

BACHELOR

Tijdsafhankelijk gedrag in wachtrijen

Ven, van de, P.

Award date:
2005

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Tijdsafhankelijk gedrag in wachtrijen

Peter van de Ven

4 oktober 2005

Samenvatting

In dit verslag worden twee soorten tijdsafhankelijk gedrag in wachtrijen behandeld. Het eerste deel gaat over de manier waarop een wachtrij met constante parameters naar zijn evenwichtstoestand toegaat. In het tweede deel ligt de nadruk op wachtrijen die parameters hebben die afhankelijk zijn van de tijd. Voor dit geval worden een aantal benaderingen voor het gedrag van deze wachtrijen bekeken. Deze benaderingen worden met elkaar vergeleken en afsluitend zijn er een aantal conclusies getrokken over de prestaties van de benaderingen.

1 Inleiding

Tijdsafhankelijk gedrag in wachtrijen is een lastig verschijnsel om te analyseren. Hoewel voor wachtrijen met constante aankomst- en vertrekintensiteit in evenwicht al tientallen jaren gesloten uitdrukkingen bekend zijn voor grootheden zoals de lengte van de wachtrij en de tijd die in het systeem wordt doorgebracht, lukt het niet om dit soort uitdrukkingen te vinden voor wachtrijen die op één of andere manier afhankelijk zijn van de tijd. En dit terwijl in de praktijk toch een groot aantal wachtrijen bestaan waarbij dit tijdsafhankelijk gedrag belangrijk is. Omdat zelfs voor het meest simpele type wachtrij het analyseren ervan lastig of zelfs onmogelijk wordt zodra wordt gekeken naar de afhankelijkheid van de tijd, wordt er steeds meer aandacht gegeven aan het *benaderen* van de eigenschappen van deze wachtrijen.

In dit verslag zullen net zoals in [7] twee verschillende soorten tijdsafhankelijkheid worden behandeld. Allereerst wordt er gekeken naar wachtrijen met constante parameters zoals aankomst- en vertrekintensiteiten. Hoewel bij deze wachtrijen vaak analyse van de evenwichtstoestand volstaat, zijn er ook gevallen waarbij moet worden gekeken naar de wijze waarop dit systeem naar de evenwichtstoestand loopt vanuit een begintoestand, de zogenaamde opstartperiode. In [21] wordt als voorbeeld hiervan genoemd een productieproces waarbij de machine regelmatig kapot gaat. Elke keer als de machine opnieuw wordt opgestart na zijn reparatie maakt hij een opstartperiode door, waarbij het systeem nog niet in de evenwichtstoestand is. Afhankelijk van de soort wachtrij en de parameters hiervan is het mogelijk dat de opstartperiode wel degelijk significante invloed heeft op de prestatie van het systeem.

Om de opstartperiode toch te bestuderen kan natuurlijk het gedrag van een wachtrij altijd worden gesimuleerd of, als de wachtrij een Markovproces is, kunnen de differentiaalvergelijkingen die het systeem beschrijven (numeriek) worden opgelost. Deze methoden kosten echter veel rekenkracht en zijn daarom in veel gevallen niet wenselijk. Daarom zal hier worden gekeken naar een benadering van het gedrag van de wachtrij tijdens de opstartperiode. Ook wordt de *relaxatietijd* bestudeerd, een maat voor de snelheid waarmee het systeem naar de evenwichtstoestand toegaat. Deze relaxatietijd kan onder andere worden gebruikt om te beoordelen of de opstartperiode al dan niet belangrijk is bij de analyse van het systeem.

Bij de tweede soort tijdsafhankelijkheid worden systemen bekeken waarbij de parameters variëren met de tijd. Hierbij wordt dus niet alleen een beginperiode beschouwd zoals bij wachtrijen met constante aankomstintensiteit, maar ook het gedrag op een willekeurig tijdstip tijdens een langere periode. Als voorbeeld hiervan wordt in [21] genoemd de aankomst van vliegtuigen bij een landingsbaan. De aankomstintensiteit van de vliegtuigen varieert met de tijd, met sterke pieken tijdens de ochtend- en avondspits.

