BACHELOR

Random walks in wachtrijen

Hellings, A.P.

Award date:
2007

Random Walks in Wachtrijen

Ton Hellings (0572066)

27-08-2007

Bachelorproject (2J008)
Technische Wiskunde
Technische Universiteit van Eindhoven

Begeleider: Prof. dr. ir. O.J. Boxma

Samenvatting

Dit bachelorproject is opgedeeld in een literatuuronderzoek en een eigen onderzoek. In het literatuuronderzoek worden hoofdstuk III van *An introduction to probability theory and its applications, Volume 1* van William Feller [1] en hoofdstuk 1 en 2 van *Combinatorial methods in the theory of stochastic processes* van Lajos Takács [2] besproken. In het tweede deel wordt naar de verdeling van een $M/M/1$-wachtrij gezocht.

In hoofdstuk 1, over [1], worden random walks geïntroduceerd en worden veel theorieën erover afgeleid, met als één van de voornaamste de ballot-stelling, die zegt dat als een pad van $(0,0)$ naar (n,x) loopt, met $x > 0$, hij met kans x/n nooit terug in 0 komt. Deze stelling wordt veel gebruikt in de rest van het verslag. Uiteindelijk blijkt ook dat de kans dat een random walk die eindigt in $(n,0)$ precies r keer terugkeert naar 0 gelijk is aan de kans dat een random walk na $n-r$ stappen voor de eerste keer in r komt. Deze stelling zal in het eigen onderzoek terugkomen.
In hoofdstuk 2, over [2] wordt het idee van random walks uitgebreid, door niet alleen over stappen omhoog en omlaag te praten, maar over de som van stochasten die willekeurige niet negatieve gehele getallen kunnen aannemen. Hier wordt naar een verdeling voor het maximum van $N_r - r$ gewerkt. Deze formule blijkt nauw verbonden te zijn met de verdeling van een $M/D/1$-wachtrij.

In het eigen onderzoek wordt gezocht naar de verdeling van een $M/M/1$-wachtrij bij k klanten in het systeem op tijdstip 0. Het aantal aankomsten en het aantal vertrekken in de periode $(0,t)$, respectievelijk A_t en D_t, worden daartoe onderzocht. De kansen $P_{ij}^{(k)}(t) = \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\}$ ondergaan een Laplacetransformatie om de variabelen $p_{ij}^{(k)}(s)$ te krijgen. Voor deze variabelen wordt een recurrente betrekking afgeleid, die met behulp van random walks wordt opgelost. Hierbij blijken de ballot-stelling en de stelling over het aantal terugkeren in 0 erg nuttig te zijn. Door een uitdrukking te vinden voor de $p_{ij}^{(k)}(s)$ en deze terug te transformeren, krijgen we een uitdrukking voor de $P_{ij}^{(k)}(t)$. Voor $i = 0, 1, ...$ en $j = 0, 1, ..., k-1$ blijkt te gelden:

$$P_{ij}^{(k)}(t) = \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} \cdot \frac{(\mu t)^j e^{-\mu t}}{j!}.$$

Voor $i = 0, 1, ...$ en $j = k, k+1, ..., k+i$ wordt het een langere uitdrukking:

$$P_{ij}^{(k)}(t) = \Big(1 - \frac{i!j!}{(i+k)!(j-k)!}\Big) \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} \cdot \frac{(\mu t)^j e^{-\mu t}}{j!} + \\ e^{-\lambda t} \lambda^i \mu^j \sum_{m=0}^{j-k} \frac{i+k-m}{(i+k)!m!(j-k-m)!} \int_0^t (t-u)^{j-k-m} u^{i+k+m-1} e^{-\mu u} du.$$

Hiermee is de onderzoeksvraag beantwoord. Op het eind van het verslag wordt door een simulatie de juistheid van deze uitdrukking geverifieerd.

Inhoudsopgave

Inleiding

Het onderwerp van dit bachelorproject is 'Random walks in wachtrijen'. Het project bestaat uit twee delen. Het eerste deel is een literatuuronderzoek, waarin een introductie wordt gegeven op random walks, met behulp van enkele werken. Het grootste gedeelte is gebaseerd op hoofdstuk III van *An introduction to probability theory and its applications, Volume 1* van William Feller [1]. Daarnaast worden de belangrijkste resultaten uit hoofdstuk 1 en 2 uit *Combinatorial methods in the theory of stochastic processes* van Lajos Takács doorgenomen [2], met een korte stukje over de relatie met een $M/D/1$-wachtrij. Wat dit is, wordt daar uitgelegd.
Het tweede deel is een eigen onderzoek. Hierin wordt de $M/M/1$-wachtrij geïntroduceerd. De onderzoeksvraag luidt: Wat is de verdeling van het aantal aankomsten in de periode $(0, t)$ als er op tijdstip 0 al k klanten aanwezig zijn in het systeem? Deze onderzoeksvraag zal beantwoord worden met behulp van de theorie over random walks die in het eerste deel gegeven zal zijn.

Deel I
Literatuuronderzoek

1 Random Walks

1.1 Introductie

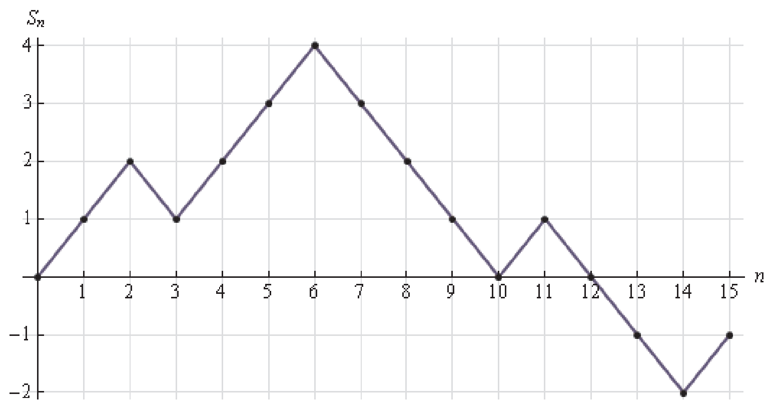
Een discrete 1-dimensionale random walk, in het Nederlands stochastische wandeling of dronkemanswandeling genoemd, wordt bepaald door een opeenvolgend aantal stappen in positieve of negatieve richting. We kunnen het voorstellen als een mens, of een deeltje, dat per tijdseenheid één eenheid naar links of naar rechts loopt. Elke keer dat een stap gedaan is verandert de positie. Normaliter begint men in 0 en bij een positieve eerste stap gaat men naar 1, bij een negatieve eerste stap naar -1. De waarde van de k-de stap wordt aangeduid met ϵ_k en er geldt in dit geval $\epsilon_k = 1$ of $\epsilon_k = -1$.
De positie van het deeltje na k stappen wordt met s_k aangeduid. Bij begin in 0, oftewel bij $s_0 = 0$, geldt $s_k = \epsilon_1 + \epsilon_2 + ... + \epsilon_k = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i$.
Noem voor een random walk ter lengte n het aantal stappen in positieve richting p en het aantal stappen in negatieve richting q. Dan geldt

$$p + q = n, \qquad p - q = s_n, \tag{1}$$

waaruit volgt dat

$$p = \frac{n + s_n}{2}, \qquad q = \frac{n - s_n}{2}. \tag{2}$$

We kunnen een random walk visualiseren door de positie uit te zetten tegen het aantal stappen, zoals gedaan is in Figuur 1. We zullen het in dit verslag onder andere hebben over de oorsprong bij een random walk, oftewel $(0, 0)$, en over horizontale lijnen. Met -1 wordt dan de lijn $s_n = -1$ bedoeld.



Figuur 1: Een willekeurige random walk

1.2 Fundamentele inzichten

Na uitgelegd te hebben wat random walks zijn, zullen hier enkele belangrijke inzichten besproken worden. In deze paragraaf, die gebaseerd is op §III.1 van [1], worden twee belangrijke resultaten gepresenteerd die nog vaak zullen terugkomen in de rest van het verslag, namelijk het reflectieprincipe en de zogenaamde 'ballot'-stelling.
Een pad van de oorsprong naar het punt (n, x) kan alleen bestaan als er gehele $p \geq 0$ en $q \geq 0$ bestaan zodanig dat aan (1) voldaan wordt voor $s_n = x$. Uit (2) blijkt dat dit alleen zo is als $n + x$ even is en $|x| \leq n$. Het aantal paden van de oorsprong naar (n, x) geven we aan met $N_{n,x}$. Er geldt nu

$$N_{n,x} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}. \tag{3}$$

Dit is zo omdat p en q door n en x vastgelegd zijn, maar de volgorde van de stappen in positieve en negatieve richting ten opzichte van elkaar nog niet vastligt. Uit de $p + q$ stappen worden p positieve gekozen en de rest is dan negatief, of er worden q negatieve stappen gekozen en de rest is dan positief. Dit komt op hetzelfde neer en hieruit volgt (3). Als er geen p en q te vinden zijn volgens (1) geldt $N_{n,x} = 0$.

Met slechts deze kennis kunnen we het volgende belangrijke lemma bewijzen.

Lemma 1.1 (Reflectieprincipe) *Laat $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Het aantal paden van een punt $A = (a, \alpha)$ naar $B = (b, \beta)$ die de x-as raken of snijden is gelijk aan het aantal paden van $A' = (a, -\alpha)$ naar B.*

Bewijs Neem een pad $(s_a = \alpha, s_{a+1}, ..., s_b = \beta)$ van A naar B zodanig dat de x-as geraakt of gesneden wordt. Er is nu een eerste punt (k, s_k) met $s_k = 0$, waarvoor geldt $a \leq k < b$. Bekijk nu het pad $(-s_a, -s_{a+1}, ..., -s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, ..., s_b)$. Dit is een pad dat de x-as raakt of snijdt en loopt van A' naar B. Er bestaat zo een één op één relatie tussen paden van A naar B die de x-as raken of snijden en paden van A' naar B. Daarom zijn de aantallen gelijk en is het lemma bewezen. $\square$

Dit lemma heet het reflectieprincipe omdat men om bij de conclusie te komen het pad tot k spiegelt in de x-as. Nu komen we bij de welbekende 'ballot'-stelling. Het gaat hier om de kans dat als bij een stemming tussen kandidaten 1 en 2 uiteindelijk kandidaat 1 als winnaar uit de bus komt, hij de hele tijd voorgelegen heeft in stemmen op kandidaat 2. We kunnen namelijk het verschil in stemmen zien als een random walk, die positief is als kandidaat 1 voor staat en negatief als kandidaat 2 voor staat. Per uitgebrachte stem gaat de random walk dan één stap in de positieve of de negatieve richting.

Stelling 1.2 (Ballot-stelling) *Laat $x, n \in \mathbb{N}$. Nu zijn er precies $\frac{x}{n} N_{n,x}$ paden van de oorsprong naar (n, x) met $s_k > 0$ voor $k = 1, 2, ..., n$.*

Bewijs Voor dit type paden moet gelden $s_1 = 1$. Nu mag de x-as niet meer geraakt worden. Er zijn $N_{n-1,x-1}$ paden van $(1, 1)$ naar (x, n) waarvan er volgens Lemma 1.1

$N_{n-1,x+1}$ de x-as raken. Dus het aantal paden dat wel voldoet is $N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1} = \binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$. Dit kunnen we verder uitwerken:

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{p}{p+q}\binom{p+q}{p} - \frac{q}{p+q}\binom{p+q}{p} = \frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p},$$

en het laatste is gelijk aan $\frac{x}{n}N_{n,x}$. □

1.3 Random walks als functies van stochasten

In §III.2 van [1] gaat Feller over op kansen. In plaats van te kijken naar een random walk als een reeds vastgelegde aaneenschakeling van stappen, kunnen we ook kijken naar een random walk als som van stochastische variabelen. Als we over gaan op kansen, is iedere stap van de random walk een stochast, namelijk $\mathbf{X}_k$ met $k \in \mathbb{N}$. We beperken ons vooralsnog tot de onafhankelijke stochasten $\mathbf{X}_k$ met verdeling $\mathbf{P}\{\mathbf{X}_k = 1\} = \mathbf{P}\{\mathbf{X}_k = -1\} = \frac{1}{2}$ voor $k = 1, 2, ...$ Het is dus net zo waarschijnlijk dat een volgende stap in positieve richting zal zijn als dat hij in negatieve richting zal zijn. Dit is te vergelijken met een eerlijke munt, die evenveel kans heeft op kop als op munt.
De som $\mathbf{S}_n$ van alle stappen, oftewel de positie, is dan ook een stochast met $\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + ... + \mathbf{X}_n$.
We bekijken nu $p_{n,r}$, de kans dat het deeltje na n stappen op positie r is. Voor een random walk ter lengte n zijn 2^n mogelijkheden, voor elke stap zijn er 2 opties. Elk van de 2^n paden komt voor met kans 2^{-n}. Daarom geldt:

$$p_{n,r} = \mathbf{P}\{\mathbf{S}_n = r\} = N_{n,r}2^{-n} = \binom{n}{\frac{n+r}{2}}2^{-n}. \tag{4}$$

Laat nu $u_n = p_{n,0}$, dus de kans dat het deeltje zich na n stappen weer in de startpositie bevindt. Dit kan alleen na een even aantal stappen, dus neem $n = 2v$. Dan geldt:

$$u_{2v} = \mathbf{P}\{\mathbf{S}_{2v} = 0\} = N_{2v,0}2^{-2v} = \binom{2v}{v}2^{-2v}. \tag{5}$$

Voor grote waarden van v kunnen we dit afschatten. Volgens Stirlings formule[1] geldt namelijk dat $n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$. Dat betekent dat voor grote n de verhouding van $n!$ ten opzichte van $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ naar 1 nadert. Het bewijs hiervoor is na te lezen in §II.9 van [1]. Als we hiervan gebruik maken krijgen we:

$$u_{2v} = 2^{-2v}\frac{2v!}{v!v!} \sim 2^{-2v}\frac{\sqrt{2\pi}(2v)^{2v+\frac{1}{2}}e^{-2v}}{(\sqrt{2\pi}v^{v+\frac{1}{2}}e^{-v})^2} = 2^{-2v}\frac{2^{2v+\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi v}}. \tag{6}$$

Deze afschatting is erg nauwkeurig, vanaf $v = 26$ is de fout al minder dan 0,5%.
In dit geval kan voor bepaalde $0 < k < v$ gelden dat $\mathbf{S}_{2k} = 0$. Dan vindt de eerste terugkeer in 0 dus niet plaats op $2v$. We kunnen eisen dat dit wel gebeurt en de kans op

[1] James Stirling, *Methodus differentialis*, 1730.

deze gebeurtenis noemen we f_{2v} met $f_{2v} = \mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 \neq 0, ..., \mathbf{S}_{2v-1} \neq 0, \mathbf{S}_{2v} = 0\}$. Dit kunnen we ook in een korte gesloten uitdrukking zetten, maar daar is eerst een belangrijk lemma voor nodig, dat door Feller in §III.3 van [1] naar voren wordt gebracht.

