

MASTER

Het gebruik van vierpool tabellen

Steffelaar, M.

Award date:
1962

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

T E C H N I S C H E H O G E S C H O O L
E I N D H O V E N

A F D E L I N G D E R E L E K T R O T E C H N I E K

Het gebruik van vierpool tabellen.

door

Ir. M. Steffelaar.

november 1962

Het gebruik van vierpool tabellen.

Inleiding.

Nu het gebruik van transistoren snel toeneemt, ziet men steeds meer de overzichtelijke rekenmethode der vierpooltheorie toepassen. Ook voor schakelingen met buizen benut men nogal eens vierpooltheorie, in het bijzonder in de microgolftechniek. ¹⁾

Wanneer twee vierpolen in cascade geschakeld worden ontstaat een nieuwe vierpool. De matrix van de nieuwe vierpool is te vinden, door de matrices der twee oorspronkelijke vierpolen met elkaar te vermenigvuldigen. Deze methode is volop in gebruik.

Wanneer echter vierpolen in serie of parallel geschakeld worden, past men slechts zelden vierpooltheorie toe, alhoewel deze hiervoor veelal goed gebruikt kan worden.

De oorzaak hiervan is, dat men slechts zelden beschikt over vierpooltabellen, waarmede men de ene matrixvorm direct in de andere transformeert. Om in deze leemte te voorzien zijn een aantal tabellen hier afgedrukt.

Tabel 1.

In tabel 1 zijn zes bij elkaar behorende vierpool vergelijkingsparen gedefinieerd. Dat dit aantal zes bedraagt, ziet men als volgt in. Tussen vier variabelen u_1 , u_2 , i_1 en i_2 zijn twee lineaire betrekkingen vastgelegd, welke tezamen een vergelijkingspaar vormen. Men kan kiezen welke twee grootheden men in de twee overgeblevenen wil uitdrukken. Uit een groep van vier variabelen kan men slechts zes verschillende combinaties van twee kiezen. Elke keuze leidt tot een vergelijkingspaar.

Voor de coëfficiënten zijn zes verschillende letters met ieder twee indices gebruikt zoals dit in de vierpooltheorie gebruikelijk is. De matrixcoëfficiënten z , y en h zijn practisch altijd gedefinieerd zoals tabel 1 aangeeft. Omtrent de a , b en c matrices bestaat veel minder uniformiteit. Men kan linker en rechter kolom verwisselen van bijvoorbeeld het vergelijkingspaar waarin c voorkomt.

Er ontstaat dan weer een nieuwe matrix, welke dan met een andere letter dient te worden aangeduid ((g) in ²⁾).

Er komen in de literatuur talrijke afwijkende matrices voor, welke door dit soort transformaties tot de matrices van tabel 1 kunnen worden herleid. ¹). Ook de keuze van het teken der onafhankelijk variabelen is soms anders genomen, dan in tabel 1 staat vermeld.

Tabel 2.

Wanneer van een netwerk één der zes matrices bekend is, kunnen alle andere matrices uit deze ene gegeven matrix berekend worden. Wanneer bijvoorbeeld (z) bekend is, kan (y) berekend worden, door uit de vierpoolvergelijkingen met de matrix (z) de stromen i_1 en i_2 op te lossen, en deze uit te drukken in u_1 en u_2 . De coëfficiënten van u_1 en u_2 welke men dan vindt, vormen tezamen de (y) matrix, zoals uit tabel 1 blijkt. Om rekenwerk te besparen kan men ook gebruik maken van tabel 2. Hierin is elke matrix in de coëfficiënten van elke andere matrix uitgedrukt.

Zo leest men bijvoorbeeld af, dat $y_{21} = \frac{-z_{21}}{z_{22}z_{11} - z_{12}z_{21}}$ in de tweede

rij, eerste kolom, links onder. Door middel van tabel 2 kan men daarom direct elke vierpoolcoëfficiënt berekenen, zodra één matrix berekend is.

In deze tabel is ook een regel opgenomen, waarin de betrekking staat genoteerd welke geldt voor reciproke netwerken.

De laatste regel van tabel 1 geeft verkort aan, hetgeen tabel 3 uitvoerig illustreerd.

Tabel 3.

In tabel 3 is aangegeven hoe men de matrix coëfficiënten van een vierpool kan vinden, wanneer deze vierpool bestaat uit de combinatie van twee andere vierpolen. Wanneer zowel ingang als uitgang in serie zijn geschakeld, wordt de (z) gevonden door (z') en (z'') bij elkaar op te tellen, volgens de matrix opstelling. Deze matrixopstelling is als volgt gedefinieerd:

(z) = (z') + (z'') als:

$$z_{11} = z'_{11} + z''_{11} \quad , \quad z_{12} = z'_{12} + z''_{12}$$

$$z_{21} = z'_{21} + z''_{21} \quad , \quad z_{22} = z'_{22} + z''_{22}$$

Voor de (y), (h) en (c) gelden voor soortgelijke schakelingen overeenkomstige formules. De juistheid hiervan volgt direct uit de definitie formules der matrices, de schakelschema's en de wetten van Kirchhoff.

Bij cascade schakeling gelden twee formules; met de stip is matrixvermenigvuldiging bedoeld. Deze vermenigvuldiging is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} (a) &= (a') \cdot (a'') \quad \text{als} \\ a_{11} &= a'_{11} a''_{11} + a'_{12} a''_{21} \quad (= \sum_i a'_{1i} a''_{i1}) \\ a_{12} &= a'_{11} a''_{12} + a'_{12} a''_{22} \quad (= \sum_i a'_{1i} a''_{i2}) \\ a_{21} &= a'_{21} a''_{11} + a'_{22} a''_{21} \quad (= \sum_i a'_{2i} a''_{i1}) \\ a_{22} &= a'_{21} a''_{12} + a'_{22} a''_{22} \quad (= \sum_i a'_{2i} a''_{i2}) \end{aligned}$$

Zoals men ziet is deze vermenigvuldiging niet commutatief. De verwisseling der (b') en (b'') is daarom niet toegestaan. Ook van deze betrekkingen vindt men de juistheid uit de definitie formules der matrices de schakelschema's en de wetten van Kirchhoff.

