0)$ en $\mathbf{v} = (u^+, 0)$ met elkaar verbindt. De waarde voor $\tau^*(u^+, M)$ blijkt hierbij numeriek zeer nauwkeurig te benaderen te zijn, als blijkt uit de waarden in de tabel en de grafieken van de numerieke banen van de oplossingen.



Figuur 3.11: Faseportret met $\tau^*(1,5)$.

Tenslotte merken we nog op dat in de praktijk de waarde van τ^* bekend zal zijn door onderzoek naar het effect van hysteresis en we hierbij de waarde van u^+ zullen moeten zoeken, waarbij de water saturatie aan het rechter uiteinde van de poreuze laag gelijk aan 0 is. Wanneer we echter u^+ variëren zal dit het randwaarde probleem zodanig beïnvloeden dat het onderzoek naar de numerieke waarde voor u^+ bij gegeven τ nogal bemoeilijkt wordt.



Figuur 3.12: Faseportretten ($M = 2$, $u^+ = 1$). **Links:** $\tau = 75$ en $\mathbf{v}_0 = (0.667, -0.001)$. De baan vormt een naar buiten draaiende spiraal om het middelste evenwichtspunt. **Rechts:** $\tau = 1000$ en $\mathbf{v}_0 = (0.001, 0.001)$. Voor alle τ is de baan van geval (1) en er bestaat dus geen eindige waarde voor τ waarvoor de baan vanuit $(0, 0)$ willekeurig dicht in de buurt van $(u^+, 0)$ kan komen.

Hoofdstuk 4

Conclusies

De doelstelling gedurende dit onderzoek was steeds om de oplossingen van verstoringen van de Buckley-Leverett vergelijking te onderzoeken, omdat de oplossingen van de differentiaalvergelijking schokoplossingen vertoonden, waaraan we geen enkele fysische waarde toe konden kennen. Dit leidde in sectie 3.2 tot de entropie conditie (3.9). Onder de entropie conditie bestaan er lopende golf oplossingen voor de differentiaalvergelijking voor de transport balans, die we in sectie 2.2 hebben afgeleid, waarbij we de hysteresis effecten buiten beschouwing hebben gelaten (d.w.z. voor $\tau = 0$). De aanvullende term $N_c(D(u)u_x)_x$ in vergelijking (3.1) weet de oplossingen dan zodanig te sturen, dat de gaten die we in de oplossingen voor de Buckley-Leverett vergelijking vonden, in de oplossingen van (3.1) gedicht worden, zodat er gladde oplossingen ontstaan. Deze lopende golf oplossingen geven het gedrag van de water saturatie dan ook uitstekend weer, in tegenstelling tot de schokoplossingen van de Buckley-Leverett vergelijking.

Voor $u^+ > \sqrt{\frac{M}{M+1}}$ kunnen we geen lopende golf oplossingen voor vergelijking (3.1) vinden, zolang we de hysteresis effecten buiten beschouwing laten. Een tweede verstoring van de Buckley-Leverett vergelijking blijkt noodzakelijk te zijn voor het bestaan van een lopende golf oplossing en zodoende ontstaat vergelijking (3.16). De entropie conditie speelt dan geen enkele rol meer bij het wel of niet bestaan van lopende golf oplossingen. We kunnen de banen van de lopende golf oplossingen dan numeriek bepalen door de waarde van $\tau^*(u^+, M)$ te benaderen. Uit de numerieke resultaten in sectie 3.3.4 blijkt dat de banen zeer goed te benaderen zijn. Dit zou naast de intuïtieve argumenten in sectie 3.3.3 voldoende bewijs moeten zijn voor het bestaan van lopende golf oplossingen.

We zijn dus uiteindelijk in staat om voor alle $0 < u^+ \leq 1$ de schokoplossingen van de Buckley-Leverett vergelijking te vervangen door gladde lopende golf oplossingen van verstoringen van de Buckley-Leverett vergelijking, die we verkrijgen door een aantal fysische effecten in acht te nemen, die we verwaarloosd hebben bij het afleiden van de oorspronkelijke Buckley-Leverett vergelijking. Het is dus noodzakelijk om deze effecten mee te nemen bij het opstellen van de transport balans om het gedrag van de water saturatie als functie van plaats en tijd te kunnen verklaren.