Lemma 1.3 *Laat $n \geq 0$. Dan is de kans dat het deeltje bij de eerste $2n$ stappen niet meer terugkeert in 0 gelijk aan de kans dat hij na $2n$ stappen in 0 zit. Dus*

$$\mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 \neq 0, ..., \mathbf{S}_{2n} \neq 0\} = \mathbf{P}\{\mathbf{S}_{2n} = 0\} = u_{2n}. \tag{7}$$

Bewijs Als het deeltje nooit terug komt in zijn startpositie is hij het hele pad op de positieve of negatieve kant. De kans op die twee gevallen is gelijk wegens de verdeling van de $\mathbf{X}_k$. Dit lemma is daarom om te schrijven naar

$$\mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 > 0, ..., \mathbf{S}_{2n} > 0\} = \frac{1}{2}u_{2n}, \tag{8}$$

waarbij we dus de helft van de gevallen nemen. We beginnen met sommeren over de mogelijke waarden van $\mathbf{S}_{2n}$.

$$\mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 > 0, ..., \mathbf{S}_{2n} > 0\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 > 0, ..., \mathbf{S}_{2n-1} > 0, \mathbf{S}_{2n} = 2k\}. \tag{9}$$

Volgens Stelling 1.2 geldt $\mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 > 0, ..., \mathbf{S}_{2n-1} > 0, \mathbf{S}_{2n} = 2k\} = \frac{1}{2}(p_{2n-1,2k-1} - p_{2n-1,2k+1})$, dus we krijgen $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(p_{2n-1,2k-1} - p_{2n-1,2k+1})$. Dit is een som waarbij alle termen wegvallen, op twee na. Er blijft over $\frac{1}{2}(p_{2n-1,1} - p_{2n-1,2n+1}) = \frac{1}{2}p_{2n-1,1} = \frac{1}{2}u_{2n}$, zoals makkelijk na te rekenen is. Dit bewijst het lemma. □

Een variant op dit lemma is

$$\mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 \geq 0, ..., \mathbf{S}_{2n} \geq 0\} = u_{2n}. \tag{10}$$

Dit volgt als we een pad nemen volgens het lemma, dat dus strikt boven de x-as ligt, en dan na de eerste stap $(1, 1)$ als nieuwe oorsprong nemen. Dan hebben we een pad ter lengte $2n - 1$ dat de nieuwe x-as wel kan raken maar niet snijdt, dus precies wat we zoeken. Omdat we voor het nieuwe pad de eerste stap van het oude pad niet meer nodig hebben en het nieuwe pad eigenlijk maar in de helft van de gevallen voorafgegaan zou zijn door een stap in positieve richting, geldt

$$\mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 > 0, ..., \mathbf{S}_{2n} > 0\} = \frac{1}{2}\mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 \geq 0, ..., \mathbf{S}_{2n-1} \geq 0\}. \tag{11}$$

Als $\mathbf{S}_{2n-1} \geq 0$, is ook $\mathbf{S}_{2n} \geq 0$, want $2n - 1$ is oneven. Dus volgens (8) geldt nu (10).

Nu kunnen we f_{2v} wel uitdrukken. Er geldt namelijk $f_{2v} = \mathbf{P}\{\mathbf{S}_1 \neq 0, ..., \mathbf{S}_{2v-1} \neq 0, \mathbf{S}_{2v} = 0\} = u_{2v-2} - u_{2v}$, want we zoeken de kans op gevallen waarbij alle $S_{2k} \neq 0$ voor $k = 1, ..., v - 1$, maar niet de gevallen waarvoor ook nog geldt $S_{2v} \neq 0$. Dus krijgen we

$$f_{2v} = u_{2v-2} - u_{2v},$$

waaruit met wat rekenwerk en het toepassen van (5) volgt

$$f_{2v} = \frac{1}{2v-1} u_{2v}.$$

We kunnen concluderen dat $f_2 + f_4 + f_6 + ... = u_0 = 1$ en dat betekent dat het deeltje op den duur altijd weer zal terugkeren naar 0.

1.4 Arcsinus-wetten

Zoals Feller laat zien in §III.4 is er ook aan random walks te rekenen met behulp van de arcsinus-functie. Eerst introduceren we daarvoor $\alpha_{2k,2n}$ als de kans dat tot en met stap $2n$ de laatste terugkeer in 0 voorkwam in stap $2k$.

Stelling 1.4 (Arcsinus-wet voor de laatste bezoeken) *Voor $\alpha_{2k,2n}$, de kans dat het laatste bezoek aan 0 van een random walk ter lengte $2n$ in stap $2k$ was, geldt:*

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{12}$$

Bewijs Er moet nu gelden dat $\mathbf{S}_{2k} = 0$ en $\mathbf{S}_{2r} \neq 0$ voor $k < r \leq n$. We weten dat $\mathbf{P}\{\mathbf{S}_{2k} = 0\} = u_{2k}$. Als we nu $(k, 0)$ als nieuwe oorsprong nemen zien we met behulp van Lemma 1.3 dat $\mathbf{P}\{\mathbf{S}_{2k+1} \neq 0, ..., \mathbf{S}_{2n} \neq 0\} = u_{2n-2k}$. Omdat het pad voor stap $2k$ onafhankelijk is van het pad na stap $2k$ krijgen we nu $\alpha_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}$. □

Deze stelling wordt de arcsinus-wet genoemd omdat de cumulatieve verdelingsfunctie van de $\alpha_{2k,2n}$ voor grote n te benaderen is met een arcsinus-functie. We nemen $x_k = k/n$ en wegens (6) krijgen we dan voor grote n:

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{n\pi\sqrt{x_k(1-x_k)}}. \tag{13}$$

Door op de juiste manier te integreren krijgen we nu een arcsinus-functie als resultaat. Er geldt voor $0 < x < 1$ en n groot genoeg:

$$\sum_{k<xn} \alpha_{2k,2n} \approx \sum_{\frac{k}{n}<x} \frac{1}{n\pi\sqrt{x_k(1-x_k)}} \approx \int_0^x \frac{dy}{\pi\sqrt{y(1-y)}} = A(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{x}. \tag{14}$$

In (12) is duidelijk te zien dat voor alle $0 \leq k \leq n$ geldt $\alpha_{2k,2n} = \alpha_{2n-2k,2n}$. Verder geldt hier, als men de $\alpha_{2k,2n}$ op een rijtje zet geordend naar k, dat de middelste termen het kleinst zijn en de buitenste termen het grootst. Oftewel: $\alpha_{0,2n} > \alpha_{2,2n} > ... > \alpha_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,2n} = \alpha_{2\lceil\frac{n}{2}\rceil,2n} < ... < \alpha_{2n,2n}$.
Deze verdeling komt ook terug in de volgende stelling. Als we hier zeggen dat een random walk een bepaalde tijdseenheid, van bijvoorbeeld stap $n-1$ tot stap n, aan de positieve kant doorbrengt, bedoelen we, als we hem in Figuur 1 zouden schetsen, dat het lijnstuk tussen de punten van stap $n-1$ en stap n aan de positieve kant ligt ten opzichte van de x-as.

Stelling 1.5 (Arcsinus-wet voor tijdseenheden aan positieve kant) *De kans dat een deeltje in een random walk ter lengte $2n$ precies $2k$ tijdseenheden aan de positieve kant spendeert en daarmee dus $2n-2k$ tijdseenheden aan de negatieve kant is gelijk aan $\alpha_{2k,2n}$.*

Bewijs Laat $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Noem de kans waar we naar op zoek zijn $b_{2k,2n}$. We moeten dan bewijzen dat $b_{2k,2n} = \alpha_{2k,2n}$ voor $k = 0, 1, ..., n$. Eerst doen we dit voor $k = 0$ en $k = n$. Dan geldt volgens (10) dat $b_{2n,2n} = u_{2n} = u_{2n}u_0 = \alpha_{2n,2n}$ en wegens symmetrie geldt ook $b_{0,2n} = \alpha_{2n,2n} = \alpha_{0,2n}$.
Neem nu $1 \leq k \leq n-1$. De eerste keer dat het deeltje in 0 terugkeert is op $2r < 2n$. Dat geeft twee mogelijkheden: de eerste $2r$ kanten van het pad liggen op positieve of negatieve zijde van de x-as.
Stel eerst dat ze aan de positieve kant liggen, dan $r < k \leq n-1$ en moet het deeltje zich in de volgende $2n-2r$ tijdseenheden precies $2k-2r$ tijdseenheden aan de positieve kant bevinden. Het aantal paden dat hieraan voldoet is $\frac{1}{2} \cdot 2^{2r} f_{2r} \cdot 2^{2n-2r} b_{2k-2r,2n-2r}$.
De andere mogelijkheid is dat de eerste $2r$ tijdseenheden aan de negatieve kant doorgebracht worden. Dan moeten er van de volgende $2n-2r$ tijdseenheden dus nog steeds $2k$ aan de positieve kant gespendeerd worden. Dan $k \leq n-r$ en zijn er $\frac{1}{2} \cdot 2^{2r} f_{2r} \cdot 2^{2n-2r} b_{2k,2n-2r}$ mogelijke paden.
Dit brengt ons bij de volgende vergelijking:

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} f_{2r} b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} b_{2k,2n-2r}. \tag{15}$$

Nu beginnen we aan versterkte volledige inductie, voor $v = 1$ is $b_{2k,2v} = \alpha_{2k,2v}$ waar. Neem nu aan dat het voor alle $v \leq n-1$ waar is. Dan gaan we kijken naar $v = n$. Invullen in (15) geeft

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} u_{2n-2k} \sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r} + \frac{1}{2} u_{2k} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2n-2k-2r}. \tag{16}$$

Maar door logisch te redeneren kunnen we inzien dat $u_{2k} = f_2 u_{2k-2} + ... + f_{2k-2} u_2 + f_{2k}$. Als de random walk zich na $2k$ stappen in 0 bevindt, is hij immers na $2r$ stappen voor de eerste keer terug in 0 gekomen, en daarna in $2k-2r$ stappen opnieuw terug in 0 gekomen, met $1 \leq r \leq k$. Dat reduceert de eerste som tot u_{2k} en de tweede tot u_{2n-2k}. Dan staat er $b_{2k,2n} = u_{2n-2k} u_{2k}$ en dus klopt het voor $v = n$ en is het bewijs rond. $\square$

Nu gaan we ons beperken tot de paden die op de x-as eindigen, dat leidt tot een verrassend resultaat, zoals in §III.9 van [1].

Stelling 1.6 *Het aantal paden van lengte $2n$ die eindigen op de x-as, oftewel met $\mathbf{S}_{2n} = 0$, en $2k$ tijdseenheden boven de x-as hebben liggen is onafhankelijk van k en gelijk aan $2^{2n} u_{2n}/(n+1) = 2^{2n+1} f_{2n+2}$, met $k = 0, 1, ..., n$.*

Bewijs Eerst kijken we naar $k = 0$, wat wegens symmetrie hetzelfde oplevert als $k = n$. Het aantal paden naar $(2n, 0)$ met $k = n$ is gelijk aan het aantal paden van $(1, 1)$ naar $(2n, 0)$ die niet in -1 komen. We kunnen deze random walks dan 1 naar boven transleren om het aantal paden te krijgen van $(1,2)$ naar $(2n,1)$, die niet in 0 komen. Nu kunnen we Lemma 1.1 toepassen en er geldt dat dit aantal gelijk is aan

$$\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = 2^{2n}\frac{u_{2n}}{n+1}. \tag{17}$$

Dus de stelling is bewezen voor $k = n$ en $k = 0$. We gaan verder met $1 \leq k \leq n-1$ met behulp van volledige inductie. Voor $n = 1$ is het triviaal en daarom kiezen we $n > 1$ en nemen we aan dat het correct is voor alle paden korter dan $2n$. Voor $k \geq 1$ komt het deeltje voor het eerst terug in 0 in $(2r, 0)$ voor een bepaalde r. Nu kan het gedeelte tot $2r$ aan de positieve of negatieve kant hebben gelegen.
Als het aan de positieve kant gelegen heeft zijn er nog $2k - 2r$ tijdseenheden over die boven de x-as doorgebracht moeten worden. Volgens de inductiehypothese kan zo'n pad op

$$2^{2r-1}f_{2r}\frac{2^{2n-2r}}{n-r+1}u_{2n-2r} = \frac{2^{2n-2}}{r(n-r+1)}u_{2r-2}u_{2n-2r} \tag{18}$$

manieren gekozen worden. Het linker- en rechterlid zijn gelijk want

$$f_{2r} = \frac{1}{2r-1}u_{2r} = \frac{2^{-2r}}{2r-1}\cdot\frac{2r!}{r!r!} = \frac{2^{-2r+1}}{r}\cdot\frac{(2r-2)!}{(r-1)!(r-1)!} = \frac{1}{2r}u_{2r-2}. \tag{19}$$

Als de eerste $2r$ tijdseenheden aan de negatieve kant worden doorgebracht heeft het laatste gedeelte van lengte $2n-2r$ nog $2k$ stukken boven de x-as. Hiervoor hebben we ook zoveel mogelijkheden als in (18).
Het aantal paden met $2k$ zijden boven de x-as wordt dus verkregen door (18) te sommeren over $1 \leq r \leq k$ en $1 \leq r \leq n-k$. Maar

$$\sum_{r=1}^{n-k}\frac{2^{2n-2}}{r(n-r+1)}u_{2r-2}u_{2n-2r} = \sum_{q=k+1}^{n}\frac{2^{2n-2}}{(n-q+1)q}u_{2n-2q}u_{2q-2}, \tag{20}$$

verkregen door $q = n+1-r$ te nemen. Gecombineerd met de som over $1 \leq r \leq k$ hebben we nu een som over $1 \leq r \leq n$, geheel onafhankelijk van k. Daarom is het aantal paden dat eindigt in $(2n, 0)$ gelijk verdeeld over de $n+1$ mogelijke waarden van k en is het bewijs rond. $\square$

1.5 Wisselingen van teken

Nu kan het ook interessant zijn hoe vaak het teken eigenlijk wisselt in een random walk ter lengte $2n$. Het blijkt, wellicht tegen intuïtie in, dat als n groter wordt, het aantal wisselingen van teken slechts toeneemt met de orde $\sqrt{n}$. Een wisseling van teken vindt plaats in n als $\mathbf{S}_{n-1} = -\mathbf{S}_{n+1}$. Dan $\mathbf{S}_n = 0$. Feller behandelt dit in §III.5 van [1].