Wanneer men van deze formules gebruik maakt, wordt verondersteld, dat de beide vierpolen ondanks de schakeling welke wordt gebruikt, toch als vierpolen blijven functioneren. Dit betekent, dat de stroom aan de beide ingangsklemmen gelijk en tegengesteld moet zijn.⁵⁾ Ook de uitgangsklemmen moeten gelijke en tegengestelde stromen voeren. Deze eis is bij cascade schakeling nimmer in gevaar. Bij de vier andere schakelingen moet echter voorzichtigheid worden betracht. Wanneer de spanning u_{eg} tussen de klemmen e-g van de vierpool (z') en de spanning u_{hm} tussen de klemmen h-m van de vierpool (z'') (van fig. 3) niet aan elkaar gelijk zijn, vóórdat de doorverbinding tot stand komt, zal er een kringstroom e-g-m-h ontstaan, zodra de doorverbindingen worden aangebracht. Dan wordt het vierpoolkarakter der beide vierpolen aangetast.

Alleen wanneer deze kringstroom nul is, zullen de opgegeven formules juist zijn. Wanneer de kringstroom niet nul is, zal wél een nieuwe vierpool ontstaan; de vierpoolcoëfficiënten zullen echter niet uit de vierpoolcoëfficiënten der deelvierpolen te vinden zijn.

Deze vierpoolcoëfficiënten geven immers geen enkele informatie over de spanningen u_{eg} en u_{hm} . Men moet dan uitgebreider zijn geïnformeerd, dan alleen door de kennis der vierpoolcoëfficiënten.

De kringstroom e-g-m-h zal nul zijn, indien de spanningen u_{eg} en u_{hm} aan elkaar gelijk zijn, of wanneer de impedantie in deze kring oneindig groot is. De kringstroom zal steeds nul zijn, indien de beide vierpolen ieder één klemmenpaar hebben doorverbonden, zoals in figuur 3 gestippeld is aangegeven. Deze twee kortgesloten klemmen moeten dan zodanig worden geplaatst, dat de kringstroom nul is. Wanneer een vierpool twee kortgesloten klemmen heeft, dan kiest men daarvoor veelal de onderste twee. Men spreekt wel over "vierpolen met doorlopende aardleiding". Uit tabel 3 blijkt dat men dan soms een transformatie moet uitvoeren, om tot de daar gestippelde kortsluitingen te komen. Berekening leert, dat het spiegelen der vierpolen om een horizontale as, geen verandering brengt in de vierpoolcoëfficiënten. Wanneer echter alleen de ingangsklemmen worden verwisseld, veranderen o.a. h_{12} en h_{21} van teken. Worden alleen de uitgangsklemmen verwisseld dan veranderen o.a. c_{11} en c_{22} van teken. Deze aanwijzingen zijn in tabel 3 opgenomen.

Doordat de berekeningen aan vierpolen veelal betrekking hebben op vierpolen met doorgaande aardleiding, zijn de aangegeven formules van groot praktisch nut, ondanks de boven beschreven beperkingen.

Tabel 4.

Van een vierpool met doorgaande aardleiding zijn alle spanningsverschillen tussen de klemmen bekend. In tabel 4 is links onder een zestal vierpolen met doorgaande aardleiding getekend. De met elkaar verbonden klemmen zijn steeds onderaan gekozen. De vierpool midden boven kan naar rechts of naar links gekanteld worden. Dan ontstaan de vierpolen zoals in de vakken rechts en links van deze vierpool zijn aangegeven. Elk der zo ontstane vierpolen kan gespiegeld worden om een verticale as. De vierpolen welke door spiegeling worden verkregen, zijn onder deze drie geplaatst. Wanneer de vierpool coëfficiënten van de vierpool midden boven bekend zijn, kan men de andere vierpool coëfficiënten berekenen. Voor elk der zes vierpolen zijn alle matrices bepaald, uitgedrukt in de matrix coëfficiënten van de vierpool midden boven. De uitkomsten van deze berekening zijn in tabel 4 overzichtelijk genoteerd.

Tabel 5.

Wanneer de uitgangsklemmen van een vierpool worden aangesloten op een impedantie z_a , zal tussen de vier grootheden u_1 , u_2 , i_1 en i_2 een derde betrekking $u_2 = -i_2 z_a$ ontstaan.

Er zijn dan drie vergelijkingen met vier onbekenden. Oplossen der onbekenden is dan dus nog niet mogelijk.

De verhoudingen tussen de vier grootheden liggen echter wel vast. Er zijn uit vier grootheden een twaalfstal verhoudingen aan te geven.

Deze verhoudingen zijn twee aan twee reciprook. Men kan daarom volstaan met het berekenen van zes stuks. Eén van deze zes stuks is de verhouding $\frac{u_2}{i_2} = -z_a$ en deze behoeft dus niet te worden bepaald.

In tabel 5 zijn de overige vijf genoteerd, uitgedrukt in de coëfficiënten van elk der zes matrix grootheden.

Wanneer de ingangsklemmen op een impedantie z_e wordt aangesloten, ontstaan eveneens vijf van deze verhoudingen. Ook deze zijn in tabel 5 vermeld.

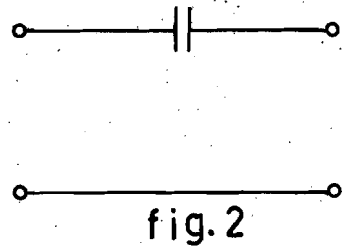
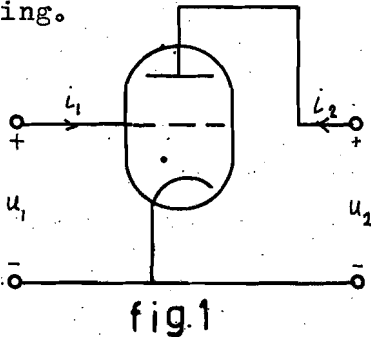
Tabel 6.