Tenslotte mag natuurlijk opgemerkt worden dat we ons gedurende dit onderzoek hebben

bepikt tot de randcondities $v(-\infty) = u_l = u^+$ en $v(\infty) = 0$. Willekeurige waarden voor u_l en u_r hadden geleid tot de algemene entropie conditie

$$\frac{F(v) - F(u_r)}{v - u_r} > c = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}. \quad (4.1)$$

Wanneer $u_r \neq 0$ dan wordt het probleem enigszins gecompliceerder, hoewel de werkwijze vrijwel analoog is aan het geval waarin $u_r = 0$. In dit onderzoek was het voldoende om de waarde van $u_l = u^+$ te vinden bij $u_r = 0$ of de waarde van $\tau^*(u^+, M)$ als gevolg van hysteresis. In dat geval weten we wat de water saturatie is in het mengsel dat we aan de linkerkant van de poreuze laag injecteren, zodat we aan de rechterkant pure olie ($S_o = 1$) zullen vinden.

Hoofdstuk 5

Appendices

5.1 Appendix A Definities

5.1.1 Grootheden

k : specifieke permeabiliteit [darcy]; de absolute permeabiliteit tensor met respect voor de bijdrage van het poreuze medium aan de doordringbaarheid.

k_r : relatieve permeabiliteit [$m_{vloeistof}^3 m_{rots}^{-3}$]; het quotiënt van de effectieve permeabiliteit van de betreffende vloeistof en de specifieke enkele-fase permeabiliteit.

M : viscositeit ratio van water en olie, gegeven door $\frac{\mu_w S_w^2 k_{ro}}{\mu_o S_o^2 k_{rw}}$; deze dimensielose parameter komt voor in de fractionele stromingsfunctie.

N_c : capillair getal, gegeven door (2.21); dimensieloos.

p : vloeistof druk [Pa]; de druk die de betreffende vloeistof op zijn omgeving uitoefent.

p_c : capillair druk [Pa]; het gemiddelde druk verschil tussen de aanwezige vloeistoffen als gevolg van de gekromde oppervlakken tussen de fasen.

\mathbf{q} : Darcy snelheid [$m_{vloeistof}^3 m_{rots}^{-2} s^{-1}$]; wordt ook wel de volume flux, filter snelheid, oppervlakte stromingssnelheid of specifieke loslating genoemd; volgens de wet van Darcy (2.4) is deze gedefinieerd door $\mathbf{q} = \frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta A} \mathbf{n}$, waarin \mathbf{Q} [$m_{vloeistof}^3 s^{-1}$] de volumetrische stromingssnelheid van een homogene vloeistof door een poreus medium is en \mathbf{A} [m_{rots}^2] de oppervlakte van de dwarsdoorsnede loodrecht op de stromingsrichting is.

S : saturatie [$m_{vloeistof}^3 m_{leegte}^{-3}$]; fractie van de porie dat gevuld is met de betreffende vloeistof.

u : water saturatie in termen van de dimensielose tijds- en plaatscoördinaten in (2.18).

μ : viscositeit [$Pa \cdot s$].

σ : oppervlakte spanningstensor tussen de vloeistoffen in de porieën [$Pa \cdot s^{-1}$].

Φ : porositeit [$m_{leepte}^3 m_{rots}^{-3}$]; de fractie van de rots dat bestaat uit open ruimten of porieën.

5.1.2 Functies

Capillair geïnduceerde diffusie (D): $D(u) > 0$ voor $0 < u < 1$ en $D(0) = D(1) = 0$, gegeven door $D(u) = -F(u)(1-u)^2 \frac{\partial p_c}{\partial u}$, waarin u de water saturatie is.

Fractionele stromingsfunctie (F): $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, gegeven door $F(u) = \frac{u^2}{M(1-u)^2 + u^2}$, met $M \geq 1$ de viscositeit ratio en u de water saturatie. De afgeleide van F naar u zullen we gedurende het onderzoek aangeven met f .

Leverett functie (J): $J : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, is strikt dalend en $J(0^-) = \infty$. De Leverett functie beschrijft de capillair druk als functie van de geschaalde water saturatie volgens het Leverett model (2.14).