Natuurlijk kan ook dit probleem worden aangepakt met behulp van simulatie of in sommige gevallen het oplossen van de bijbehorende differentiaalvergelijkingen. Maar ook hier geldt dat deze aanpakken vaak veel rekenkracht kosten, en dat ook hier beter kan worden gekeken naar benaderingen van het gedrag van de wachtrij.

Een voor de hand liggende aanpak zou misschien zijn om het tijdsafhankelijk zijn van de intensiteiten te negeren en evenwichtstoestand analyse toe te passen. In [11] wordt echter aangetoond dat zelfs voor wachtrijen waarbij de parameters weinig variëren (bijvoorbeeld tot 10% van het gemiddelde) deze benadering slecht kan presteren. Daarom wordt hier gekeken naar een aantal andere benaderingen voor het gedrag van wachtrijen met tijdsafhankelijke aankomst- en vertrekintensiteiten.

Eerst zal kort worden gekeken naar de *pointwise stationary approximation* (PSA). Deze methode is verwant aan de methode die hierboven staat beschreven en kan worden gebruikt om de toestand op tijdstip t te benaderen. De PSA op tijdstip t is de evenwichtsverdeling van een Markovketen met *constante* aankomstintensiteit op tijdstip t .

Vervolgens wordt gekeken naar de *Uniform acceleration expansion* (UA ontwikkeling). Dit is een oneindige reeks voor de verdeling van het aantal klanten in het systeem. De eerste term van de UA ontwikkeling is de PSA. De UA ontwikkeling kan worden gebruikt om te kijken of de PSA een goede benadering is en eventueel als verbetering van de PSA.

Ook wordt er nog een alternatieve versie van de PSA behandeld, de *average pointwise stationary approximation* APSA. Deze methode kan worden gebruikt om prestatiecriteria (zoals gemiddelde aantal klanten in het systeem EQ_∞ of de verwachte in het systeem doorgebrachte tijd, ES_∞) te benaderen voor Markovketens met periodieke aankomstintensiteit. Deze benadering wordt verkregen door het gemiddelde te nemen van de PSA over de periode van de aankomstintensiteit.

De vierde benadering die wordt bekeken is de randomization methode. Hierbij wordt de randomization methode voor wachtrijen met constante parameters aangepast om een benadering te kunnen geven voor wachtrijen met tijdsafhankelijke parameters.

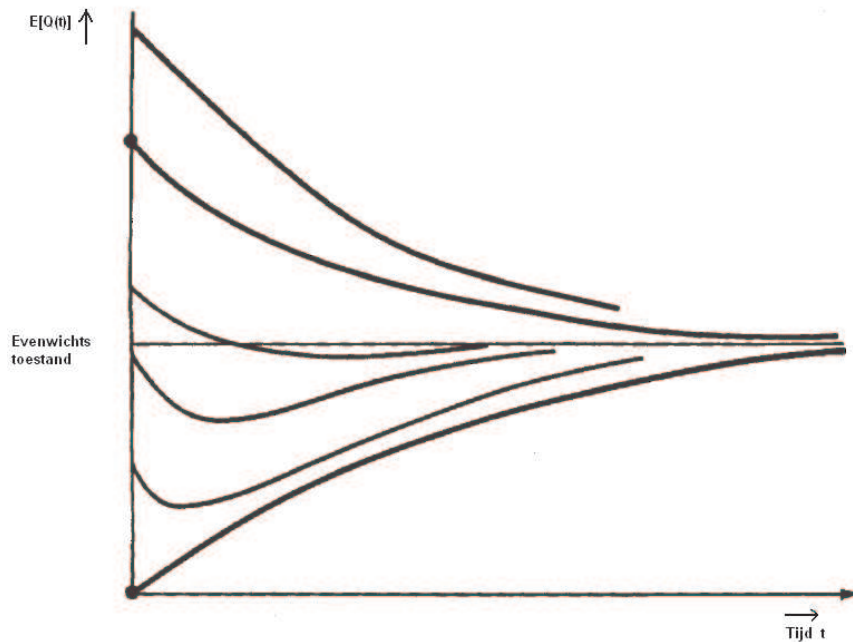
Als laatste benadering wordt gekeken naar de *modified offered load approximation* (MOL benadering). Dit is een benadering voor de verdeling van het aantal klanten in een Erlang verlies systeem (de $M/G/c/c$ wachtrij) met tijdsafhankelijke aankomstintensiteit, genoteerd als $M_t/G/c/c$. Vervolgens zal een aanpassing van de MOL benadering worden besproken die kan worden gedaan om hem geschikt te maken voor netwerken van Erlang verlies systemen. Zowel de UA ontwikkeling als de randomization methode en de MOL benadering zijn benaderingen voor de verdeling van het aantal klanten in het systeem. Omdat de wachtrijen niet-constante parameters hebben kan niet zomaar gebruik worden gemaakt van de formule van Little om bijvoorbeeld de verwachte tijd die in het systeem wordt doorgebracht te berekenen. Daarom wordt ook een versie van de formule van Little besproken die wel voor dit soort rijen geschikt is.