Stelling 1.7 *De kans $\xi_{r,2n+1}$ dat tot en met stap $2n+1$ precies r wisselingen van teken plaatsvinden is gelijk aan $2p_{2n+1,2r+1}$, oftewel*

$$\xi_{r,2n+1} = 2\mathbf{P}\{\mathbf{S}_{2n+1} = 2r+1\}. \tag{21}$$

Bewijs Als de eerste stap naar $(1,1)$ is (wat met kans $\frac{1}{2}$ gebeurt) nemen we dat punt als nieuwe oorsprong. De as uit het oorspronkelijke stelsel correspondeert nu met de horizontale lijn van -1. Als de eerste stap niet naar $(1,1)$ is (ook kans $\frac{1}{2}$), kunnen we het pad spiegelen in de x-as en gaat hij alsnog door $(1,1)$. We kunnen de stelling dus ook formuleren als: De kans dat tot en met de $2n$-de stap de lijn -1 precies r keer gesneden wordt is gelijk aan $2p_{2n+1,2r+1}$.
Neem eerst $r = 0$. Dan mag het pad nooit op -2 komen. Als $\mathbf{S}_{2n} = 2k$ dan zijn er $2^{2n}p_{2n,2k}$ paden van $(0,0)$ naar $(2n,2k)$. Het aantal paden dat wel op -2 komt is volgens Lemma 1.1 gelijk aan $2^{2n}p_{2n,2k+4}$. De kans die we zoeken is dus $p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}$. Hieruit volgt dat

$$\xi_{0,2n+1} = \sum_{k=0}^{n} p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4} = p_{2n,0} + p_{2n,2} - p_{2n,2n+2} - p_{2n,2n+4}. \tag{22}$$

Maar de laatste twee termen zijn gelijk aan 0, omdat $\mathbf{S}_{2n} \leq 2n$. Verder is $\frac{1}{2}(p_{2n,0}+p_{2n,2}) = p_{2n+1,1}$ want vanuit zowel 0 als 2 komt het deeltje met kans $\frac{1}{2}$ in 1. Dus $\xi_{0,2n+1} = 2p_{2n+1,1}$. Hieruit volgt dat de stelling waar is voor $r = 0$.
Dit bewijs gaat verder met inductie, laat $1 \leq t \leq n$ en neem aan dat het geldt voor $r \leq t-1$. Nu kijken we naar $r = t$ (voor $r > n$ is het triviaal). Nu geldt dat het deeltje de horizontale lijn van -1 op een bepaald moment voor het eerst snijdt en op -2 komt, noem dit punt $(2v,-2)$ (er moet gelden $n - v \geq t-1$). Nu moet hij deze lijn nog $t-1$ keer snijden in de volgende $2n - 2v$ stappen. Volgens de inductiehypothese geldt dat het aantal paden ter lengte $2n - 2v$ vanuit $(2v,-2)$ die $t-1$ keer in -1 komen gelijk is aan het aantal paden uit $(2v,-2)$ naar $(2n+1,-2t-1)$. Gecombineerd met het eerste gedeelte van de random walk, naar $(2v,-2)$, doet de waarde van v er niet meer toe. Als we immers sommeren over alle mogelijke waarden van v, krijgen we simpelweg het aantal paden van $(0,0)$ naar $(2n+1,-2t-1)$. Dus het aantal paden dat -1 precies r keer snijdt in $2n$ stappen is gelijk aan het aantal paden naar $(2n+1,-2t-1)$. Dit is hetzelfde aantal als naar $(2n+1,2t+1)$, namelijk $2^{2n+1}p_{2n+1,2t+1}$. Dus de gezochte kans is $2p_{2n+1,2t+1}$, omdat we het nu over een pad ter lengte $2n$ hebben en niet ter lengte $2n+1$. Dus vinden we $\xi_{t,2n+1} = 2\mathbf{P}\{\mathbf{S}_{2n+1} = 2t+1\}$ en klopt het voor $r = t$ en daarmee voor alle $0 \leq r \leq n$. $\square$

Hieruit volgt dat $\xi_{0,n} > \xi_{1,n} > \xi_{2,n} > ...$, dus de kans dat er geen enkele keer van teken wordt gewisseld is groter dan de kans op elk ander aantal wisselingen. Dit klinkt misschien vreemd, maar het wil natuurlijk niet zeggen dat het verwachte aantal wisselingen altijd gelijk is aan 0.

1.6 Maxima en tijden van eerste doorkomst

Deze paragraaf vat §III.7 van [1] samen. In plaats van paden die bijvoorbeeld boven de x-as blijven, gaan we nu kijken naar paden die onder een bepaalde horizontale lijn blijven met waarde r. Als voor $i = 0, ..., n$ geldt dat $\mathbf{S}_i < r$ voor een pad van lengte n, dan zeggen we dat het maximum van het pad kleiner is dan r. We komen nu op het volgende lemma.

Lemma 1.8 *Laat $k \leq r$. De kans dat een pad ter lengte n eindigt in $A = (n, k)$ en maximum $\geq r$ heeft is gelijk aan $p_{n,2r-k} = \mathbf{P}\{\mathbf{S}_n = 2r - k\}$.*

Bewijs Een pad van de oorsprong naar A dat aan de criteria voldoet moet ergens de horizontale lijn ter hoogte r raken of snijden. Met behulp van een translatie zien we dat het aantal paden dat dit doet volgens Lemma 1.1 gelijk is aan het aantal paden van de oorsprong naar $A' = (n, 2r - k)$. Dit bewijst het lemma. $\square$

Bij Lemma 1.8 wordt geen rekening gehouden met het daadwerkelijke maximum, alleen met een ondergrens aan het maximum. In de volgende stelling komt dit daadwerkelijke maximum wel aan bod.

Stelling 1.9 *De kans dat het maximum van een pad ter lengte n gelijk is aan $r \geq 0$ is gelijk aan de positieve term van $p_{n,r}$ en $p_{n,r+1}$.*

Bewijs De kans dat nu het maximum precies r is en de random walk in (n, k) eindigt, is volgens Lemma 1.8 gelijk aan $p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k}$. Het is namelijk zo in de gevallen met maximum $\geq r$ maar juist niet in die met maximum $\geq r + 1$. De kans op maximum r is daarom, gesommeerd over de mogelijke waarden van k, als volgt $\sum_{k=2r-n}^{r}(p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k}) = p_{n,r} + p_{n,r+1}$. Als $n + r$ even is, geldt $p_{n,r+1} = 0$ en als $n + r$ oneven is, geldt $p_{n,r} = 0$. $\square$

Als volgende gaan we kijken naar de plaats waar het (tot dan toe) hoogste punt aangenomen wordt. Daarover gaat de volgende stelling. Een eerste doorkomst door de horizontale lijn met waarde $r > 0$ vindt plaats in stap n als $\mathbf{S}_1 < r, ..., \mathbf{S}_{n-1} < r$ en $\mathbf{S}_n = r$.

Stelling 1.10 *De kans $\varphi_{r,n}$ dat de eerste doorkomst door r plaatsvindt in stap n is gelijk aan*

$$\varphi_{r,n} = \frac{1}{2}(p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}). \tag{23}$$

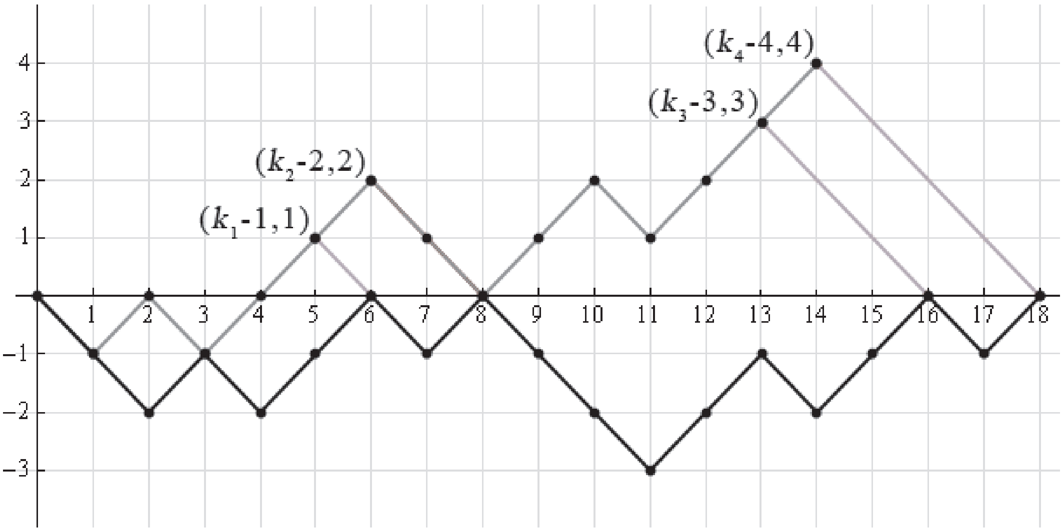
Bewijs Een pad met eerste doorkomst door r in (n, r) gaat ook door $(n - 1, r - 1)$. Tot en met stap $n - 1$ is het maximum van het pad gelijk aan $r - 1$. Dat gebeurt volgens Lemma 1.8 met kans $p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}$. Nu maakt hij met kans $\frac{1}{2}$ de volgende stap in de positieve richting, door (n, r). Dat bewijst de stelling. $\square$

De zojuist geïntroduceerde kans φ komt ook voor als we kijken naar de kans dat de r-de terugkeer in de x-as plaatsvindt in stap n.

Stelling 1.11 *De kans dat de r-de terugkeer op de x-as plaatsvindt in stap n is $\varphi_{r,n-r}$.*

Bewijs Bekijk een pad van de oorsprong naar $(n, 0)$ dat helemaal aan de negatieve kant van de x-as ligt en tussen de oorsprong en $(n, 0)$ precies $r - 1$ keer de x-as raakt. Dit soort paden noemen we voor ons gemak *goed*. Een goed pad bestaat uit r stukken die beginnen en eindigen op de x-as en door een willekeurig aantal van deze stukken in de x-as te spiegelen kunnen we 2^r paden maken die nog steeds op dezelfde punten de x-as raken. Voor elk van deze paden is er dus een uniek corresponderend goed pad door alle positieve stukken te spiegelen in de x-as. Er zijn dus precies 2^r keer zoveel paden die een

r-de terugkomst in $(n, 0)$ hebben als dat er goede paden zijn. Als we nu van elk van de r stukken van een goed pad de eerste stap wegnemen, krijgen we een pad ter lengte $n - r$. Dit is weergegeven in Figuur 2. Dan verandert de positie van de eerste terugkomst van het goede pad op de x-as van $(k_1, 0)$ op het nieuwe pad in $(k_1 - 1, 1)$. Zo verandert elk punt van i-de terugkeer van $(k_i, 0)$ in $(k_i - i, i)$. Daarvoor was het pad nog nooit in i geweest. Dus voor het eindpunt geldt in het nieuwe pad de positie $(n - r, r)$. Dit is de eerste doorkomst daar, dus er zijn $2^{n-r}\varphi_{r,n-r}$ van zulke paden. Ieder goed pad correspondeert op deze manier met een pad naar $(n - r, r)$ met maximum r. We kunnen immers ook teruggaan, door de eerste doorkomsten in de horizontale lijnen $0, 1, ..., r - 1$ te nemen, namelijk $(0, 0), (m_1, 1), ..., (m_{r-1}, r - 1)$. Nu plakken we achter elk van deze punten een stap in negatieve richting, dan krijgen we het originele goede pad terug. Er is dus een één-op-één-relatie. Aangezien ieder goed pad representatief is voor 2^r paden, zijn er in totaal $2^n\varphi_{r,n-r}$ van paden met r-de terugkeer op de x-as in n en is de stelling bewezen. □



Figuur 2: Een voorbeeld van de relatie uit Stelling 1.11

Je zou nu zeggen dat elke keer dat de x-as geraakt wordt een nieuwe oorsprong genomen kan worden en dat de tijd tot de r-de terugkeer ongeveer gelijk is aan r keer de tijd tot de eerste terugkeer. Dit blijkt niet zo te zijn, zegt Feller in §III.7, het is van de orde r^2 keer de tijd tot de eerste terugkeer. Dus de tijd tot de volgende terugkeer neemt grof gezegd steeds verder toe, met orde r.

1.7 Dualiteit

Voor een pad van $(0, 0)$ tot (n, k) is k de som van de $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$. Als we (n, k) als nieuwe oorsprong nemen en het pad over 180° draaien hebben we opnieuw een pad van $(0, 0)$ tot (n, k), maar voor de nieuwe stappen, de $\mathbf{X}_i^*$ geldt dat $\mathbf{X}_i^* = \mathbf{X}_{n+1-i}$, met $1 \leq i \leq n$. Dus de stappen staan nu in omgekeerde volgorde. Er geldt nu ook

$$\mathbf{S}_i^* = \mathbf{X}_1^* + ... + \mathbf{X}_i^* = \mathbf{X}_n + ... + \mathbf{X}_{n+1-i} = \mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n-i}. \tag{24}$$

Hiermee is weer een groot aantal stellingen op eenvoudige wijze af te leiden. Hier gaan we niet al te diep op in, maar er volgen wel enkele voorbeelden. De volledige bewijzen behandelt Feller in §III.8 van [1].

Stelling 1.12 *De kans dat de eerste doorkomst door een horizontale lijn* $r \geq 0$ *op* n *is, is gelijk aan* $\frac{1}{2}u_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Stelling 1.13 *De kans dat* $\mathbf{S}_n$ *een maximum is is gelijk aan* $u_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Stelling 1.14 *De kans dat het eerste bezoek aan* $\mathbf{S}_{2n}$ *plaatsvond in stap* $2n-2k$ *is* $\alpha_{2k,2n}$.

Stelling 1.15 *De kans dat het maximum van een pad ter lengte* $2n$ *voor het eerst plaatsvindt in stap* $2r$ *of* $2r+1$ *is* $\frac{1}{2}\alpha_{2r,2n}$, *behalve als* $r = 0$ *of* $r = n$, *dan zijn de kansen respectievelijk* u_{2n} *en* $\frac{1}{2}u_{2n}$.

Stelling 1.16 *De kans dat het maximum van een pad ter lengte* $2n$ *voor het laatst plaatsvindt in stap* $2r$ *of* $2r-1$ *is* $\frac{1}{2}\alpha_{2r,2n}$, *behalve als* $r = 0$ *of* $r = n$, *dan zijn de kansen respectievelijk* $\frac{1}{2}u_{2n}$ *en* u_{2n}.

2 Generalisaties van Random Walks

In dit hoofdstuk zal een aantal resultaten uit de eerste twee hoofdstukken van *Combinatorial methods in the theory of stochastic processes* van Lajos Takács [2] worden doorgenomen. Hier zullen slechts enkele uitvoerige bewijzen komen zoals in hoofdstuk 1, voor de andere bewijzen verwijzen we naar [2].

2.1 Generalisatie van de ballot-stelling

Deze paragraaf is gebaseerd op hoofdstuk 1 van [2]. Hierin wordt een generalisatie gegeven van de ballot-stelling zoals we hem zagen in paragraaf 1.2. De laatste zal bewezen worden en omdat uit die stelling de rest is af te leiden, zijn deze daarmee ook bewezen.