In tabel 6 zijn voor een aantal matrix coëfficiënten, de duitse benamingen gegeven. ⁴⁾ In de tekeningetjes is aangegeven hoe een bepaalde coëfficiënt gemeten en berekend kan worden; dit volgt direct uit de definitie formules van tabel 1.

Toepassingen.

Ter illustratie zullen enkele elektronische schakelingen met behulp van vierpool theorie worden berekend. Als eerste voorbeeld: de berekening van het Miller-effect.

We beschouwen daartoe eerst de triode als vierpool met doorlopende aardleiding.



Voor de triode geldt $i_a = S u_g + \frac{1}{R_i} u_a$ (1)

$i_g = 0 \cdot u_g + 0 \cdot u_a$ (2)

Uit tabel 1 zien we dat blijkbaar de (y') voor de triode gelijk is aan

$$(y') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & \frac{1}{R_i} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Voor een vierpool met doorlopende aardleiding welke een enkele condensator bevat, zoals figuur 2 aangeeft kan de (y'') berekend worden door toepassing van de definitie formules uit tabel 1.

$$(y'') = \begin{pmatrix} j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & j\omega C \end{pmatrix} \quad (4)$$

Wanneer in- en uitgang parallel geschakeld worden, kan de (y) gevonden worden door (y') en (y'') op te tellen, zoals dit blijkt uit tabel 3.

$$(y) = (y') + (y'') = \begin{pmatrix} j\omega C & -j\omega C \\ S-j\omega C & \frac{1}{R_i} + j\omega C \end{pmatrix} \quad (5)$$

De determinant $\|y\|$ is:

$$\|y\| = j\omega C \left(j\omega C + \frac{1}{R_i} \right) - (-j\omega C) (S-j\omega C) = j\omega C \cdot S \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \quad (6)$$

We kunnen nu (z) berekenen door toepassing van tabel 2.

$$z_{11} = \frac{j\omega C + \frac{1}{R_i}}{j\omega C S \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu}} \left[\frac{1}{S} + \frac{1}{j\omega C \cdot \mu} \right]$$

$$z_{12} = \frac{j\omega C}{j\omega C S \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\mu} \right)} \cdot \frac{1}{S}$$

$$z_{21} = \frac{-S + j\omega C}{j\omega C S \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{S} + \frac{-1}{j\omega C} \right)$$

$$z_{22} = \frac{j\omega C}{j\omega C S \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{1}{S}$$

$$(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu}} \begin{pmatrix} \frac{1}{S} + \frac{1}{j\omega C \mu} & \frac{1}{S} \\ \frac{1}{S} - \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{S} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Welke der grootheden van belang is, en welke matrix men wil berekenen, hangt geheel van de toepassing af. We zullen de term $\frac{1}{\mu}$ welke « 1 is, verwaarlozen.

Uit (z) zien we dat de ingangsimpedantie bij open uitgang $z_{11} = \frac{1}{S} + \frac{1}{j\omega C\mu}$, bestaat uit de serieschakeling van een weerstand $\frac{1}{S}$ en een condensator μC . Deze laatste term staat bekend onder de naam van het "Miller" effect. De eerste term is klein en wordt meestal verwaarloosd. Ook zien we, dat de uitgangs-impedantie bij open ingang gelijk is aan $z_{22} = \frac{1}{S}$. De uitgang is dus laagohmig, als de ingang hoogohmig gevoed wordt.

Het tweede voorbeeld is de doorrekening van een cascode schakeling. De (y') voor een triode met gearde kathode is reeds bekend. Voor een triode schakeling met gearde rooster kunnen we de (y'') matrix vinden door toepassing van tabel 4. Van het zestal (y) matrices moeten we de matrix in het linker ondervak hebben. Immers de schakeling met gearde kathode wordt midden boven gedacht. Om hieruit de schakeling met gearde rooster te krijgen moet deze linksom gekanteld worden, en daarna gespiegeld.

Gevonden wordt:

$$(y'') = \begin{pmatrix} S(1 + \frac{1}{\mu}) & -\frac{1}{R_i} \\ -S(1 + \frac{1}{\mu}) & \frac{1}{R_i} \end{pmatrix} \quad (8)$$

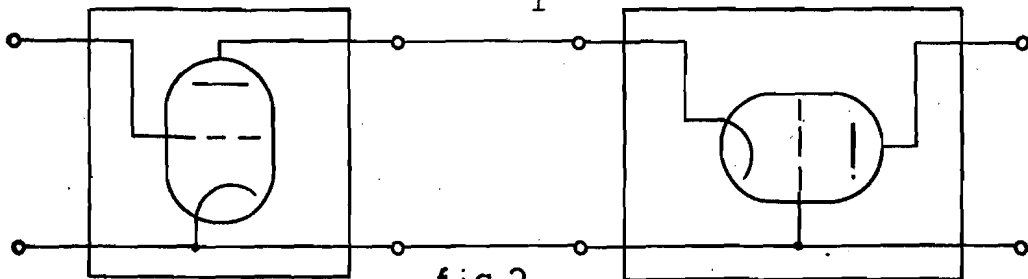


fig. 3

Om van de cascode schakeling de (y) te kunnen berekenen moet eerst (a') en (a'') bepaald worden. Het product van deze twee levert (a). Uit deze (a) kan door het nogmaals toepassen van tabel 2 (y) gevonden worden.

$$(a') = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu} & -\frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$(a'') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu + 1} & \frac{1}{S(1 + \frac{1}{\mu})} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(a) = (a') \cdot (a'') = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu(\mu + 1)} & -\frac{1}{S} \cdot \frac{\mu + 2}{\mu + 1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S \cdot \frac{\mu + 1}{\mu + 2} & \frac{1}{R_i(\mu + 2)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Uit matrix (12) zien we, door deze met matrix (3) te vergelijken, dat deze cascode schakeling, veel op een triodeschakeling met geaarde kathode lijkt, waarbij de steilheid is $S \cdot \frac{\mu + 1}{\mu + 2} \approx S$ is, en de inwendige weerstand $R_i \cdot (\mu + 2)$. De eigenschappen van deze schakeling lijken dus op de eigenschappen van een penthode. Ook wanneer men de capacitieve terugwerking in de berekening opneemt, blijkt de schakeling penthode eigenschappen te bezitten.