Het bovenstaande kan ook worden toegepast op wachtrijen waarbij de vertrekintensiteit niet-constant is. Dit kan worden gedaan door middel van schaling, zie [7]. De methoden die hier zijn genoemd zijn uiteraard niet alle benaderingsmethoden. Andere methoden zijn de *closure approximation*, zie [23], een *effective arrival rate approximation*, zie [26], *transform inversion techniques* en *Krylov subspace methods*, zie [10] en [25].

De rest van dit verslag ziet er als volgt uit. In §2 wordt de relaxatietijd voor de opstartperiode van rijen met constante aankomst- en vertrekintensiteit bestudeerd en worden vervolgens een aantal benaderingen gegeven voor het gedrag van deze wachtrijen tijdens de opstartperiode. De tweede helft van het verslag zal gaan over rijen met niet-constante parameters. Zo wordt in §3 gekeken naar de PSA benadering en naar de UA benadering. In §4 wordt de APSA behandeld, in §5 de randomization methode en in §6 de MOL benadering. Daarna wordt in §7 de versie van de MOL benadering besproken voor netwerken van Erlang verlies systemen. In §8 wordt iets gezegd over een versie van de formule van Little voor rijen met een niet-constante aankomstintensiteit. Als laatste worden in §9 en §10 verschillende van deze benaderingen vergeleken voor respectievelijk de $M_t/M_t/c(t)$ wachtrij en de $M_t/M/c/c$ wachtrij.

2 De opstartperiode

In deze paragraaf zullen een aantal aspecten van de opstartperiode van een wachtrij met constante aankomst- en vertrekintensiteit worden besproken. Allereerst zullen wat algemene opmerkingen worden gemaakt over de opstartperiode. Daarna wordt gekeken naar de relaxatietijd, een maat voor de snelheid waarmee de wachtrij vanuit een begintoestand naar de evenwichtstoestand toegaat. Dit is voor het grootste gedeelte overgenomen uit Blanc en Van Doorn [5]. Ter afsluiting zullen drie benaderingen worden bekeken voor de wachtrijlengte op tijdstip t van wachtrijen met constante parameters. Deze kunnen worden gebruikt om het gedrag van een wachtrij naar de evenwichtstoestand toe te analyseren. Deze benaderingen zijn van Abate en Whitt [1], Odoni en Roth [21] en Roth [24]



Figuur 1: Het verwachte aantal klanten in een $M/M/1$ rij, uitgezet tegen de tijd en de begintoestand. Bron: [1].

De manier waarop een wachtrij naar zijn evenwichtstoestand toegaat is afhankelijk van de begintoestand van de wachtrij. Dit is goed te zien in figuur 1. Hierin wordt het verwachte aantal klanten $Q(t)$ op tijdstip t gegeven begintoestand n in een $M/M/1$ wachtrij, $m(t, n) := \mathbb{E}[Q(t)|Q(0) = n]$, uitgezet tegen de tijd. De verschillende lijnen corresponderen met verschillende begintoestanden.