Stelling 2.1 *Als in een verkiezing kandidaat A met a stemmen eindigt en kandidaat B met b stemmen, waarbij $a \geq \mu b$ voor een bepaalde $\mu \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dan is de kans dat gedurende de telling het aantal stemmen voor A altijd groter is dan μ keer het aantal stemmen voor B gelijk aan*

$$P = \frac{a - \mu b}{a + b}, \tag{25}$$

als de volgorde van de telling volkomen willekeurig is.

Het geval van $\mu = 1$ hebben we al gezien in paragraaf 1.2. Stelling 2.1 kan ook op een andere manier worden gezien, namelijk als kaarten in een vaas. De volgende stelling is dan ook equivalent aan de vorige stelling.

Stelling 2.2 *Als een vaas a kaarten met een 0 erop en b kaarten met $(\mu + 1)$ erop bevat en alle $a + b$ kaarten zonder teruglegging worden getrokken, is de kans dat voor alle $r \in \{1, 2, ..., a + b\}$ de som van de getallen op de eerste r getrokken kaarten kleiner is dan r gelijk aan*

$$P = 1 - \frac{k}{n} = \frac{a - \mu b}{a + b}, \tag{26}$$

waarbij $n = a + b$ het totale aantal kaarten is en $k = b(\mu + 1)$ de som van de getallen op alle kaarten bij elkaar is. Hierbij is aangenomen dat $k \leq n$ en dat opnieuw alle trekkingen even waarschijnlijk zijn en $\mu \in \mathbb{N}_0$.

Deze twee stellingen zijn equivalent. Stel namelijk dat er de tussenstand is waarbij α_r kaarten met waarde 0 en β_r kaarten met waarde $(\mu + 1)$ getrokken zijn. Als dan geldt dat $\alpha_r \cdot 0 + \beta_r(\mu + 1) < \alpha_r + \beta_r$, kunnen we hieruit afleiden dat $\alpha_r > \mu\beta_r$.
Deze laatste stelling zullen we generaliseren. In plaats van n kaarten te nemen met twee mogelijke waarden erop, nemen we nu willekeurige gehele niet-negatieve getallen $k_1, k_2, ..., k_n$ en zullen we het over de som hebben van de eerste r getallen van cyclische permutaties. Een cyclische permutatie van $(k_1, ..., k_n)$ is een permutatie van de vorm $(k_{1+i}, k_{2+i}, ..., k_n, k_1, ..., k_i)$ voor zekere $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Stelling 2.3 *Laat $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}_0$, zodanig dat $k_1 + k_2 + ... + k_n = k \leq n$. Van de n cyclische permutaties op $(k_1, ..., k_n)$ zijn er precies $n - k$ waarbij de som van de eerste r elementen kleiner is dan r voor alle $r \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Bewijs Neem $k_{r+n} = k_r$ voor $r \in \mathbb{N}$, dus plaats dezelfde rij getallen oneindig vaak achter elkaar. Definieer $\phi_r = k_1 + k_2 + ... + k_r$ voor $r \in \mathbb{N}$ met de conventie $\phi_0 = 0$. Definieer vervolgens

$$\delta_r = \begin{cases} 1 & \text{als } i - \phi_i > r - \phi_r \text{ voor alle } i > r, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

$$\psi_r = \inf\{i - \phi_i \text{ voor } i > r\},$$

voor $r \in \mathbb{N}$. Deze δ_r geeft aan, als we de cyclische permutatie nemen met resultaat $k_1^*, ..., k_n^*$, waarbij $k_1^* = k_{r+1}$, of de som van de eerste i elementen kleiner is dan i voor $i \in \{1, ..., n\}$. De ongelijkheid $i - \phi_i > r - \phi_r$ voor $i > r$ wordt dan immers $i - \phi_i^* > 0 - \phi_0^* = 0$ voor $i > 0$, oftewel $\phi_i^* < i$.
We nemen nu $d_r = \psi_r - \psi_{r-1}$. Het enige verschil tussen ψ_r en ψ_{r-1} is de waarde $r - \phi_r$ die bij ψ_{r-1} wel wordt meegenomen in de verzameling waar het infimum van bepaald wordt en bij ψ_r niet. Alleen als $r - \phi_r < i - \phi_i$ voor alle $i > r$, geldt dat $\psi_{r-1} < \psi_r$. Dan is d_r positief. In dat geval $\psi_{r-1} = r - \phi_r$. Dan geldt dus dat $\psi_r - \psi_{r-1} \leq r + 1 - \phi_{r+1} - \psi_{r-1}$, omdat $r + 1 - \phi_{r+1}$ een willekeurige waarde is uit de verzameling waarvan ψ_r het infimum is. $r + 1 - \phi_{r+1} - \psi_{r-1} = r + 1 - \phi_{r+1} - r + \phi_r = 1 - \nu_{r+1} \leq 1$, want $\nu_{r+1} \geq 0$. Omdat we weten dat $\psi_{r-1} < \psi_r$ en we alleen met gehele getallen te maken hebben, moet nu gelden $\psi_{r-1} < \psi_r = 1$.
In de andere gevallen moet $\psi_{r-1} \geq \psi_r$ en dus $d_r \leq 0$. We weten dat $d_r = \psi_r - \min\{r - \phi_r, \psi_r\} = \max\{0, \psi_r + \phi_r - r\}$. Hieruit volgt dat d_r nooit negatief kan zijn. Dus in alle andere gevallen geldt dat $d_r = 0$. Conclusie: $\delta_r = d_r = \psi_r - \psi_{r-1}$.
We weten dat $\phi_{r+n} = \phi_r + k = \phi_r + \phi_n$, waaruit volgt dat $\delta_{r+n} = \delta_r$. Als immers geldt dat $i - \phi_i > r - \phi_r$ voor alle $i > r$, dan geldt ook dat $i + n - \phi_{i+n} > r + n - \phi_{r+n}$ voor alle $i > r$. Verder geldt ook dat $\psi_{r+n} = \inf\{i + n - \phi_{i+n} \text{ voor } i > r\} = n - \phi_n + \inf\{i - \phi_i \text{ voor } i > r\} = \psi_r + n - k$. Daarom zijn er van de n cyclische permutaties op $(k_1, ..., k_n)$ precies

$$\sum_{r=1}^{n} \delta_r = \sum_{r=1}^{n} (\psi_r - \psi_{r-1}) = \psi_n - \psi_0 = n - k$$

waarbij de som van de eerste r elementen kleiner is dan r voor $r \in \mathbb{N}$. De stelling is nu bewezen. □

Bij Stelling 2.3 is alleen de som van de n getallen, uitgedrukt als k, van belang. De volgorde van de getallen doet er niet toe, de stelling blijft hetzelfde voor elke permutatie die we op de $(k_1, ..., k_n)$ loslaten. Voor elke permutatie zijn er $n - k$ van de n cyclische permutaties die aan de voorwaarde van de stelling voldoen. Daarom is bij willekeurige volgorde van de trekking van de kaarten uit de vaas bij Stelling 2.2 inderdaad de gevraagde kans gelijk aan $1 - \frac{k}{n}$.

2.2 Verwisselbare stochasten

Deze paragraaf zal kort de resultaten uit paragraaf 4 en 5 van hoofdstuk 2 van [2] bespreken. We beginnen met een stelling die veel lijkt op Stelling 2.3, maar nu gaat het niet om reeds vastgelegde getallen k_i, maar om stochasten ν_i. We noemen een rij stochasten $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ cyclisch verwisselbaar als alle cyclische permutaties van $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ dezelfde verdeling hebben. Identiek en onafhankelijk verdeelde stochasten, ook wel o.e.v. genoemd (onafhankelijk en eender verdeeld), zijn altijd cyclisch verwisselbaar.

Stelling 2.4 *Laat $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ cyclisch verwisselbare stochasten zijn die alleen waarden uit $\mathbb{N}_0$ aannemen. Definieer vervolgens $N_r = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_r$ voor $r = 1, 2, ..., n$. Dan krijgen we*

$$\mathbf{P}\{N_r < r \ \mathit{voor}\ r = 1, 2, ..., n \,|\, N_n = k\} = \begin{cases} 1 - \frac{k}{n} & \mathit{als}\ 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \mathit{anders.} \end{cases}$$

In de rest van dit hoofdstuk zal het gaan over o.e.v. stochasten of verwisselbare stochasten, deze laatste zijn niet alleen onder cyclische permutaties hetzelfde verdeeld, maar onder alle mogelijke permutaties. We zullen het hebben over zowel eindige rijen $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r$ als oneindige rijen $\nu_1, \nu_2, ...$ De stochasten nemen alleen waarden aan in $\mathbb{N}_0$. Daarnaast zal de notatie $N_r = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_r$ worden gebruikt met $N_0 = 0$ en de volgende symbolen voor achtereenvolgens de verdeling, de verwachtingswaarde (het eerste moment), het tweede factoriële moment en de genererende functie van ν_r:

$$\begin{aligned} \pi_j &= \mathbf{P}\{\nu_r = j\}, \qquad j = 0, 1, 2, ..., \\ \gamma &= \mathbf{E}\{\nu_r\} = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j, \\ \gamma_2 &= \mathbf{E}\{\nu_r(\nu_r - 1)\} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\pi_j, \\ \pi(z) &= \mathbf{E}\{z^{\nu_r}\} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j. \end{aligned}$$

Uiteraard geldt $\gamma = \pi'(1)$ en $\gamma_2 = \pi''(1)$. De volgende stelling is de variant op Stelling 2.4, maar dan voor een oneindige reeks stochasten.

Stelling 2.5 *Laat $\nu_1, \nu_2, ...$ een oneindige reeks o.e.v. stochasten zijn die waarden aannemen in $\mathbb{N}_0$, dan*

$$\mathbf{P}\{N_r < r \ \mathit{voor}\ r = 1, 2, ...\} = \begin{cases} 1 - \gamma & \mathit{als}\ \gamma < 1, \\ 0 & \mathit{als}\ \gamma \geq 1. \end{cases}$$

We kunnen de kans uit Stelling 2.5 ook op een andere manier uitdrukken. Daarvoor moeten we eerst definiëren

$$G(x) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\frac{N_n}{n} \leq x\}.$$

Stelling 2.6 *Laat $\nu_1, \nu_2, ...$ een oneindige reeks o.e.v. stochasten zijn die waarden aannemen in $\mathbb{N}_0$, dan*

$$\mathbf{P}\{N_r < r \ \mathit{voor}\ r = 1, 2, ...\} = \int_0^1 (1 - x) dG(x).$$

Dit is voor verdelingen met eindige γ en γ_2 in te zien met behulp van de sterke wet van de grote aantallen, die zegt dat $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} = \gamma$, aangezien $G(x)$ dan een stapfunctie is met $G(x) = 0$ voor $x < \gamma$ en $G(x) = 1$ voor $x \geq \gamma$. Dan is Stelling 2.6 niets anders dan een anders opgeschreven versie van Stelling 2.5.

2.3 De verdeling van het maximum van $\{N_r - r\}$

In deze paragraaf zullen de verdelingen besproken worden van $\max_{1\leq r\leq n}(N_r - r)$ voor eindige n en van $\sup_{1\leq r<\infty}(N_r - r)$, zoals Takács doet in §6 van hoofdstuk 2 van [2].

Stelling 2.7 *Laat $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ een reeks onderling verwisselbare stochasten zijn die waarden aannemen in $\mathbb{N}_0$, dan*

$$\mathbf{P}\{\max_{1\leq r\leq n}(N_r - r) < k\} = \mathbf{P}\{N_n < n+k\} - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-j}(1-\frac{l}{n-j})\mathbf{P}\{N_j = j+k, N_n = j+k+l\}.$$

Stelling 2.8 *Laat $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ een reeks onderling verwisselbare stochasten zijn die waarden aannemen in $\mathbb{N}_0$, dan*

$$\mathbf{E}\{\max_{0\leq r\leq n}(N_r - r)\} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\mathbf{E}\{[N_j - j]^+\},$$

waarbij $[x]^+ = x$ voor $x \geq 0$ en $[x]^+ = 0$ voor $x < 0$.

Stelling 2.9 *Laat $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ een reeks o.e.v. stochasten zijn die waarden aannemen in $\mathbb{N}_0$. Als $\gamma < 1$, dan geldt voor alle $k \in \mathbb{Z}$*

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leq r<\infty}(N_r - r) < k\} = 1 - (1-\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}\{N_j = j+k\}.$$

Als $\gamma \geq 1$ en $\pi_1 \neq 1$, dan geldt voor alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leq r<\infty}(N_r - r) < k\} = 0,$$

oftewel $(N_r - r)$ kan elke willekeurig grote waarde aannemen. Als tenslotte $\pi_1 = 1$, dan geldt voor alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leq r<\infty}(N_r - r) = 0\} = 1.$$

De volgende stelling zullen we wel bewijzen.