5.2 Appendix B Bijlagen

5.2.1 Bijlage 1: schaling van de saturaties in (2.5)

We definiëren achtereenvolgens de ingesloten water saturatie S_{wc} door de maximale water saturatie die capillair is ingesloten en de resterende olie saturatie S_{or} door de maximale olie saturatie die capillair is ingesloten. Een typisch poreus medium heeft een ingesloten water saturatie $S_{wc} = 0.2$ en een olie saturatie $\tilde{S}_o = 0.8$. Wanneer er een druk gradiënt aanwezig is zal slechts de olie in beweging komen. Per definitie geldt

$$\tilde{S}_w + \tilde{S}_o = 1, \tag{5.1}$$

waarin $\tilde{S}_w \in [S_{wc}, 1 - S_{or}]$ de water saturatie is en $\tilde{S}_o \in [S_{or}, 1 - S_{wc}]$ de olie saturatie is. Het zal nu eenvoudiger blijken om de saturaties als volgt te schalen:

$$S_w = \frac{\tilde{S}_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}}, \tag{5.2}$$

$$S_o = \frac{\tilde{S}_o - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}}. \tag{5.3}$$

Voor de geschaalde saturaties geldt (2.5). In hoofdstuk 2 wordt aangenomen dat de grootte op dezelfde wijze afhangen van de geschaalde saturaties S_w en S_o als van \tilde{S}_w en \tilde{S}_o .

5.2.2 Bijlage 2: afleiding van de massa balans in differentiaal vorm in (2.10)

De integrale massabehoudswet, toegepast op een willekeurig niet bewegend controle volume V van de rots, omsloten door een oppervlak S met buitennormaal \mathbf{n} luidt:

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho_\alpha dV + \oint_S \varrho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}) dS = 0, \quad \alpha = w, o, \quad (5.4)$$

waarin ϱ_α [$kg_{vloeistof} \cdot m_{rots}^{-3}$] de dichtheid van de betreffende vloeistof is, verdeeld over het controle volume, en \mathbf{v}_α [$m_{rots} s^{-1}$] de snelheid van de betreffende vloeistof in het controle volume is. De eenheid m_{rots} is die voor de afstand in het controle volume van de rots. De betekenis van $(\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}) dS$ is de volumeflux die het volume V verlaat door het oppervlakte element dS . De interpretatie van de massabehoudswet is dat een toename $\frac{d}{dt} \int_V \varrho_\alpha dV$ van de vloeistof massa in V een gevolg is van de instromende vloeistof massa $-\oint_S \varrho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}) dS$ door het omhullende oppervlak S .

In hoofdstuk 2 zal het eenvoudiger blijken om de massa balans uit te drukken in termen van de algemene vloeistof dichtheid ρ_α [$kg_{vloeistof} \cdot m_{vloeistof}^{-3}$] en de Darcy snelheid \mathbf{q}_α van de betreffende vloeistof. De relaties van deze grootheden met ϱ_α en \mathbf{v}_α zijn

$$\varrho_\alpha = \Phi S_\alpha \rho_\alpha, \quad (5.5)$$

en

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\mathbf{q}_\alpha}{\Phi S_\alpha}, \quad (5.6)$$

waarin Φ [$m_{leepte}^3 m_{rots}^{-3}$] de porositeit van de rots is. We kunnen de integrale massabehoudswet dus schrijven als

$$\frac{d}{dt} \int_V \Phi S_\alpha \rho_\alpha dV + \oint_S \rho_\alpha (\mathbf{q}_\alpha \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (5.7)$$

We willen nu uit deze integraal formulering van de massa balans de differentiaal formulering afleiden. Hiertoe schrijven we de eerste term als $\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\Phi S_\alpha \rho_\alpha) dV$, wat mogelijk is doordat het gebied V vast is. (We moeten nu de partiële afgeleide nemen, omdat ϱ_α ook van de plaats afhangt.) Op de tweede term kunnen we de stelling van Gauss toepassen, die in dit geval luidt als volgt:

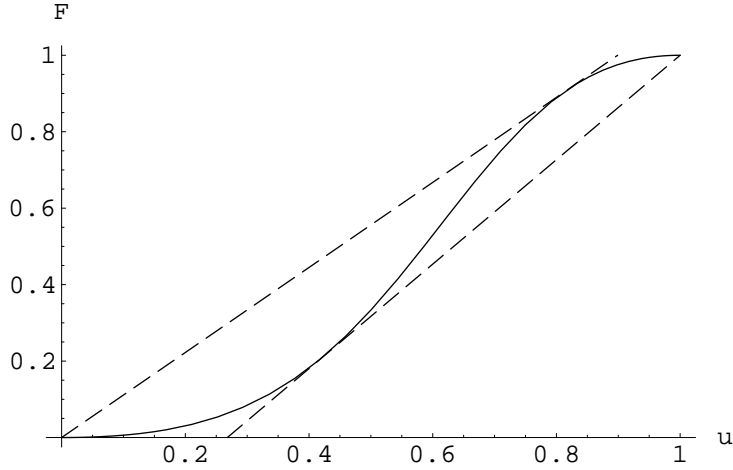
$$\int_V \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{q}_\alpha) dV = \oint_S ((\rho_\alpha \mathbf{q}_\alpha) \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (5.8)$$

We verkrijgen nu de volgende uitdrukking voor de massa balans:

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Phi S_\alpha \rho_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{q}_\alpha) \right) dV = 0. \quad (5.9)$$

Doordat V willekeurig is kunnen we nu de massa balans in differentiaal vorm (2.10) afleiden.