Er wordt hierbij door [1] onderscheid gemaakt tussen 3 verschillende soorten krommen, afhankelijk van de begintoestand n . Allereerst is er het geval dat $m(t, n)$ stijgend is voor alle $t > 0$. Dit is alleen zo als $n = 0$. De tweede mogelijkheid is dat $m(t, n)$ eerst dalend is en vervolgens stijgend. Opvallend is dat dit ook het geval is voor sommige n groter dan de evenwichtstoestand $Q(\infty)$. Dit is te verklaren door de observatie dat op tijdstip $t = 0$ voor $n > 0$ er meteen een klant start met zijn bediening. En omdat hier wordt aangenomen dat de aankomstintensiteit kleiner is dan de vertrekintensiteit (anders zou het systeem niet naar een evenwichtstoestand convergeren) daalt het verwachte aantal klanten in het systeem eerst. Voor de derde vorm van $m(t, n)$ geldt dat $m(t, n)$ dalend is voor alle $t > 0$. Dit vindt plaats als het verschil tussen n en de evenwichtstoestand voldoende groot is.

Bij veel wachtrijen verloopt de convergentie naar de evenwichtstoestand exponentieel voor grote t . Zie [21] voor een overzicht van wie voor welk type wachtrij dit heeft bewezen. Dat de convergentie exponentieel is wil zeggen dat, onafhankelijk van de begintoestand, voor grote t het verschil tussen de evenwichtstoestand en de toestand op tijdstip t gedomineerd wordt door een factor $e^{-t/\tau}$. De factor τ is een eigenschap van de wachtrij en wordt de relaxatietijd genoemd. De relaxatietijd van een wachtrij is een indicatie hoe snel de wachtrij naar de evenwichtstoestand convergeert. Hierbij geldt dat de convergentie langzamer verloopt als de relaxatietijd groter is. Cohen [8] definieert relaxatietijd als volgt

$$\tau(f) := \inf\{T | f(t) - f(\infty) = O(e^{-t/T}), t \rightarrow \infty\}. \quad (1)$$

Hierbij is f een prestatie criterium om de convergentie aan af te meten. In figuur 1 is bijvoorbeeld het verwachte aantal klanten in het systeem gegeven een begintoestand als criterium genomen. Er zijn ook andere prestatiecriteria mogelijk zoals $f_0(t) := \mathbb{P}[Q(t) = 0 | Q(0) = 0]$ of $f_E(t) := \mathbb{E}[Q(t) | Q(0) = 0]$. Er zijn aanwijzingen, zoals *Kingman's solidarity theorems*, [17] en [18], dat een aantal verschillende prestatiecriteria dezelfde relaxatietijd geven.

Gebruikmakend van de definitie van Cohen hebben Blanc en Van Doorn [5] voor een groot aantal

wachtrijen de relaxatietijd berekend. Een aantal daarvan zullen hier worden genoemd, voor een uitgebreider overzicht zie [5] of [7].

$M/M/1$

Voor een $M/M/1$ rij geldt:

$$\mathbb{P}[Q(t) = 0|Q(0)] - \mathbb{P}[Q(\infty) = 0] = e^{-t/\tau}(t/\tau)^{-3/2}[A + O(\frac{1}{t})], \quad t \rightarrow \infty, \quad (2)$$

waarbij

$$\tau := \frac{1}{(\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda})^2} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{(1 - \sqrt{\rho})^2}. \quad (3)$$

Dus voor een $M/M/1$ wachtrij is de relaxatietijd gelijk aan de uitdrukking in (3).

$M/M/\infty$

Voor een $M/M/\infty$ rij geldt:

$$\mathbb{P}[Q(t) = 0|Q(0)] - \mathbb{P}[Q(\infty) = 0] = e^{-\rho} \rho e^{-t/\mu} [1 + O(1)], \quad t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Dus voor een $M/M/\infty$ rij is de relaxatietijd gelijk aan μ .