Stelling 2.10 *Laat $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ een reeks o.e.v. stochasten zijn die waarden aannemen in $\mathbb{N}_0$. Als $\gamma < 1$, dan geldt*

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leq r<\infty}(N_r - r) < k\} = Q_k,$$

waarbij $Q_k = 0$ als $k < 0$, $Q_0 = 1 - \gamma$ en voor $|z| < 1$ geldt dat

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^k = \frac{Q_0\pi(z)}{\pi(z) - z}.$$

Bewijs Voor $r = 1$ geldt altijd $N_r - r \geq -1$, aangezien $N_r \geq 0$. Daarom geldt $Q_k = 0$ als $k < 0$. Dat $Q_0 = 1 - \gamma$ volgt direct uit Stelling 2.5.
Laat nu $k \in \mathbb{N}_0$. We kunnen als volgt conditioneren naar de waarde van ν_1:

$$\mathbf{P}\{N_r < r + k \text{ voor } r = 1, ..., n+1\} = \sum_{j=0}^{k} \pi_j \mathbf{P}\{N_r < r + k + 1 - j \text{ voor } r = 1, ..., n\}.$$

Als de waarde van ν_1 gelijk is aan j, hetgeen met kans π_j gebeurt, waarbij moet gelden $0 \leq j \leq k$, moet voor de rest van de ν_i gelden $N_r < r + k + 1 - j$ voor $r = 1, ..., n$, wil de reeks nog voldoen aan $N_r < r + k$ voor $r = 1, ..., n+1$. Als we nu de limiet $n \to \infty$ nemen, komen we uit op de vergelijking

$$Q_k = \sum_{j=0}^{k} \pi_j Q_{k+1-j}, \tag{27}$$

voor $k \in \mathbb{N}_0$. We krijgen nu dus

$$\begin{aligned} Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k Q_k &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=0}^{k} \pi_j Q_{k+1-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \pi_j z^k Q_{k+1-j} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j \sum_{k=j}^{\infty} z^{k-j+1} Q_{k+1-j} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j \sum_{k=1}^{\infty} z^k Q_k \\ &= \frac{1}{z} \pi(z)[Q(z) - Q_0] \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we $Q(z)$ halen en er volgt dat

$$Q(z) = \frac{Q_0 \pi(z)}{\pi(z) - z},$$

hetgeen convergent is voor $|z| < 1$. $\square$

2.4 Relatie met $M/D/1$-wachtrij

Een $M/D/1$-wachtrij is een wachtrij waarbij de aankomsten volgens een Poissonproces gaan met een bepaalde rate $1/\alpha$. De vertrekken gaan via een algemene verdeling (niet nader gespecifieerd) en er is maar één bediende.
Omdat het vertrek geen Markovproces is, is het geheel ook geen Markovproces. Het kan immers tijdens een bediening van belang zijn hoe lang deze al bezig is en daarom is dit niet geheugenloos. We kunnen er echter wel een Markovketen van maken. We definiëren v_n als het moment dat de n-de klant vertrekt en q_n als het aantal mensen direct na vertrek van de n-de klant, dus hierbij wordt de n-de klant zelf niet meegerekend. De keten $\{q_n, n = 1, 2, ...\}$ is nu een Markovketen. Er geldt:

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n - 1 + a_{n+1} & \text{als } q_n \geq 1, \\ a_{n+1} & \text{als } q_n = 0, \end{cases}$$

waarbij a_n het aantal aankomsten is tijdens de bediening van de n-de klant. Nu is q_{n+1} afhankelijk van q_n en gaat alle invloed van $q_{n-1}, q_{n-2}, ...$ via q_n. Dus als we q_n weten, heeft kennis van $q_{n-1}, q_{n-2}, ...$ geen toegevoegde waarde.
Er geldt nu dat

$$\mathbf{P}\{q_{n+1} = k\} = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}\{q_n = k+1-j\}\mathbf{P}\{a_{n+1} = j\} + \mathbf{P}\{q_n = 0\}\mathbf{P}\{a_{n+1} = k\}.$$

Als we nu definiëren $Q_k = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{q_n = k\}$ en $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{a_n = j\}$, krijgen we

$$Q_k = \sum_{j=0}^{k} \pi_j Q_{k+1-j} + \pi_k Q_0.$$

Dit lijkt enorm veel op (27). Als we dit zouden uitwerken krijgen we dan ook

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k Q_k = (1-z)\frac{Q_0 \pi(\frac{1-z}{\alpha})}{\pi(\frac{1-z}{\alpha}) - z}.$$

Hierbij is $\pi(z)$ de genererende functie voor het aantal aankomsten in een bedieningstijd, dus $\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j a_j$. Zoals in de formules te zien is, is er een nauw verband tussen de $M/D/1$-wachtrij en het $\sup_{1\leq r<\infty}(N_r - r)$. De enige verschillen in de genererende functie zijn de term $(1-z)$ en dat we in plaats van z nu $\frac{1-z}{\alpha}$ hebben staan.
Dit nauwe verband is te verklaren als we kijken naar $\nu_i - 1$. Er geldt immers $N_r - r = \sum_{i=1}^{r}(\nu_i - 1)$. We kunnen dan de ν_i vergelijken met de aankomsten a_i en $N_r - r$ met de q_r. De a_i nemen namelijk ook waarden aan uit $\mathbb{N}_0$. Bij elk vertrek, dus bij de overgang van q_r naar q_{r+1}, gaat er een klant het systeem uit, vandaar de -1 in $\nu_i - 1$. Er zit zoals eerder gezien wel nog het verschil in in het geval dat $q_n = 0$ voor een bepaalde n, dan kan er immers geen afgehaald worden om naar q_{n+1} te gaan. Degene die vertrekt op v_{n+1}, was immers nog niet binnen op v_n. Deze beredenering verklaart de relatie.

Deel II
Eigen onderzoek

3 Een $M/M/1$-wachtrij

Een $M/M/1$-wachtrij is een wachtrij waarbij zowel de aankomsten als de vertrekken volgens een Markov-proces gaan en er maar één bediende is. We kunnen het ons voorstellen als een kapsalon met een wachtruimte met oneindige capaciteit, maar met maar één kapper. Deze kapper is geheugenloos en heeft geen idee hoe lang hij al bezig is met een klant. Als deze kapper bijvoorbeeld na een half uur nog niet klaar is, wil het niet zeggen dat er een grotere kans is dat hij een half uur later wel klaar is. Als we de tijd die de kapper over een willekeurige knipbeurt doet X noemen, geldt er

$$\mathbf{P}\{X > s + t \,|\, X > s\} = \mathbf{P}\{X > t\}.$$

We zeggen dat de random variabele X dan exponentieel verdeeld is. De cumulatieve verdelingsfunctie die hierbij hoort is

$$F(t) = \mathbf{P}\{X < t\} = 1 - e^{-\mu t},$$

waarbij μ de rate wordt genoemd. Deze variabele geeft aan hoe lang de kapper gemiddeld over een knipbeurt doet, met $\mathbf{E}\{X\} = \frac{1}{\mu}$ en bepaalt hiermee de verdeling.
De tijd tot de volgende aankomst is ook exponentieel verdeeld. De rate hiervan noemen we λ. Het aantal aankomsten in een bepaalde periode $(0, t)$ is nu ook een random variabele. We noemen dit A_t. Het proces bijhorende bij deze stochast is een Poissonproces. De kansmassafunctie hiervan is

$$\mathbf{P}\{A_t = n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}. \tag{28}$$

Het aantal vertrekken in $(0, t)$ noemen we D_t. Voor D_t is het niet zo makkelijk een formule te vinden. Als we weer naar de kapsalon kijken, is het duidelijk dat de kapper niemand kan knippen als er geen klanten in de wachtrij staan. Als $\mu > 0$, waar we vanuit gaan, kan het altijd voorkomen dat hij de hele rij heeft weggewerkt.
Het aantal klanten op tijdstip t noemen we X_t. Logisch gevolg is $X_t = X_0 + A_t - D_t$. We nemen verder aan dat $X_0 = k$, met $k = 0, 1, 2, ...$, dus de wachtrij hoeft niet leeg te zijn bij aanvang.
De onderzoeksvraag is nu: Wat zijn de kansen $\mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\}$ en in het bijzonder, wat is de verdeling van D_t als we beginnen met k klanten op tijdstip 0?

4 De verdeling van de $M/M/1$-wachtrij

4.1 Recurrente betrekkingen afleiden

We definiëren nu voor $t > 0$ en $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$P_{ij}^{(k)}(t) = \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\},$$

als de kans dat er in $(0, t)$ precies i aankomsten en j vertrekken zijn bij k klanten op tijdstip 0. Hierbij hoort de Laplacegetransformeerde

$$p_{ij}^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{ij}^{(k)}(t)\, dt.$$

Nu zal er een recurrente betrekking worden afgeleid voor de $p_{ij}^{(k)}(s)$. Als we de $p_{ij}^{(k)}(s)$ weten, kunnen we immers de inverse transformatie toepassen om $P_{ij}^{(k)}(t)$ te vinden. We beginnen daarvoor met het bepalen van de afgeleide van $\mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\}$ voor $i = 1, 2, ...$ en $j = 0, 1, ..., i + k - 1$. Het is duidelijk dat $\mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\} = 0$ als $i < 0$, $j < 0$ of $j > i + k$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{A_{t+\Delta t} = i, D_{t+\Delta t} = j \,|\, X_0 = k\} \;=\;& (1 - (\lambda + \mu)\Delta t)\mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\} + \\
& \lambda \Delta t \mathbf{P}\{A_t = i - 1, D_t = j \,|\, X_0 = k\} + \\
& \mu \Delta t \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j - 1 \,|\, X_0 = k\} + o(\Delta t),
\end{aligned}$$

oftewel

$$P_{ij}^{(k)}(t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \mu)\Delta t) P_{ij}^{(k)}(t) + \lambda \Delta t P_{i-1,j}^{(k)}(t) + \mu \Delta t P_{i,j-1}^{(k)}(t) + o(\Delta t),$$

waaruit volgt

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}^{(k)}(t + \Delta t) - P_{ij}^{(k)}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} -(\lambda + \mu) P_{ij}^{(k)}(t) + \lambda P_{i-1,j}^{(k)}(t) + \mu P_{i,j-1}^{(k)}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

en

$$\frac{d}{dt} P_{ij}^{(k)}(t) = -(\lambda + \mu) P_{ij}^{(k)}(t) + \lambda P_{i-1,j}^{(k)}(t) + \mu P_{i,j-1}^{(k)}(t).$$

Als $F(s)$ de Laplacegetransformeerde is van $f(t)$, is volgens Lemma A.1 $sF(s) - f(0)$ de Laplacegetransformeerde van $\frac{d}{dt} f(t)$. Dit brengt ons bij

$$s p_{ij}^{(k)}(s) - P_{ij}^{(k)}(0) = -(\lambda + \mu) p_{ij}^{(k)}(s) + \lambda p_{i-1,j}^{(k)}(s) + \mu p_{i,j-1}^{(k)}(s).$$

We weten dat $P_{ij}^{(k)}(0) = 0$ voor alle $(i, j) \neq (0, 0)$. Dus uitwerken geeft de recurrente betrekking

$$p_{ij}^{(k)}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + s} p_{i-1,j}^{(k)}(s) + \frac{\mu}{\lambda + \mu + s} p_{i,j-1}^{(k)}(s)$$

voor $i = 1, 2, ...$ en $j = 0, 1, ..., i + k - 1$.

Hiermee zijn we nog niet klaar. Het is immers ook van belang te weten wat geldt voor $j = i + k$ bij $i = 1, 2, ...$ Dit gebeurt op analoge wijze.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{A_{t+\Delta t} = i, D_{t+\Delta t} = i + k \mid X_0 = k\} &= (1 - \lambda\Delta t)\mathbf{P}\{A_t = i, D_t = i + k \mid X_0 = k\} + \\ &\quad \mu\Delta t\mathbf{P}\{A_t = i, D_t = i + k - 1 \mid X_0 = k\} + o(\Delta t),\end{aligned}$$

oftewel

$$P^{(k)}_{i,i+k}(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)P^{(k)}_{i,i+k}(t) + \mu\Delta t P^{(k)}_{i,i+k-1}(t) + o(\Delta t).$$

Als we nu hetzelfde doen als zojuist krijgen we

$$\frac{d}{dt}P^{(k)}_{i,i+k}(t) = -\lambda P^{(k)}_{i,i+k}(t) + \mu P^{(k)}_{i,i+k-1}(t),$$

hetgeen leidt tot

$$sp^{(k)}_{i,i+k}(s) - P^{(k)}_{i,i+k}(0) = -\lambda p^{(k)}_{i,i+k}(s) + \mu p^{(k)}_{i,i+k-1}(s).$$

We komen nu uit op de vergelijking

$$p^{(k)}_{i,i+k}(s) = \frac{\mu}{\lambda + s}p^{(k)}_{i,i+k-1}(s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu + s} \cdot \frac{\lambda + \mu + s}{\lambda + s}p^{(k)}_{i,i+k-1}(s).$$

Nog niet behandeld zijn nu de $p^{(k)}_{0,j}(s)$ met $j = 0, 1, ..., k-1$ en het speciale geval $j = k$. De hiermee corresponderende kansen $P^{(k)}_{0,j}(t)$ voor $j = 0, 1, ..., k-1$ zijn onafhankelijk van het aantal klanten aanwezig in het systeem op $t = 0$. Ook zijn er geen voorwaarden aan de volgorde van aankomsten en vertrekken, omdat aankomsten zich altijd kunnen voordoen en vertrekken in dit geval ook, zolang het er niet meer dan k zijn. Dit resulteert erin dat de aankomsten en vertrekken in $(0, t)$ onafhankelijk van elkaar verdeelde processen zijn. Dus

$$P^{(k)}_{0,j}(t) = \mathbf{P}\{A_t = 0, D_t = j \mid X_0 = k\} = \mathbf{P}\{A_t = 0\}\mathbf{P}\{D_t = j\}.$$

Zowel A_t als D_t zijn Poissonprocessen, met respectievelijk rates λ en μ. Met behulp van (28) zien we nu dat

$$P^{(k)}_{0,j}(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} \cdot \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}(\mu t)^j}{j!}.$$

Daarvan kan de Laplacegetransformeerde bepaald worden.

$$\begin{aligned}p^{(k)}_{0,j}(s) = \int_0^\infty e^{-st}P^{(k)}_{0,j}(t)\,dt &= \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda+\mu+s)t}(\mu t)^j}{j!}\,dt \\ &= \Big(\frac{\mu}{\lambda + \mu + s}\Big)^j \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda+\mu+s)t}((\lambda + \mu + s)t)^j}{j!}\,dt \\ &= \frac{\mu^j}{(\lambda + \mu + s)^{j+1}} \cdot \frac{1}{j!}\int_0^\infty e^{-u}u^j\,du,\end{aligned}$$

waarbij de substitutie $u = (\lambda + \mu + s)t$ heeft plaatsgevonden. De laatste integraal is gelijk aan de gamma-functie $\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u}\, du$ voor $z = j + 1$. Omdat $\Gamma(z) = (z-1)!$ als $z \in \mathbb{Z}$, geldt dus

$$p_{0,j}^{(k)}(s) = \frac{\mu^j}{(\lambda+\mu+s)^{j+1}} \cdot \frac{1}{j!} \cdot j! = \frac{1}{\lambda+\mu+s}\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^j.$$

Als laatste moet nu $p_{0,k}^{(k)}(s)$ nog bepaald worden. Als er 0 aankomsten zijn in $(0,t)$, kunnen er $0, 1, ..., k$ vertrekken zijn. Er geldt dus

$$\sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}\{A_t = 0, D_t = j \mid X_0 = k\} = \mathbf{P}\{A_t = 0\}.$$

Hieruit volgt

$$P_{0,k}^{(k)}(t) = e^{-\lambda t} - \sum_{j=0}^{k-1} P_{0,j}^{(k)}(t).$$

Omdat de Laplacetransformatie een lineaire bewerking is, geldt

$$\begin{aligned}
p_{0,k}^{(k)}(s) &= \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)t} dt - \frac{1}{\lambda+\mu+s}\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^j \\
&= \frac{1}{\lambda+s} - \frac{1}{\lambda+\mu+s} \cdot \frac{1-(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s})^k}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}} \\
&= \frac{1}{\lambda+s} - \frac{1-(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s})^k}{\lambda+s} = \frac{1}{\lambda+s}\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^k.
\end{aligned}$$