Wanneer echter de ruis van deze schakeling berekend wordt blijkt deze veel geringer dan voor de overeenkomstige penthode, doordat de verdelingsruis ontbreekt.

Samenvattend: de schakeling heeft een penthode versterking en terugwerking en een triode ruis. Deze eigenschappen maken de schakeling zeer geschikt als ruisarme ingangsversterker.

Tenslotte een voorbeeld waarbij tabel 5 van pas komt.

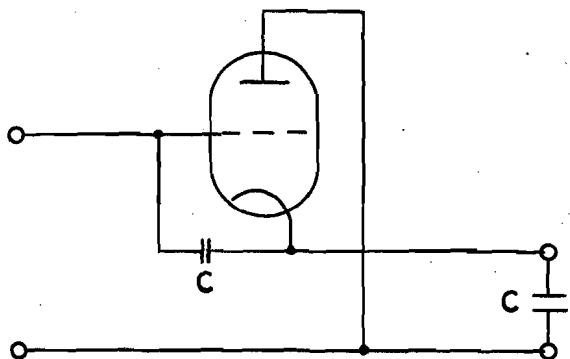


fig. 4

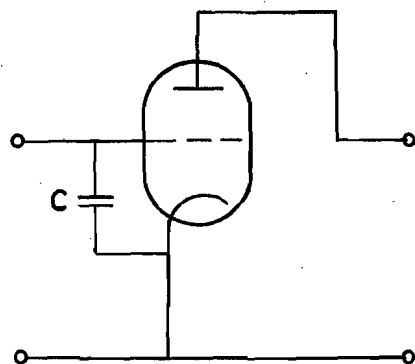
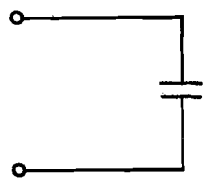
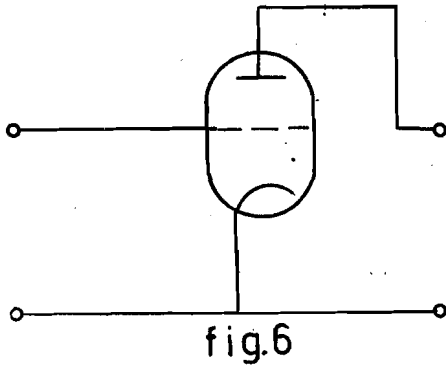


fig. 5

Gevraagd $\frac{u_1}{i_1}$ van de schakeling welke in figuur 4 is gegeven. Dit is een triode in anode-basis schakeling welke door een capaciteit C is belast. Ook de roosterkathode capaciteit wordt in de berekening opgenomen en deze is eveneens C gesteld.

Van figuur 5 kan de y matrix bepaald worden door sommatie der y matrices van figuur 6 en figuur 7.



$$(y') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & \frac{1}{R_i} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$(y'') = \begin{pmatrix} j\omega C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Voor figuur 5 $(y) = (y') + (y'') = \begin{pmatrix} j\omega C & 0 \\ S & \frac{1}{R_i} \end{pmatrix} \quad (15)$

Door rechtsonkantelen en spiegelen wordt figuur 5 getransformeerd naar figuur 4. Uit tabel 4 blijkt dat voor fig. 4 de y matrix wordt:

$$(y) = \begin{pmatrix} j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C - S & S + \frac{1}{R_i} + j\omega C \end{pmatrix} \quad (16)$$

Hieruit vinden we $\|y\| = \frac{j\omega C}{R_i} \quad (17)$

Uit tabel 5 zien we, dat

$$\frac{u_1}{i_1} = \frac{y_{22} z_a + 1}{\|y\| z_a + y_{11}} \quad (18)$$

zodat we vinden, als $z_a = \frac{1}{j\omega C}$:

$$\frac{u_1}{i_1} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1 + \mu + 2 j\omega C R_i}{1 + j\omega C R_i} \quad (19)$$

Voor $\omega C R_i \ll 1$ is dit ongeveer

$$\frac{u_1}{i_1} = \frac{1}{j\omega C} \cdot (\mu + 1) = \frac{1}{j\omega \frac{C}{\mu+1}} \quad (20)$$

dus blijkbaar een capacitieve ingang met $C_i = \frac{C}{\mu + 1}$

Voor zeer hoge frequenties geldt echter een andere benadering:

$$\omega C R_i \gg \mu \text{ of } \omega C \gg S$$

$$\frac{u_1}{i_1} = \frac{1}{j\omega \frac{C}{2}} \quad (21)$$

Dan een capacitieve ingang met capaciteit $\frac{C}{2}$.

Om de schakeling een geringe ingangscapaciteit te geven bij een hoge frequentie, moet blijkbaar ook een geringe capacitieve belasting zoveel mogelijk vermeden worden.

Literatuuropgave.

1) W. Busscher.

Transfer Properties of a network consisting of two resonant circuits coupled by a fourpole.

Electronic applications. Vol. 16, no. 3, pag. 81.

2) H.M. Schlicke.

Essentials of diëlectromagnetic engineering.

John Willey & Sons. inc., pag. 133 N.Y. London (EB 6105).

3) Gordon Newstead.

General circuit theory.

Methuen & Co Ltd. London (EB 5937).

4) Telefunken Laborbuch, deel 1, pag. 35 e.v.

5) B.D.H. Tellegen.

Theorie der elektrische netwerken.

Noordhoff n.v. 1952. Groningen.

6) IRE transactions on circuit theory. Dec 1957 blz 337

E.F. Bolinder.

Note on the Matrix representation of linear two port networks.