Behalve kijken naar de relaxatietijd van een wachtrij om een gevoel te krijgen hoe snel deze naar de evenwichtstoestand toegaat, kan het verschil tussen de toestand op tijdstip t van een wachtrij en de evenwichtstoestand ook worden *benaderd*. Zo stellen Odoni en Roth [21] voor om als benadering voor het aantal klanten in een $G/G/1$ rij te nemen:

$$\mathbb{E}[Q(t)|Q(0) = 0] - \mathbb{E}Q[\infty] \approx C e^{-t/\tau}, \quad t \geq 2\tau, \quad (5)$$

waarbij:

$$\tau := \frac{c_A^2 + c_B^2}{2.8\mu(1 - \sqrt{\rho})^2}. \quad (6)$$

Hierbij is $1/\mu$ de verwachte bedieningstijd en zijn c_A^2 en c_B^2 de variatiecoëfficiënten van respectievelijk het aankomst- en het bedieningsproces. Deze benadering is gekozen op een aantal intuïtieve argumenten. Zo lijkt het dat hoe groter de variatiecoëfficiënten zijn, hoe groter de relaxatietijd is, vandaar de term $c_A^2 + c_B^2$ in de teller van τ . Ook ligt het voor de hand dat naarmate ρ dichter bij 1 komt, de relaxatietijd van het systeem groter wordt. Daarom staat er een term $1 - \sqrt{\rho}$ in de noemer. De factor 2.8 bij de definitie van τ is toegevoegd om de benadering het beste bij numerieke resultaten te laten passen.

In [24] stelt Roth de volgende benadering voor:

$$\mathbb{E}[Q(t)|Q(0) = 0]_{G/G/1} \approx \frac{\mathbb{E}Q(\infty)_{G/G/1}}{\mathbb{E}Q(\infty)_{M/M/1}} \mathbb{E}[Q(\frac{\tau_{M/M/1}}{\tau_{G/G/1}} t)|Q(0) = 0]_{M/M/1}, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Merk op dat deze vergelijking voldoet aan de uitdrukking in (5). Hierbij wordt dus gebruik gemaakt van het feit de $\mathbb{E}(Q(t)|Q(0) = 0)_{M/M/1}$ expliciet bekend is.

Een derde benadering is van Abate en Whitt [1]:

$$\mathbb{E}[Q(t)|Q(0) = 0] - \mathbb{E}Q(\infty) \approx b(\rho)e^{-t/a(\rho)}. \quad (8)$$

Hierbij geldt:

$$\begin{aligned} a(\rho) &= 2(1 - \rho)^{-2}c(\rho), \\ b(\rho) &= \rho(1 - \rho)^{-1}(1 + 2c(\rho))^{-1}, \\ c(\rho) &= \frac{2 + \rho + (5 - (1 - \rho)(5 + \rho))^{-1/2}}{4}. \end{aligned}$$

Deze benaderingen lijkt sterk op die uit vergelijking (5) en werkt goed voor ρ niet te klein, dus bijvoorbeeld $\rho \geq 1/2$ en $t \geq 2(1 - \rho)^{-2}$.

3 De uniform acceleration expansion

In deze paragraaf wordt, in tegenstelling tot §2, gekeken naar wachtrijen met parameters die afhankelijk zijn van de tijd.

Een veel voorkomende en erg intuïtieve benadering voor de toestand van een wachtrij met niet-constante parameters is de *pointwise stationary approximation* (PSA). Zo wordt de PSA van een $M_t/M/c$ wachtrij met aankomstintensiteit $\lambda(t)$ en vertrekintensiteit μ op tijdstip t verkregen door te kijken naar de evenwichtstoestand van een $M/M/c$ wachtrij met *constante* aankomstintensiteit $\lambda(t)$ en vertrekintensiteit μ . Uit de toestand van de wachtrij op tijdstip t kunnen natuurlijk ook prestatiecriteria worden benaderd zoals de verwachte wachtrijlengte of de blokkeringskans van een Erlang verlies systeem.