Hiermee liggen wel alle $p_{ij}^{(k)}(s)$ vast, namelijk als een stelsel van recurrente betrekkingen met randvoorwaarden. Door $w_1 = \frac{1}{\lambda+\mu+s}$ en $w_2 = \frac{1}{\lambda+s}$ te nemen, komen we uit op:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(k)}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu+s} p_{i-1,j}^{(k)}(s) + \frac{\mu}{\lambda+\mu+s} p_{i,j-1}^{(k)}(s) \qquad \text{voor } i = 1, 2, ... \text{ en } j = 0, 1, ..., i+k-1, \\
p_{i,i+k}^{(k)}(s) &= \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu+s} p_{i,i+k-1}^{(k)}(s) \qquad \text{voor } i = 1, 2, ... \text{ en } j = i+k, \\
p_{0,j}^{(k)}(s) &= w_1 \Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^j \qquad \text{voor } j = 1, 2, ..., k-1, \\
p_{0,k}^{(k)}(s) &= w_2 \Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^k, \\
p_{ij}^{(k)}(s) &= 0 \qquad \text{anders.}
\end{aligned}$$

Het is te zien dat $p_{0,0}^{(k)}(s) = w_1$. Uit het stelsel van vergelijkingen blijkt dat elke keer dat i van $p_{ij}^{(k)}(s)$ toeneemt er vermenigvuldigd wordt met $\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}$ en elke keer dat j toeneemt met $\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}$. Gevolg is dat de factor $(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s})^i (\frac{\mu}{\lambda+\mu+s})^j$ alleen voorkomt in $p_{ij}^{(k)}(s)$. We kunnen daarom ook schrijven

$$p_{ij}^{(k)}(s) = a_{ij}^{(k)} \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\Big)^i \Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^j, \tag{29}$$

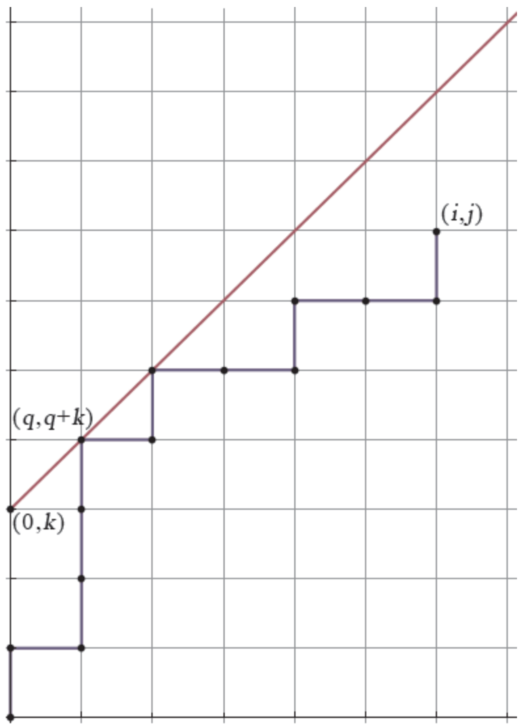
voor bepaalde $a_{ij}^{(k)}$. Voor deze $a_{ij}^{(k)}$ is nu ook een stelsel van vergelijkingen op te stellen:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{i-1,j}^{(k)} + a_{i,j-1}^{(k)} \qquad \text{voor } i = 1, 2, ... \text{ en } j = 0, 1, ..., i + k - 1, && (30) \\ a_{i,i+k}^{(k)} &= \frac{w_2}{w_1} a_{i,i+k-1}^{(k)} \qquad \text{voor } i = 1, 2, ... \text{ en } j = i + k, && (31) \\ a_{0,j}^{(k)}(s) &= w_1 \qquad \text{voor } j = 1, 2, ..., k - 1, && (32) \\ a_{0,k}^{(k)}(s) &= w_2, && (33) \\ a_{ij}^{(k)}(s) &= 0 \qquad \text{anders.} && (34) \end{aligned}$$

Dit is een eenvoudiger stelsel en zal beter op te lossen zijn.

4.2 Oplossen met behulp van random walks

Het zojuist verkregen stelsel kan opgelost worden met behulp van random walks. We zullen daarvoor eerst een assenstelsel tekenen waarin de punten (i, j) getekend kunnen worden. Het probleem kan dus gevisualiseerd worden zoals in Figuur 3.

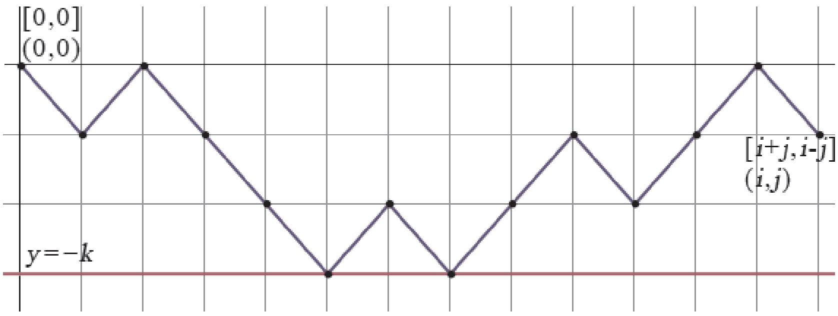


Figuur 3: Visualisatie van vergelijkingen (30) tot en met (34) met een voorbeeld van een mogelijk pad erin

Wat er in vergelijkingen (30) tot en met (34) staat, kunnen we immers ook anders zien. We definiëren hiervoor de *opbrengst* van een pad als de waarde die een pad heeft bij zijn

eindpunt. De beginwaarde van een pad stellen we op w_1.
$a_{ij}^{(k)}$ noemen we nu de som van de opbrengsten van alle paden uit $(0,0)$ die eindigen in (i,j). Een pad mag alleen stappen naar rechts en naar boven maken. In (i,j) kunnen we komen vanuit $(i-1,j)$ en vanuit $(i,j-1)$. Daarom moet gelden $a_{ij}^{(k)} = a_{i-1,j}^{(k)} + a_{i,j-1}^{(k)}$. We nemen nu echter de lijn $y = k + x$ als afsluiting. De paden mogen deze lijn nooit snijden, dus voor de paden die in $(i, i+k)$ komen, geldt dat het pad zojuist uit $(i, i+k-1)$ moet zijn gekomen. Elke keer als het pad de lijn $y = x + k$ raakt, wordt echter wel de waarde van het pad vermenigvuldigd met $\frac{w_2}{w_1}$. Op deze manier komt het geheel overeen met de vergelijkingen (30) tot en met (34). Als een pad n keer de lijn $y = k + x$ raakt, is de opbrengst dus $w_1(\frac{w_2}{w_1})^n$. In Figuur 3 staat een voorbeeldpad.
Om nu de $a_{ij}^{(k)}$ te bepalen, moeten we de opbrengst van alle mogelijke paden die in (i,j) eindigen bij elkaar optellen. We tellen daarvoor voor alle mogelijke waarden van v het aantal paden dat de lijn $y = x + k$ precies v keer raakt. Dit aantal wordt met $w_1(\frac{w_2}{w_1})^v$ vermenigvuldigd en de uitkomsten worden gesommeerd over v.
Voor $i = 0, 1, ...$ en $j = 0, 1, ..., k-1$ is het simpel. De paden kunnen dan immers nooit de lijn $y = k + x$ geraakt hebben. Het aantal paden van $(0,0)$ naar (i,j) is dan $\binom{i+j}{i}$, dus de totale opbrengst $a_{ij}^{(k)}$ is gelijk aan $w_1\binom{i+j}{i}$.

Voor $i = 0, 1, ...$ en $j = k, k+1, ..., k+i$ kan de lijn $y = k + x$ wel geraakt worden. Er zijn dan echter ook nog steeds paden die de lijn niet raken. Het aantal paden waarvoor dit geldt kunnen we ook op eenvoudige wijze bepalen. We gaan daarvoor over op random walks. Het assenstelsel verandert dan door een rotatie van 45 graden en spiegeling toe te passen. In het originele assenstelsel werd gestart in $(0,0)$, dit punt correspondeert met $[0,0]$ in het nieuwe assenstelsel. Voor elke stap omhoog wordt nu een stap naar omlaag gemaakt, voor elke stap na links wordt een stap omhoog gemaakt, dit wordt uitgezet tegen het aantal gemaakte stappen. Een punt (x,y) in het originele assenstelsel correspondeert met $[x+y, x-y]$ in het nieuwe assenstelsel. De lijn $y = x + k$ is nu veranderd in de lijn $y = -k$. Dit is weergegeven in Figuur 4, met hetzelfde voorbeeldpad erin als in Figuur 3.



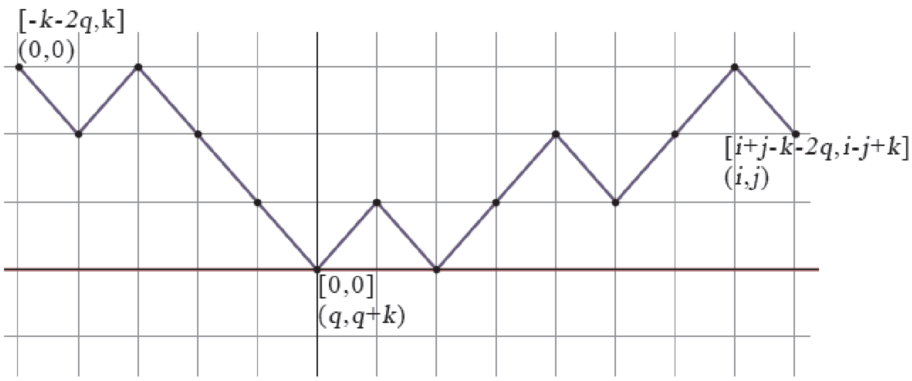
Figuur 4: Visualisatie van vergelijkingen (30) tot en met (34) in een aangepast assenstelsel

We hebben nu een random walk zoals we hem hebben gezien in hoofdstuk 1. Hier gelden dus ook alle bekende eigenschappen voor. We zoeken nu het aantal paden die niet in de lijn $-k$ komen. Volgens Lemma 1.8 is de kans dat een pad beginnend in de oorsprong en eindigend in $[i+j, i-j]$ wel in $-k$ komt gelijk aan $p_{i+j,-2k-i+j}$, dus het aantal paden is gelijk aan

$$2^{i+j} p_{i+j,-2k-i+j} = \binom{i+j}{\frac{i+j-(-2k-i+j)}{2}} = \binom{i+j}{i+k}.$$

Het totale aantal paden van $[0,0]$ naar $[i+j, i-j]$ is gelijk aan $2^{i+j} p_{i+j,i-j} = \binom{i+j}{i}$. Hieruit is te concluderen dat het aantal paden dat de lijn $-k$ niet raakt gelijk is aan $\binom{i+j}{i} - \binom{i+j}{i+k}$. We komen nu uit op de opbrengst $w_1\left(\binom{i+j}{i} - \binom{i+j}{i+k}\right)$.

Als de lijn $y = k+x$ echter wel geraakt wordt, wordt het moeilijker om het aantal paden te vinden. Het is namelijk ook van belang hoevaak de lijn aangeraakt wordt. Elke keer dat dit gebeurt, wordt de opbrengst van het pad immers vermenigvuldigd met $\frac{w_2}{w_1}$. Definieer N_v als het aantal paden dat v keer de lijn $-k$ raakt, waarbij geldt dat $v = 1, 2, ..., j-k$. We zullen nu eerst opnieuw overgaan op een nieuw assenstelsel. Voor elk pad dat de lijn $-k$ precies v keer raakt, is er een eerste keer dat dit gebeurt. Dit punt noemen we $[2q+k, -k]$. De eerste mogelijkheid om $-k$ te raken is in $[k, -k]$, dus bij $q = 0$. De laatste mogelijkheid is in $[2j-k, -k]$, wat correspondeert met $(j-k, j)$. Omdat de lijn $-k$ eerst nog $v-1$ keer geraakt moet worden, is de laatste mogelijkheid voor de eerste keer $-k$ raken in $[2j-k-2v+2, -k]$, dus bij $q = j-k-v+1$. We schrijven we $m = j-k-v+1$, dus $v = j-k-m+1$. We bekijken het probleem voor elke mogelijke waarde van q apart. Nu wordt met behulp van een translatie het punt waar het pad $-k$ voor het eerst raakt de nieuwe oorsprong $[0,0]$. Er geldt nu dus dat het punt (x,y) uit het originele assenstelsel correspondeert met het punt $[x+y-2q-k, x-y+k]$. Dit is weergegeven in Figuur 5.



Figuur 5: Visualisatie van vergelijkingen (30) tot en met (34) in een aangepast assenstelsel met verschoven oorsprong

Er geldt nu dus:

$$N_{j-k-m+1} = \sum_{q=0}^{m} (\#\text{ positieve paden van } [-k-2q, k] \text{ naar } [0,0] \text{ die de } x\text{-as nooit raken}) \cdot$$
$$(\#\text{ positieve paden van } [0,0] \text{ naar } [i+j-k-2q, i-j+k]$$
$$\text{die de } x\text{-as } j-k-m \text{ keer raken}).$$

Met een positief pad wordt een pad bedoeld waarvan alle zijden boven de x-as liggen. Om $N_{j-k-m+1}$ verder te bepalen hebben we eerst enkele stellingen nodig. We weten al uit Stelling 1.2 dat het aantal paden van $[0,0]$ naar $[p+q, p-q]$ die de x-as nooit raken gelijk is aan $\frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$.