5.2.3 Bijlage 3: eigenschappen van de fractionele stromingsfunctie F



Figuur 5.1: Grafiek van de fractionele stromingsfunctie voor $M = 2$ uitgezet tegen de water saturatie.

De afgeleiden van F

De eerste afgeleide van $F(u)$ is volgens de quotiëntregel

$$\begin{aligned} f(u) = F'(u) &= \frac{(u^2 + M(1-u)^2)(2u) - u^2(2u - 2M(1-u))}{(u^2 + M(1-u)^2)^2} \\ &= 2M \frac{(1-u)u}{(u^2 + M(1-u)^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

We zien dat $f(u) > 0$ voor $0 < u < 1$ en dat $f(0) = f(1) = 0$. De tweede afgeleide van $F(u)$ is vervolgens

$$\begin{aligned} f'(u) &= 2M \frac{(u^2 + M(1-u)^2)^2(1-2u) - (1-u)u(2(u^2 + M(1-u)^2))(2u - 2M(1-u))}{(u^2 + M(1-u)^2)^4} \\ &= 2M \frac{2u^3 - 3u^2 + M(1-u)^2(1+2u)}{(u^2 + M(1-u)^2)^3}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Er is dus een punt $\tilde{u} \in (0, 1)$ afhankelijk van M z.d.d.

$$f'(u) = \begin{cases} > 0 & \text{voor } 0 < u < \tilde{u}; \\ < 0 & \text{voor } \tilde{u} < u < 1. \end{cases} \quad (5.12)$$

De convex-concave vorm van F

Voor de functie F geldt dat $F(1) = 1$ en $F(0) = 0$. Zoals te zien is in figuur 5.1 is het, doordat $F(u)$ convex-concave is op $[0, 1]$, niet mogelijk om rechtstreeks een lijn te trekken van het punt $(0, 0)$ naar het punt $(1, 1)$ zonder dat deze de grafiek van $F(u)$ snijdt. In figuur 5.1 is te zien dat $F(u)$ wordt ingesloten door twee raaklijnen: een door de oorsprong en een door het punt $(1, 1)$.

In verband met lopende golven (zie hoofdstuk 3) zouden we geïnteresseerd kunnen zijn in de punten waar deze lijnen de grafiek van F raken. Bij de bovenste lijn is dit het punt $(s_m, F(s_m))$, waarvoor geldt dat $\frac{F(s_m)}{s_m} = f(s_m)$. Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen na deling door $f(s_m)$, wat resulteert in de vergelijking

$$\frac{2M(1 - s_m)}{s_m^2 + M(1 - s_m)^2} = 1. \quad (5.13)$$

Door nu beide zijden te vermenigvuldigen met de noemer van het linkerlid krijgen we een tweede graads vergelijking met de positieve oplossing $s_m = \sqrt{\frac{M}{M+1}}$.

De onderste lijn bezit een raakpunt $(s_l, F(s_l))$, met $\frac{1-F(s_l)}{1-s_l} = f(s_l)$. Deling door $f(s_l)$ geeft nu

$$\frac{2s_l}{s_l^2 + M(1 - s_l)^2} = 1, \quad (5.14)$$

met als oplossing $s_l = 1 - \sqrt{\frac{1}{M+1}}$.

Bibliografie

- [1] An Introduction to Conservation Laws: Theory and Applications to Multi-Phase Flow
door C.J. van Duijn, Technische Universiteit Eindhoven, 2002;
- [2] Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure
door F.A.L. Dullien, uitgegeven door Academic Press te New York, 1979;
- [3] The mathematics of reservoir simulation
door Richard E. Ewing, uitgegeven door Siam te Philadelphia, 1983;
- [4] Analyse van differentiaalvergelijkingen
door C.J. van Duijn en M.J. de Neef, uitgegeven in opdracht van Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft, 2^e druk 2001.