7) E.A. Guillemin.

Communication networks vol II Hs + 4.

N.Y. John Wiley & Sons Inc.

8) R. Feldtkeller

Einführung in die Vierpoltheorie

S. Hirzel Verlag Stuttgart 1962

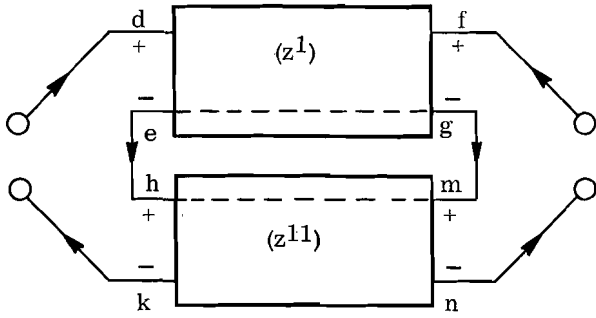
$$z = \|z\| = z_{22} \cdot z_{11} - z_{21} \cdot z_{12} \text{ (voor de andere letters overeenkomstig)}$$

TABEL 2

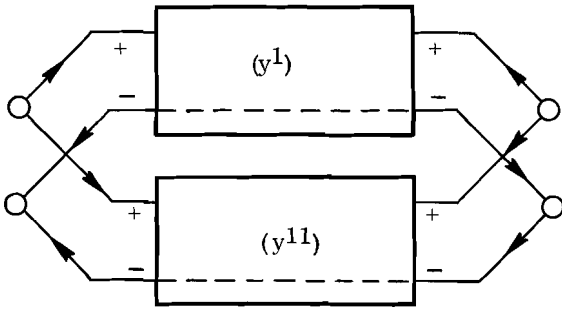
	z		y		h		a		b		c	
(z)	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{y}$	$-\frac{y_{12}}{y}$	$\frac{h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{a_{11}}{a_{21}}$	$\frac{a}{a_{21}}$	$\frac{b_{22}}{b_{21}}$	$\frac{1}{b_{21}}$	$\frac{1}{c_{12}}$	$-\frac{c_{11}}{c_{12}}$
	z_{21}	z_{22}	$-\frac{y_{21}}{y}$	$\frac{y_{11}}{y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{a_{21}}$	$\frac{a_{22}}{a_{21}}$	$\frac{b}{b_{21}}$	$\frac{b_{11}}{b_{21}}$	$\frac{c_{22}}{c_{12}}$	$-\frac{c}{c_{12}}$
(y)	$\frac{z_{22}}{z}$	$-\frac{z_{12}}{z}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{a_{22}}{a_{12}}$	$-\frac{a}{a_{12}}$	$\frac{b_{11}}{b_{12}}$	$-\frac{1}{b_{12}}$	$-\frac{c}{c_{21}}$	$\frac{c_{11}}{c_{21}}$
	$-\frac{z_{21}}{z}$	$\frac{z_{11}}{z}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{h}{h_{11}}$	$-\frac{1}{a_{12}}$	$\frac{a_{11}}{a_{12}}$	$-\frac{b}{b_{12}}$	$\frac{b_{22}}{b_{12}}$	$-\frac{c_{22}}{c_{21}}$	$\frac{1}{c_{21}}$
(h)	$\frac{z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{a_{12}}{a_{22}}$	$\frac{a}{a_{22}}$	$\frac{b_{12}}{b_{11}}$	$\frac{1}{b_{11}}$	$-\frac{c_{21}}{c}$	$\frac{c_{11}}{c}$
	$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{y}{y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{1}{a_{22}}$	$\frac{a_{21}}{a_{22}}$	$-\frac{b}{b_{11}}$	$\frac{b_{21}}{b_{11}}$	$\frac{c_{22}}{c}$	$-\frac{c_{12}}{c}$
(a)	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{z}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	$-\frac{h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	a_{11}	a_{12}	$\frac{b_{22}}{b}$	$\frac{b_{12}}{b}$	$\frac{1}{c_{22}}$	$\frac{c_{21}}{c_{22}}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{y}{y_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	a_{21}	a_{22}	$\frac{b_{21}}{b}$	$\frac{b_{11}}{b}$	$\frac{c_{12}}{c_{22}}$	$-\frac{c}{c_{22}}$
(b)	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{z}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}}$	$-\frac{1}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$\frac{a_{22}}{a}$	$\frac{a_{12}}{a}$	b_{11}	b_{12}	$\frac{c}{c_{11}}$	$-\frac{c_{21}}{c_{11}}$
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$-\frac{y}{y_{12}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{h}{h_{12}}$	$\frac{a_{21}}{a}$	$\frac{a_{11}}{a}$	b_{21}	b_{22}	$-\frac{c_{12}}{c_{11}}$	$-\frac{1}{c_{11}}$
(c)	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{1}{z_{11}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{y}{y_{22}}$	$-\frac{h_{12}}{h}$	$\frac{h_{22}}{h}$	$-\frac{a}{a_{11}}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}}$	$-\frac{1}{b_{22}}$	$\frac{b_{21}}{b_{22}}$	c_{11}	c_{12}
	$\frac{z}{z_{11}}$	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{h_{11}}{h}$	$-\frac{h_{21}}{h}$	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	$\frac{b_{12}}{b_{22}}$	$\frac{b}{b_{22}}$	c_{21}	c_{22}
Reciprociteit	$z_{12} = z_{21}$		$y_{12} = y_{21}$		$h_{12} = -h_{21}$		$a = 1$		$b = 1$		$c_{11} = -c_{22}$	
1 2	s s	+	p p	+	s p	+	c	.	c	┌	p s	+