Stelling 4.1 *Laat $p > q$. Er zijn $\frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$ paden van $[0,0]$ naar $[2p, 0]$ die de x-as $p-q$ keer bezoeken en geheel aan de positieve kant ervan liggen.*

Bewijs Op dezelfde manier als in het bewijs van Stelling 1.11, kunnen we vinden dat het aantal paden van $[0,0]$ naar $[2p,0]$ die de x-as $p-q$ keer bezoeken gelijk is aan $2^{2p}\varphi_{p-q,2p-(p-q)} = 2^{2p}\varphi_{p-q,p+q}$. Het enige verschil is dat we hier alleen te maken hebben met de paden die aan de positieve kant van de x-as liggen. Dat zijn er $2^{-(p-q)}2^{2p}\varphi_{p-q,p+q)} = 2^{p+q}\varphi_{p-q,p+q}$. Nu komt de dualiteit van pas. $\varphi_{p-q,p+q}$ is namelijk de kans dat de eerste doorkomst door $p-q$ op tijdstip $p+q$ gebeurt. Neem een random walk ter lengte $p+q$ die hieraan voldoet. Als we de duale van deze random walk bekijken, zien we dat de lijn r veranderd is in de lijn 0 en dat hiernaar geen terugkeer meer zal plaatsvinden. Dit is zo omdat r in de eigenlijke random walk pas voor het eerst in de laatste stap bezocht werd. De duale eindigt ook in $[p+q, p-q]$ en daarom geldt dat het aantal paden van de oorsprong naar $[p+q, p-q]$ die het maximum $p-q$ voor het eerst bereiken in $p+q$ gelijk is aan het aantal paden van de oorsprong naar $[p+q, p-q]$ die nooit terugkeren in de x-as, oftewel $2^{p+q}\varphi_{p-q,p+q} = \frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$. Daarmee is de stelling bewezen. $\square$

Stelling 4.2 *Laat $p \geq r \geq q \geq 0$ gehele getallen zijn. Er zijn precies $\frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$ paden van $[0,0]$ naar $[p+r, p-r]$ die de x-as $r-q$ keer bezoeken en geheel aan de positieve kant liggen.*

Bewijs We noemen het gezochte aantal paden N. Ieder pad bezoekt de x-as een laatste keer. Dit punt noemen we $[2s, 0]$. Omdat het pad de x-as $r-q$ keer moet bezoeken en in $[p+r, p-r]$ moet eindigen, moet s minimaal gelijk zijn aan $r-q$ en maximaal aan r. Nu geldt:

$$N = \sum_{s=r-q}^{r} (\#\text{ positieve paden van } [0,0] \text{ naar } [2s,0] \text{ die de } x\text{-as } r-q \text{ keer raken}) \cdot$$
$$(\#\text{ positieve paden van } [2s,0] \text{ naar } [p+r,p-r] \text{ die de } x\text{-as niet raken}).$$

Het aantal positieve paden van $[2s, 0]$ naar $[p+r, p-r]$ die de x-as niet raken is uiteraard gelijk aan het aantal positieve paden van $[0,0]$ naar $[p+r-2s, p-r]$ die de x-as niet raken. Volgens Stellingen 1.2 en 4.1 is dit laatste aantal gelijk aan het aantal positieve paden van $[0,0]$ naar $[2p-2s, 0]$ die de x-as $p-r$ keer bezoeken. Daarom geldt nu:

$$N = \sum_{s=r-q}^{r} (\#\text{ positieve paden van } [0,0] \text{ naar } [2s,0] \text{ die de } x\text{-as } r-q \text{ keer raken}) \cdot$$
$$(\#\text{ positieve paden van } [2s,0] \text{ naar } [2p,0] \text{ die de } x\text{-as } p-r \text{ keer raken}).$$

Omdat gesommeerd wordt over alle mogelijke waarden van s, hebben we hier simpelweg te maken met alle positieve paden van $[0,0]$ naar $[2p,0]$ die de x-as $(r-q)+(p-r) = p-q$

keer raken. Dit is volgens Stelling 4.1 wederom gelijk aan $\frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$, hetgeen deze stelling bewijst. $\square$

Als we nu verdergaan met het aantal paden $N_{j-k-m+1}$, zien we dat het eerste deel van de random walks, van $[-k-2q, k]$ naar $[0, 0]$ gespiegeld kan worden om een pad van $[0, 0]$ naar $[k+2q, k]$ te krijgen. Met behulp van Stellingen 1.2 en 4.1 kunnen we concluderen dat het aantal mogelijkheden voor dit gedeelte van de paden gelijk is aan het aantal positieve paden van $[0, 0]$ naar $[2(q+k), 0]$ die de x-as k keer raken.

Het aantal mogelijke tweede delen, van $[0, 0]$ naar $[i+j-k-2q, i-j+k]$, die de x-as $j-k-m$ keer raken, is volgens Stellingen 4.1 en 4.2 gelijk aan het aantal paden van $[0, 0]$ naar $[2(i-q), 0]$ die de x-as $i-m$ keer bezoeken.

Hieruit volgt:

$$N_{j-k-m+1} = \sum_{q=0}^{m} (\#\text{ positieve paden van } [0,0] \text{ naar } [2(q+k),0] \text{ die de } x\text{-as } k \text{ keer raken}) \cdot \\ (\#\text{ positieve paden van } [0,0] \text{ naar } [2(i-q),0] \text{ die de } x\text{-as } i-m \text{ keer raken}).$$

Dit is gelijk aan het aantal positieve paden van $[0, 0]$ naar $[2(i+k), 0]$ die de x-as $i+k-m$ keer raken. Volgens Stelling 4.1 is dit aantal gelijk aan $N_{j-k-m+1} = \frac{i+k-m}{i+k+m}\binom{i+k+m}{i+k}$ en de bijbehorende opbrengst is $w_2(\frac{w_2}{w_1})^{j-k-m}$.

Dit resultaat tellen we op bij de eerder gevonden opbrengst en hiermee is het probleem opgelost. We hebben namelijk voor alle mogelijke waarden van v de opbrengst bepaald. Omdat $v = j-k-m+1$ en $v = 1, 2, ..., j-k$, geldt ook $m = 1, 2, ..., j-k$. Daarom kunnen we nu schrijven voor $i = 0, 1, ...$ en $j = k, k+1, ..., k+i$:

$$a_{ij}^{(k)} = w_1\Big(\binom{i+j}{i} - \binom{i+j}{i+k} + \sum_{m=0}^{j-k} \frac{i+k-m}{i+k+m}\binom{i+k+m}{i+k}\Big(\frac{w_2}{w_1}\Big)^{j-k-m+1}\Big), \tag{35}$$

en zoals eerder gevonden voor $i = 0, 1, ...$ en $j = 0, 1, ..., k-1$:

$$a_{ij}^{(k)} = w_1\binom{i+j}{i}. \tag{36}$$

4.3 De oplossing

De $a_{ij}^{(k)}$ zijn nu bekend. Met behulp van vergelijking (29) komen we voor $i = 0, 1, ...$ en $j = 0, 1, ..., k-1$ op het volgende uit:

$$p_{ij}^{(k)}(s) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\Big)^i\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^j \frac{1}{\lambda+\mu+s}\binom{i+j}{i}.$$

Door dit terug te transformeren zullen we uiteindelijk op $P_{ij}^{(k)}(t)$ uitkomen. Omdat de Laplacetransformatie een lineaire bewerking is, kunnen we alle termen waar de variabele s in voorkomt apart nemen en terug transformeren. Als we dat doen komen we uit op

$$p_{ij}^{(k)}(s) = \lambda^i\mu^j\binom{i+j}{i}\Big(\frac{1}{\lambda+\mu+s}\Big)^{i+j+1} = \frac{\lambda^i\mu^j}{(\lambda+\mu)^{i+j+1}}\binom{i+j}{i}\Big(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^{i+j+1}.$$

Zoals in Lemma A.3 te zien is, geldt voor een Erlang-n-verdeling met rate λ dat de Laplacegetransformeerde van de kansdichtheidfunctie gelijk is aan $(\frac{\lambda}{\lambda+s})^n$. We hebben hier dus te maken met een Erlang-$i+j+1$-verdeling met rate $\lambda+\mu$. Hierbij hoort de kansdichtheidfunctie

$$f(t) = \frac{(\lambda+\mu)^{i+j+1}t^{i+j}e^{-(\lambda+\mu)t}}{(i+j)!}.$$

Als we dit gebruiken, komt er het volgende uit:

$$P_{ij}^{(k)}(t) = \frac{\lambda^i\mu^j}{(\lambda+\mu)^{i+j+1}}\binom{i+j}{i}\frac{(\lambda+\mu)^{i+j+1}t^{i+j}e^{-(\lambda+\mu)t}}{(i+j)!} = \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}\cdot\frac{(\mu t)^j e^{-\mu t}}{j!}. \tag{37}$$

Dit is simpelweg het product van twee kansmassafuncties, namelijk die van een Poissonproces met rate λ en een met rate μ. Dat is ook logisch, aangezien voor $j = 0, 1, ..., k-1$ de aankomsten niet van belang zijn voor de vertrekken, omdat de wachtrij nooit leeg kan raken. Daarom zijn de twee processen onafhankelijk van elkaar.

Voor $i = 0, 1, ...$ en $j = k, k+1, ..., k+i$ wordt het lastiger:

$$p_{ij}^{(k)}(s) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\Big)^i\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}\Big)^j\frac{1}{\lambda+\mu+s}\cdot$$
$$\Big(\binom{i+j}{i} - \binom{i+j}{i+k} + \sum_{m=0}^{j-k}\frac{i+k-m}{i+k+m}\binom{i+k+m}{i+k}\Big(\frac{\lambda+\mu+s}{\lambda+s}\Big)^{j-k-m+1}\Big).$$

Als we wederom de termen met een s erin apart nemen, krijgen we:

$$p_{ij}^{(k)}(s) = \lambda^i\mu^j\Big(\binom{i+j}{i} - \binom{i+j}{i+k}\Big)\Big(\frac{1}{\lambda+\mu+s}\Big)^{i+j+1} +$$
$$\lambda^i\mu^j\sum_{m=0}^{j-k}\frac{i+k-m}{i+k+m}\binom{i+k+m}{i+k}\Big(\frac{1}{\lambda+\mu+s}\Big)^{i+k+m}\Big(\frac{1}{\lambda+s}\Big)^{j-k-m+1}.$$

In het eerste gedeelte van de uitdrukking herkennen we net als hiervoor de kansdichtheidfunctie van de Erlang-$i+j+1$-verdeling met rate $\lambda+\mu$. In het tweede gedeelte zien we voor de verschillende waarden van m de uitdrukking $(\frac{1}{\lambda+\mu+s})^{i+k+m}(\frac{1}{\lambda+s})^{j-k-m+1}$, hetgeen volgens Lemma A.2 een convolutie aanduidt. Het is dus de kansdichtheidfunctie van de som van een Erlang-$i+k+m$-verdeelde stochast met rate $\lambda+\mu$ en een Erlang-$j-k-m+1$-verdeelde stochast met rate λ. Deze kansdichtheidfunctie is niet als een korte gesloten uitdrukking te schrijven, dus als we de random variabelen respectievelijk X_{i+k+m} en $Y_{j-k-m+1}$ noemen, komen we op het volgende uit:

$$P_{ij}^{(k)}(t) = \frac{\lambda^i\mu^j}{(\lambda+\mu)^{i+j+1}}\Big(\binom{i+j}{i} - \binom{i+j}{i+k}\Big)\frac{(\lambda+\mu)^{i+j+1}t^{i+j}e^{-(\lambda+\mu)t}}{(i+j)!} +$$
$$\sum_{m=0}^{j-k}\frac{i+k-m}{i+k+m}\binom{i+k+m}{i+k}\frac{\lambda^i\mu^j}{(\lambda+\mu)^{i+k+m}\lambda^{j-k-m+1}}f_{X_{i+k+m}+Y_{j-k-m+1}}(t), \tag{38}$$

waarbij $f_{X_{i+k+m}+Y_{j-k-m+1}}(t)$ de kansdichtheidfunctie is van de som van de twee Erlang-verdeelde stochasten. Wat we wel kunnen zeggen is:

$$\begin{aligned} f_{X_{i+k+m}+Y_{j-k-m+1}}(t) &= \int_0^t f_{X_{i+k+m}}(u) f_{Y_{j-k-m+1}}(t-u)du \\ &= \int_0^t \frac{(\lambda+\mu)^{i+k+m} u^{i+k+m-1} e^{-(\lambda+\mu)u}}{(i+k+m-1)!} \frac{\lambda^{j-k-m+1}(t-u)^{j-k-m} e^{-\lambda(t-u)}}{(j-k-m)!} du. \end{aligned}$$

Als we dit invullen in (38) en het geheel vereenvoudigen, komen we uit op:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(k)}(t) = \Big(1 - \frac{i!j!}{(i+k)!(j-k)!}\Big) \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} \cdot \frac{(\mu t)^j e^{-\mu t}}{j!} + \\ e^{-\lambda t} \lambda^i \mu^j \sum_{m=0}^{j-k} \frac{i+k-m}{(i+k)!m!(j-k-m)!} \int_0^t (t-u)^{j-k-m} u^{i+k+m-1} e^{-\mu u} du. \quad (39) \end{aligned}$$

Verder dan dat wordt er niet meer vereenvoudigd. Vergelijkingen (37) en (39) geven nu de oplossing voor alle niet-triviale waarden van $P_{ij}^{(k)}(t)$.

We wisten de verdeling van het aantal aankomsten A_t in de periode $(0, t)$ al. We hebben hem nu ook op een andere manier gevonden. Wat immers moet gelden voor willekeurige $k = 0, 1, ...$ is:

$$\mathbf{P}\{A_t = i\} = \sum_{j=0}^{i+k} \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\}.$$

We hebben nu ook een uitdrukking gevonden voor de verdeling van D_t bij $X_0 = k$. Voor $j = 0, 1, ..., k-1$ geldt:

$$P_{*j}^{(k)} = \mathbf{P}\{D_t = j \,|\, X_0 = k\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\}.$$

Voor $j = k, k+1, ...$ geldt:

$$P_{*j}^{(k)} = \mathbf{P}\{D_t = j \,|\, X_0 = k\} = \sum_{i=j-k}^{\infty} \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \,|\, X_0 = k\}.$$

In het volgende hoofdstuk zal dit met een simulatie onderbouwd worden.

5 Simulatie ter controle

In dit hoofdstuk zullen de resultaten uit paragraaf 4.3 worden nagerekend voor enkele specifieke gevallen. Dit wordt gedaan ter controle van de gevonden resultaten. Allereerst worden de kansen $\mathbf{P}\{A_t = i\}$ nagerekend met behulp van het programma Wolfram Mathematica, daarna worden de kansen $P_{*j}^{(k)}$ nagerekend met behulp van een simulatie in Java.

5.1 Het aankomstproces A_t

Door logische redenatie weten we reeds dat het aankomstproces een Poissonproces is met parameter λ, onafhankelijk van de waarde van X_0 en onafhankelijk van het aantal vertrekken in $(0, t)$. De wachtrij heeft immers een oneindige capaciteit. Bij dit Poissonproces hoort de kansmassafunctie

$$\mathbf{P}\{A_t = i\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}.$$

We weten nu echter ook dat $\mathbf{P}\{A_t = i\} = \sum_{j=0}^{i+k} P_{ij}^{(k)}(t)$ voor willekeurige k, met $P_{ij}^{(k)}(t)$ als in (37) en (39). De verschillende formules moet dus dezelfde waarde hebben als uitkomst. We nemen om te testen de waarden $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $t = 10$ en $k = 5$. In Mathematica zijn voor $i = 0, 1, ..., 10$ op beide manieren de resultaten gevonden, deze zijn in Tabel 5.1 verwerkt. De resultaten zijn op 20 cijfers achter de komma afgerond. In alle gevallen zijn

i	$e^{-10}10^i/i!$	$\sum_{j=0}^{i+5} P_{ij}^{(5)}(10)$
0	0.00004539992976248485	0.00004539992976248485
1	0.00045399929762484852	0.00045399929762484852
2	0.00226999648812424258	0.00226999648812424258
3	0.00756665496041414192	0.00756665496041414192
4	0.01891663740103535481	0.01891663740103535481
5	0.03783327480207070961	0.03783327480207070961
6	0.06305545800345118269	0.06305545800345118269
7	0.09007922571921597527	0.09007922571921597527
8	0.11259903214901996909	0.11259903214901996909
9	0.12511003572113329898	0.12511003572113329898
10	0.12511003572113329898	0.12511003572113329898

Tabel 1: Resultaten voor aankomstproces

de cijfers geheel gelijk. Het is geen hard bewijs, maar er valt te concluderen dat deze resultaten overeenkomen.