TABEL 1

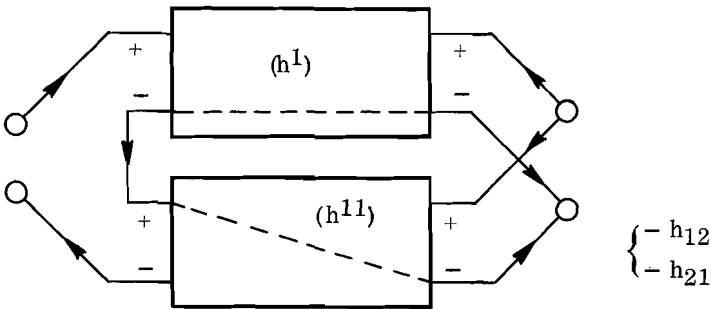
$u_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2$ $u_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2$	$u_1 = a_{11} u_2 + a_{12} (-i_2)$ $i_1 = a_{21} u_2 + a_{22} (-i_2)$
$i_1 = y_{11} u_1 + y_{12} u_2$ $i_2 = y_{21} u_1 + y_{22} u_2$	$u_2 = b_{11} u_1 + b_{12} (-i_1)$ $i_2 = b_{21} u_1 + b_{22} (-i_1)$
$u_1 = h_{11} i_1 + h_{12} u_2$ $i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} u_2$	$i_1 = c_{11} i_2 + c_{12} u_1$ $u_2 = c_{21} i_2 + c_{22} u_1$



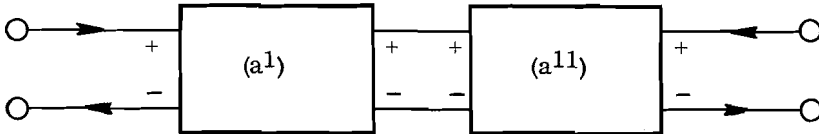
$$(z) = (z^1) + (z^{11})$$



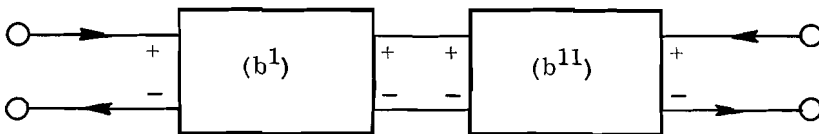
$$(y) = (y^1) + (y^{11})$$



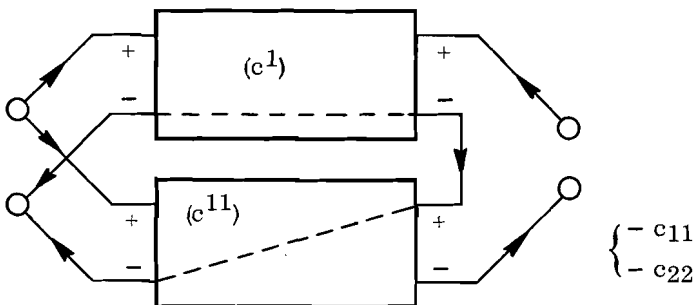
$$(h) = (h^1) + (h^{11})$$



$$(a) = (a^1) \cdot (a^{11})$$



$$(b) = (b^{11}) \cdot (b^1)$$



$$(c) = (c^1) + (c^{11})$$

TABEL 4

z_0	$z_{11} - z_{21}$	z_{11}	z_{12}	z_{22}	$z_{22} - z_{21}$
$z_{11} - z_{12}$	z_{11}	z_{21}	z_{22}	$z_{22} - z_{12}$	z_0
z_{11}	$z_{11} - z_{12}$	z_{22}	z_{21}	z_0	$z_{22} - z_{12}$
$z_{11} - z_{21}$	z_0	z_{12}	z_{11}	$z_{22} - z_{21}$	z_{22}

$$z_0 = z_{22} + z_{11} - z_{21} - z_{12}$$

$\frac{a_0 - 1}{a_0 - a_{22}}$	$\frac{a_{12}}{a_0 - a_{22}}$	a_{11}	a_{12}	$\frac{a_{22}}{a_0 - a_{11}}$	$\frac{a_{12}}{a_0 - a_{11}}$
$\frac{a_{21}}{a_0 - a_{22}}$	$\frac{a_{11}}{a_0 - a_{22}}$	a_{21}	a_{22}	$\frac{a_{21}}{a_0 - a_{11}}$	$\frac{a_0 - 1}{a_0 - a_{11}}$
$\frac{a_{11}}{a_{11} - 1}$	$\frac{a_{12}}{a_{11} - 1}$	$\frac{a_{22}}{a}$	$\frac{a_{12}}{a}$	$\frac{a_0 - 1}{a_{22} - 1}$	$\frac{a_{12}}{a_{22} - 1}$
$\frac{a_{21}}{a_{11} - 1}$	$\frac{a_0 - 1}{a_{11} - 1}$	$\frac{a_{21}}{a}$	$\frac{a_{11}}{a}$	$\frac{a_{21}}{a_{22} - 1}$	$\frac{a_{22}}{a_{22} - 1}$

$$a_0 = a_{22} + a_{11} - a$$

y_{22}	$-y_{21} - y_{22}$	y_{11}	y_{12}	y_0	$-y_{11} - y_{21}$
$-y_{12} - y_{22}$	y_0	y_{21}	y_{22}	$-y_{11} - y_{12}$	y_{11}
y_0	$-y_{12} - y_{22}$	y_{22}	y_{21}	y_{11}	$-y_{11} - y_{12}$
$-y_{21} - y_{22}$	y_{22}	y_{12}	y_{11}	$-y_{11} - y_{21}$	y_0

$$y_0 = y_{11} + y_{22} + y_{21} + y_{12}$$

$\frac{b_{22}}{b_0 - b_{11}}$	$\frac{b_{12}}{b_0 - b_{11}}$	b_{11}	b_{12}	$\frac{b_0 - 1}{b_0 - b_{22}}$	$\frac{b_{12}}{b_0 - b_{22}}$
$\frac{b_{21}}{b_0 - b_{11}}$	$\frac{b_0 - 1}{b_0 - b_{11}}$	b_{21}	b_{22}	$\frac{b_{21}}{b_0 - b_{22}}$	$\frac{b_{11}}{b_0 - b_{22}}$
$\frac{b_0 - 1}{b_{22} - 1}$	$\frac{b_{12}}{b_{22} - 1}$	$\frac{b_{22}}{b}$	$\frac{b_{12}}{b}$	$\frac{b_{11}}{b_{11} - 1}$	$\frac{b_{12}}{b_{11} - 1}$
$\frac{b_{21}}{b_{22} - 1}$	$\frac{b_{22}}{b_{22} - 1}$	$\frac{b_{21}}{b}$	$\frac{b_{11}}{b}$	$\frac{b_{21}}{b_{11} - 1}$	$\frac{b_0 - 1}{b_{11} - 1}$