5.2 Het vertrekproces D_t

Voor het vertrekproces is geen korte formule bekend zoals bij het aankomstproces wel het geval is. Daarom is in Java een programma geschreven dat het hele probleem simuleert.

Na een bepaalde exponentieel verdeelde tijdsduur (met parameter $\lambda+\mu$) is er met kans $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ een aankomst en met kans $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ een vertrek. Als er echter geen klanten zijn en er toch voor een vertrek gekozen wordt, gebeurt er niets. Het aantal aankomsten en vertrekken wordt bijgehouden. De programmacode is te vinden in Bijlage B. In het programma zijn de waarden $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $t = 10$ en $k = 0, 5, 10$ gebruikt. Voor alle drie waarden van k is de simulatie herhaald met $n = 10000000$. De resultaten zijn te vinden in Tabellen 5.2, 5.2 en 5.2. Hierbij is $Q_j^{(k)}(t)$ het gedeelte van de keren dat de simulatie eindigde met $D_t = j$. De waarden van $P_{*j}^{(0)}(10)$ zijn wederom met behulp van Mathematica gevonden.

j	$Q_j^{(0)}(10)$	$P_{*j}^{(0)}(10)$	j	$Q_j^{(0)}(10)$	$P_{*j}^{(0)}(10)$	j	$Q_j^{(0)}(10)$	$P_{*j}^{(0)}(10)$
0	0.00009	0.00005	11	0.10152	0.10170	22	0.00003	0.00004
1	0.00084	0.00086	12	0.07532	0.07527	23	0.00001	0.00001
2	0.00411	0.00409	13	0.05068	0.05074	24	0.00000	0.00000
3	0.01283	0.01286	14	0.03124	0.03128	25	0.00000	0.00000
4	0.03030	0.03026	15	0.01777	0.01769	26	0.00000	0.00000
5	0.05673	0.05672	16	0.00924	0.00921	27	0.00000	0.00000
6	0.08820	0.08820	17	0.00440	0.00442	28	0.00000	0.00000
7	0.11698	0.11694	18	0.00194	0.00196	29	0.00000	0.00000
8	0.13484	0.13481	19	0.00080	0.00081	30	0.00000	0.00000
9	0.13719	0.13714	20	0.00031	0.00031	31	0.00000	0.00000
10	0.12448	0.12449	21	0.00011	0.00011	32	0.00000	0.00000

Tabel 2: Resultaten voor vertrekproces bij $k = 0$

j	$Q_j^{(5)}(10)$	$P_{*j}^{(5)}(10)$	j	$Q_j^{(5)}(10)$	$P_{*j}^{(5)}(10)$	j	$Q_j^{(5)}(10)$	$P_{*j}^{(5)}(10)$
0	0.00000	0.00000	11	0.09369	0.09377	22	0.00291	0.00293
1	0.00000	0.00000	12	0.12339	0.12333	23	0.00120	0.00119
2	0.00000	0.00000	13	0.14038	0.14052	24	0.00045	0.00045
3	0.00000	0.00000	14	0.14059	0.14049	25	0.00015	0.00015
4	0.00001	0.00001	15	0.12462	0.12445	26	0.00005	0.00005
5	0.00014	0.00015	16	0.09856	0.09842	27	0.00002	0.00001
6	0.00104	0.00104	17	0.06985	0.06989	28	0.00000	0.00000
7	0.00458	0.00459	18	0.04475	0.04480	29	0.00000	0.00000
8	0.01407	0.01404	19	0.02600	0.02602	30	0.00000	0.00000
9	0.03251	0.03261	20	0.01372	0.01376	31	0.00000	0.00000
10	0.06070	0.06068	21	0.00660	0.00664	32	0.00000	0.00000

Tabel 3: Resultaten voor vertrekproces bij $k = 5$

j	$Q_j^{(10)}(10)$	$P_{*j}^{(10)}(10)$	j	$Q_j^{(10)}(10)$	$P_{*j}^{(10)}(10)$	j	$Q_j^{(10)}(10)$	$P_{*j}^{(10)}(10)$
0	0.00000	0.00000	11	0.01140	0.01139	22	0.04016	0.04024
1	0.00000	0.00000	12	0.02151	0.02138	23	0.02238	0.02245
2	0.00000	0.00000	13	0.03829	0.03840	24	0.01138	0.01134
3	0.00000	0.00000	14	0.06359	0.06355	25	0.00519	0.00520
4	0.00002	0.00001	15	0.09385	0.09389	26	0.00215	0.00218
5	0.00005	0.00006	16	0.12184	0.12189	27	0.00084	0.00084
6	0.00018	0.00018	17	0.13866	0.13844	28	0.00029	0.00029
7	0.00052	0.00052	18	0.13781	0.13783	29	0.00010	0.00010
8	0.00131	0.00131	19	0.12085	0.12086	30	0.00003	0.00003
9	0.00290	0.00291	20	0.09396	0.09386	31	0.00001	0.00001
10	0.00592	0.00590	21	0.06481	0.06493	32	0.00000	0.00000

Tabel 4: Resultaten voor vertrekproces bij $k = 10$

Zoals in elk van de tabellen te zien is, komende de simulatieresultaten nauwkeurig overeen met de waarden uit vergelijkingen (37) en (39). Er zijn natuurlijk wel afwijkingen, maar dat is niet meer dan logisch bij een simulatie. Het is wederom geen bewijs voor de juistheid van vergelijkingen (37) en (39), maar maakt ze erg aannemelijk.

Conclusie

Het is gelukt om een uitdrukking te vinden voor de kans dat het aantal vertrekken in periode $(0, t)$, oftewel D_t, in een $M/M/1$-systeem gelijk aan j is, als er k klanten aanwezig zijn op tijdstip 0, oftewel $P_{*j}^{(k)} = \mathbf{P}\{D_t = j \mid X_0 = k\}$. Hiervoor hebben we eerst de kans $P_{ij}^{(k)} = \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \mid X_0 = k\}$ berekend, waarin het aantal aankomsten A_t ook wordt meegenomen. Met behulp van de theorie over random walks hebben we bepaald dat voor $i = 0, 1, ...$ en $j = 0, 1, ..., k-1$ geldt:

$$P_{ij}^{(k)}(t) = \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} \cdot \frac{(\mu t)^j e^{-\mu t}}{j!},$$

oftewel het product van de kansmassafuncties van twee Poissonprocessen. Voor $i = 0, 1, ...$ en $j = k, k+1, ..., k+i$ wordt het een langere uitdrukking:

$$P_{ij}^{(k)}(t) = \Big(1 - \frac{i!j!}{(i+k)!(j-k)!}\Big) \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} \cdot \frac{(\mu t)^j e^{-\mu t}}{j!} + \\ e^{-\lambda t} \lambda^i \mu^j \sum_{m=0}^{j-k} \frac{i+k-m}{(i+k)!m!(j-k-m)!} \int_0^t (t-u)^{j-k-m} u^{i+k+m-1} e^{-\mu u} du.$$

Door te sommeren over alle mogelijke waarden van i hebben we nu de kans op j vertrekken in $(0, t)$ gevonden. Daarom krijgen we voor $j = 0, 1, ..., k-1$ de volgende uitdrukking:

$$P_{*j}^{(k)} = \mathbf{P}\{D_t = j \mid X_0 = k\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \mid X_0 = k\}.$$

Voor $j = k, k+1, ...$ hebben we

$$P_{*j}^{(k)} = \mathbf{P}\{D_t = j \mid X_0 = k\} = \sum_{i=j-k}^{\infty} \mathbf{P}\{A_t = i, D_t = j \mid X_0 = k\}.$$

Er is daarna een simulatie van de situatie uitgevoerd voor specifieke waarden van de parameters in het systeem, waaruit resultaten kwamen die geheel in overeenstemming zijn met de gevonden kansen.

Bijlagen

A Laplacetransformaties

De Laplacetransformatie is een afbeelding van een functie op een (andere) functie. Als $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ een functie is, is zijn Laplacegetransformeerde gelijk aan

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Deze techniek wordt bij differentiaalvergelijkingen veel gebruikt, maar ook in de kansrekening en combinatoriek kan hij nuttig zijn. Als we voor $f(t)$ namelijk de kansmassafunctie van een stochast X nemen, is de Laplacegetransformeerde niets anders dan $\mathbf{E}\{e^{-}sX\}$. Hier volgen enkele lemma's die in het verslag gebruikt worden.

Lemma A.1 (Laplacegetransformeerde van een afgeleide) *Als $F(s)$ de Laplacegetransformeerde is van $f(t)$, dan is $sF(s) - f(0)$ de Laplacegetransformeerde van $\frac{d}{dt}f(t)$.*

Bewijs Dit kan met behulp van partiële integratie bewezen worden:

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \Big[e^{-st} f(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f(t)dt = 0 - f(0) + sF(s).$$

□

Lemma A.2 (Laplacegetransformeerde van een convolutie) *Als $F(s)$ de Laplacegetransformeerde is van $f(t)$ en $G(s)$ de Laplacegetransformeerde van $g(t)$, is de Laplacegetransformeerde van de convolutie $(f * g)(t)$ gelijk aan $F(s)G(s)$.*

Bewijs Om dit te bewijzen werken we de integraal uit en passen we enkele trucjes toe:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}(f * g)(t)dt &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u)g(t-u)\,du\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^t e^{-su} f(u) e^{-s(t-u)} g(t-u)\,du\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-su} f(u) \int_u^\infty e^{-s(t-u)} g(t-u)\,dt\,du. \\
&= \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv = F(s)G(s).
\end{aligned}$$

□

We weten dat het product van de Laplacetransformaties van de kansdichtheidfuncties van twee onafhankelijke stochasten gelijk is aan de Laplacetransformatie van de kansdichtheidfunctie van de som van deze stochasten. Dan geldt immers:

$$\mathbf{E}\{e^{-s(X+Y)}\} = \mathbf{E}\{e^{-sX}\}\mathbf{E}\{e^{-sY}\}.$$

Uit Lemma A.2 volgt dat de kansdichtheidfunctie van de som van de stochasten gelijk is aan de convolutie van de kansdichtheidfuncties van de stochasten.

Lemma A.3 (Laplacegetransformeerde van de Erlangverdeling) *Als X een stochast is die volgens een Erlang-n-verdeling verdeeld is met rate λ, is de Laplacegetransformeerde van de verdelingsfunctie gelijk aan*

$$\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^n.$$

Bewijs Een stochast X verdeeld volgens de Erlang-n-verdeling met rate λ is de som van n onafhankelijke stochasten $Y_1, ..., Y_n$, elk exponentieel verdeeld met rate λ. Er geldt voor alle i dat $f_{Y_i} = \lambda e^{-\lambda t}$ de kansdichtheidfunctie is van Y_i. Daarom hebben we de volgende Laplacegetransformeerde:

$$\mathbf{E}\{e^{-sY_1}\} = \int_0^\infty e^{-st}\lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda\Big[\frac{1}{\lambda+s}e^{(\lambda+s)t}\Big]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

We kunnen nu concluderen dat

$$\mathbf{E}\{e^{-sX}\} = \mathbf{E}\{e^{-s\sum_{i=1}^n Y_i}\} = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\{e^{-sY_i}\} = (\mathbf{E}\{e^{-sY_1}\})^n = \Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^n.$$

□

B Programmacode van de simulatie

Het programma dat gebruikt is in hoofdstuk 5 is in de programmeertaal Java geschreven. De code volgt hier:

```
import java.text.DecimalFormat;
import java.text.DecimalFormatSymbols;


public class Simulatie {
    static double lambda;
    static double mu;
    static int k;
    static int n;
    static double t;
    static int[][] resultaten;
    static DecimalFormat df;
    static DecimalFormatSymbols dfs;


    static String rondAf(double p){
        return df.format(p);
    }

    public static void main(String[] args){

        n=10000000;
```

```
lambda=1;
mu=2;
t=10;
boolean decimaal=true;

dfs=new DecimalFormatSymbols();
dfs.setDecimalSeparator('.');
df = new DecimalFormat( "0.00000",dfs );

for(int l=0;l<3;l++){
    k=5*l;
    resultaten=new int[0][0];
    for(int i=0;i<n;i++){
        int At=0;
        int Dt=0;
        int klanten=k;
        double t2=expdistr(lambda+mu);
        while(t2<t){
            if(Math.random()<lambda/(lambda+mu)){
                At++;
                klanten++;
            }else{
                if(klanten>0){
                    Dt++;
                    klanten--;
                }
            }
            t2+=expdistr(lambda+mu);
        }
        if(resultaten.length<=At){
            int[][] r=new int[At+1][];
            for(int j=0;j<resultaten.length;j++){
                r[j]=resultaten[j];
            }
            for(int j=resultaten.length;j<r.length;j++){
                r[j]=new int[j+k+1];
            }
            resultaten=r;
        }
        resultaten[At][Dt]++;
    }
    for(int i=0;i<resultaten.length;i++){
        System.out.print("      ");
        for(int k=1;k<Math.log10(resultaten.length)+1;k++){
            if(i<Math.pow(10,k)){
                System.out.print(" ");
            }
        }
        System.out.print(i);
        for(int j=0;j<resultaten[i].length;j++){
            System.out.print(" "+rondAf((double)resultaten[i][j]/n));
        }
        System.out.println("");
    }
```

```
            for(int k=1;k<Math.log10(resultaten.length)+1;k++){
                System.out.print(" ");
            }
            System.out.print("Totaal");
            for(int j=0;j<resultaten.length+k;j++){
                int totaal=0;
                for(int i=Math.max(0,j-k);i<resultaten.length;i++){
                    totaal+=resultaten[i][j];
                }
                System.out.print(" "+rondAf((double)totaal/n));
            }
            System.out.print("\n          ");
            for(int i=0;i<resultaten.length+k;i++){
                System.out.print("      ");
                for(int k=1;k<Math.log10(resultaten.length+k)+1;k++){
                    if(i<Math.pow(10,k)){
                        System.out.print(" ");
                    }
                }
                System.out.print(i);
            }
        }
        latex();
    }

    static void latex(){ //maak een tabel voor de D_t in LateX
        System.out.println("\\begin{tabular}{|r|r|r|}\n
            \\hline\n$j$&$Q_j^{("+k+")}$&$P_j^{(k)}$ \\\\\n\\hline");
        for(int j=0;j<resultaten.length+k;j++){
            int totaal=0;
            for(int i=Math.max(0,j-k);i<resultaten.length;i++){
                totaal+=resultaten[i][j];
            }
            System.out.println(j+"&"+rondAf((double)totaal/n)+"&    \\\\");
        }
        System.out.println("\\hline\n\\end{tabular}");
    }


    static double expdistr(double l){
        double t=-1/l*Math.log(Math.random());
        return t;
    }

}
```

Referenties

[1] Feller W., 1950. *An introduction to probability theory and its applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Takács L., 1967. *Combinatorial methods in the theory of stochastic processes*, John Wiley & Sons, Inc., New York.