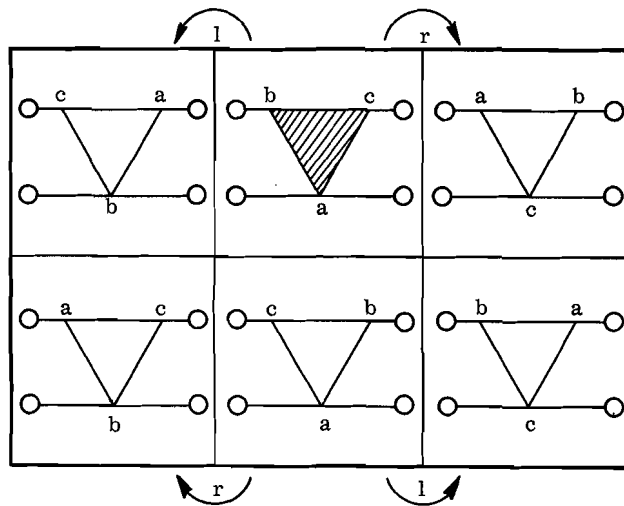
$$b_0 = b_{22} + b_{11} - b$$

$\frac{h_{11}}{h}$	$\frac{h_{21} + h}{h}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{h_{11}}{h_0}$	$\frac{h_{21} + 1}{h_0}$
$\frac{h_{12} - h}{h}$	$\frac{h_{22}}{h}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{h_{12} - 1}{h_0}$	$\frac{h_{22}}{h_0}$
$\frac{h_{11}}{h_0}$	$\frac{-h_{12} + h}{h_0}$	$\frac{h_{11}}{h}$	$\frac{-h_{21}}{h}$	h_{11}	$1 - h_{12}$
$\frac{-h_{21} - h}{h_0}$	$\frac{h_{22}}{h_0}$	$\frac{-h_{12}}{h}$	$\frac{h_{22}}{h}$	$-1 - h_{21}$	h_{22}

$$h_0 = 1 + h + h_{21} - h_{12}$$

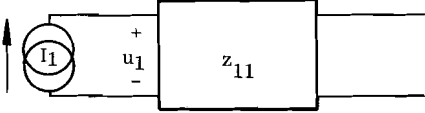
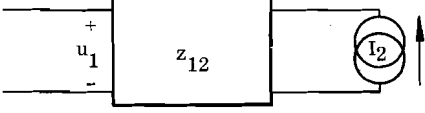
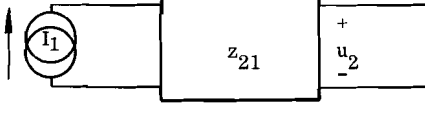
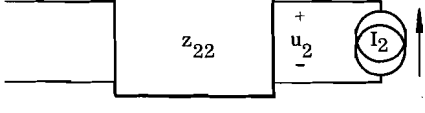
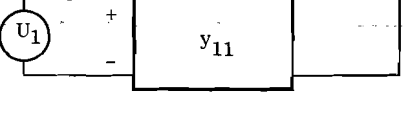
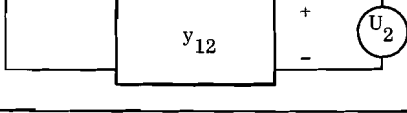
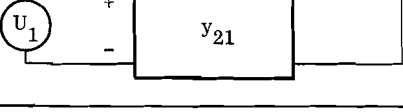
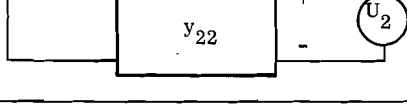
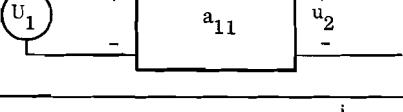
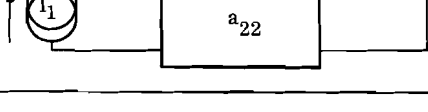
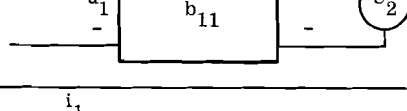
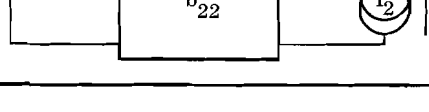
$\frac{c_{22} - 1}{c_0}$	$\frac{c_{12}}{c_0}$	c_{11}	c_{12}	$\frac{-c - c_{22}}{c}$	$\frac{-c_{12}}{c}$
$\frac{c_{21}}{c_0}$	$\frac{c_{11} + 1}{c_0}$	c_{21}	c_{22}	$\frac{-c_{21}}{c}$	$\frac{c - c_{11}}{c}$
$-c_{11} - 1$	c_{12}	$\frac{c_{22}}{c}$	$\frac{-c_{12}}{c}$	$\frac{c - c_{11}}{c_0}$	$\frac{c_{12}}{c_0}$
c_{21}	$-c_{22} + 1$	$\frac{-c_{21}}{c}$	$\frac{c_{11}}{c}$	$\frac{c_{21}}{c_0}$	$\frac{-c - c_{22}}{c_0}$

$$c_0 = 1 + c_{11} - c_{22} - c$$



$$z = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21} \text{ (voor de andere letters overeenkomstig)}$$

	z	y	h	a	b	c	
$\frac{u_2}{u_1}$	$\frac{z_{21} z_a}{z + z_{11} z_a}$	$\frac{-y_{21} z_a}{1 + y_{22} z_a}$	$\frac{-h_{21} z_a}{h_{11} + h z_a}$	$\frac{z_a}{a_{12} + a_{11} z_a}$	$\frac{b z_a}{b_{12} + b_{22} z_a}$	$\frac{c_{22} z_a}{c_{21} + z_a}$	z _a in de uitgang
$\frac{u_1}{i_1}$	$\frac{z + z_{11} z_a}{z_{22} + z_a}$	$\frac{y_{22} z_a + 1}{y z_a + y_{11}}$	$\frac{h_{11} + h z_a}{1 + h_{22} z_a}$	$\frac{a_{12} + a_{11} z_a}{a_{22} + a_{21} z_a}$	$\frac{b_{12} + b_{22} z_a}{b_{11} + b_{21} z_a}$	$\frac{c_{21} + z_a}{c_{12} z_a - c}$	
$\frac{i_2}{u_1}$	$\frac{-z_{21}}{z + z_{11} z_a}$	$\frac{y_{21}}{1 + y_{22} z_a}$	$\frac{h_{21}}{h_{11} + h z_a}$	$\frac{-1}{a_{12} + a_{11} z_a}$	$\frac{-b}{b_{12} + b_{22} z_a}$	$\frac{-c_{22}}{c_{21} + z_a}$	u ₂ = -z _a i ₂
$\frac{u_2}{i_1}$	$\frac{z_{21} z_a}{z_{22} + z_a}$	$\frac{-y_{21} z_a}{y_{11} + y z_a}$	$\frac{-h_{21} z_a}{1 + h_{22} z_a}$	$\frac{z_a}{a_{22} + a_{21} z_a}$	$\frac{b z_a}{b_{11} + b_{21} z_a}$	$\frac{c_{22} z_a}{c_{12} z_a - c}$	
$\frac{i_2}{i_1}$	$\frac{-z_{21}}{z_{22} + z_a}$	$\frac{y_{21}}{y_{11} + y z_a}$	$\frac{h_{21}}{1 + h_{22} z_a}$	$\frac{-1}{a_{22} + a_{21} z_a}$	$\frac{-b}{b_{11} + b_{21} z_a}$	$\frac{c_{22}}{c - c_{12} z_a}$	
$\frac{u_2}{u_1}$	$\frac{z + z_{22} z_e}{z_{12} z_e}$	$\frac{1 + y_{11} z_e}{-y_{12} z_e}$	$\frac{h_{11} + z_e}{h_{12} z_e}$	$\frac{a_{12} + a_{22} z_e}{a z_e}$	$\frac{b_{12} + b_{11} z_e}{z_e}$	$\frac{c_{21} - c z_e}{-c_{11} z_e}$	z _e in de ingang
$\frac{u_2}{i_2}$	$\frac{z + z_{22} z_e}{z_{11} + z_e}$	$\frac{1 + y_{11} z_e}{y_{22} + y z_e}$	$\frac{h_{11} + z_e}{h + h_{22} z_e}$	$\frac{a_{12} + a_{22} z_e}{a_{11} + a_{21} z_e}$	$\frac{b_{12} + b_{11} z_e}{b_{22} + b_{21} z_e}$	$\frac{c_{21} - c z_e}{c_{12} z_e + 1}$	
$\frac{i_2}{u_1}$	$\frac{z_{11} + z_e}{z_{12} z_e}$	$\frac{y_{22} + y z_e}{-y_{12} z_e}$	$\frac{h_{22} z_e + h}{h_{12} z_e}$	$\frac{a_{11} + a_{21} z_e}{a z_e}$	$\frac{b_{22} + b_{21} z_e}{z_e}$	$\frac{1 + c_{12} z_e}{-c_{11} z_e}$	u ₁ = -z _e i ₁
$\frac{u_2}{i_1}$	$\frac{z + z_{22} z_e}{-z_{12}}$	$\frac{1 + y_{11} z_e}{y_{12}}$	$\frac{h_{11} + z_e}{-h_{12}}$	$\frac{a_{12} + a_{22} z_e}{-a}$	$-b_{12} - b_{11} z_e$	$\frac{c_{21} - c z_e}{c_{11}}$	
$\frac{i_2}{i_1}$	$\frac{z_{11} + z_e}{-z_{12}}$	$\frac{y_{22} + y z_e}{y_{12}}$	$\frac{h_{22} z_e + h}{-h_{12}}$	$\frac{a_{11} + a_{21} z_e}{-a}$	$-b_{22} - b_{21} z_e$	$\frac{1 + c_{12} z_e}{c_{11}}$	

	$\left(\frac{u_1}{i_1}\right)_{i_2 = 0}$	Leerlauf eingangs Widerstand
	$\left(\frac{u_1}{i_2}\right)_{i_1 = 0}$	Leerlauf rückwirkungs Widerstand
	$\left(\frac{u_2}{i_1}\right)_{i_2 = 0}$	Leerlauf übertragungs Widerstand
	$\left(\frac{u_2}{i_2}\right)_{i_1 = 0}$	Leerlauf ausgangs Widerstand
	$\left(\frac{i_1}{u_1}\right)_{u_2 = 0}$	Kurzschluss eingangs Leitwert
	$\left(\frac{i_1}{u_2}\right)_{u_1 = 0}$	Kurzschluss rückwirkungs Leitwert
	$\left(\frac{i_2}{u_1}\right)_{u_2 = 0}$	Kurzschluss übertragungs Leitwert
	$\left(\frac{i_2}{u_2}\right)_{u_1 = 0}$	Kurzschluss ausgangs Leitwert
	$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)_{i_2 = 0}$	Leerlauf spannungs Übersetzung vorwärts
	$-\left(\frac{i_2}{i_1}\right)_{u_2 = 0}$	Kurzschluss strom Übersetzung vorwärts
	$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)_{i_1 = 0}$	Leerlauf spannungs Übersetzung rückwärts
	$-\left(\frac{i_2}{i_1}\right)_{u_1 = 0}$	Kurzschluss strom Übersetzung rückwärts