De PSA is niet alleen bruikbaar bij $M_t/M/c$ wachtrijen, maar voor alle Markovketens, dus ook bijvoorbeeld voor $M_t/M/c/c$ rijen. Voor een Markovketen met overgangsmatrix $\{\mathbf{A}(t) : t \geq 0\}$ wordt de PSA van de toestand van de wachtrij op tijdstip t gegeven door de oplossing $\pi(t)$ van de vergelijkingen $\pi(t)\mathbf{A}(t) = 0$ en $\pi(t)\mathbf{1}^T = 1$, waarbij $\mathbf{1}$ de vector is van allemaal 1-en. In [27] bewijst Whitt dat de PSA asymptotisch correct is voor de aankomst- en vertrekintensiteit naar oneindig, als de belasting van het systeem constant wordt gehouden.

In [20] bekijken Massey en Whitt een manier om de prestatie van de PSA te evalueren en eventueel te verbeteren. Om dit te doen wordt de *uniform acceleration (UA) asymptotic expansions* ingevoerd. Dit is een oneindige reeks die asymptotisch correct is voor de toestand van de Markovketen

$$\mathbf{p}(\tau, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \pi^{(n)}(\tau), \quad \epsilon \downarrow 0. \quad (9)$$

Hierbij is \mathbf{p} de kansverdeling van het Markovproces op tijdstip t en wordt $\pi^{(n)}$ gegeven door

$$\pi^{(k)}(t)\mathbf{A}(t) = \mathbf{y}^{(k)}(t), \quad (10)$$

waarbij geldt

$$\mathbf{y}^{(0)}(t) = 0 \quad \text{en} \quad \pi^{(0)}(t)\mathbf{1}^T = 1, \quad (11)$$

$$\mathbf{y}^{(k)}(t) = \frac{d}{dt} \pi^{(k-1)}(t) \quad \text{en} \quad \pi^{(k)}(t)\mathbf{1}^T = 0 \quad \text{voor} \quad k \geq 1. \quad (12)$$

Er is helaas geen gesloten uitdrukking voor $\pi^{(k)}$ te vinden. Hierdoor is de UA expansion niet in deze vorm te gebruiken. Als bij formule (9) echter $\epsilon = 1$ wordt gekozen en maar over $n + 1$ termen wordt gesommeerd (de reeks convergeert niet voor $\epsilon = 1$) dan geeft dit de benadering

$$\mathbf{p}(t) \approx \sum_{k=0}^n \pi^{(k)}(t). \quad (13)$$

Dit heet de UA benadering. Uit formule (10) en (11) volgt dat de PSA de eerste term van de UA benadering is. Het is vrij gemakkelijk om de eerste paar termen van de reeks te berekenen. Het berekenen van hogere orde termen wordt door Massey en Whitt afgeraden omdat deze gevoelig zijn voor fouten. Massey en Whitt geven aan dat, hoewel het berekenen van de eerste 2 of 3 termen van de reeks niet altijd een goede benadering geeft, deze termen wel een indicatie zijn voor hoe goed de benadering is. Namelijk als deze termen snel kleiner worden, zal de benadering die ze geven scherp zijn.

Zo kan bijvoorbeeld worden gekeken naar de eerste paar termen van de UA benadering voor de $M_t/M/1$ wachtrij met belasting $\rho(t)$. Voor de verwachte wachtrijlengte $\mathbb{E}Q_t$ geldt bijvoorbeeld voor de eerste twee termen van de benadering:

$$\mathbb{E}Q_t = \frac{\rho(t)}{1 - \rho(t)} - \rho'(t) \frac{1 + \rho(t)}{\mu(t)(1 - \rho(t))^4}. \quad (14)$$

De eerste term van (14) is natuurlijk de PSA. Opvallend aan de tweede term is de factor $\mu(t)(1 - \rho(t))^4$ in de noemer. Hieruit blijkt dat als de belasting groot is, en dus $1 - \rho(t)$ klein, de tweede term van de

UA benadering heel groot is. Dit geeft aan dat voor deze wachtrij de PSA een slechte benadering is als de belasting hoog is.

Voor een uitgebreidere bespreking van de UA benadering, zie Boxma en Denisov [7] of Massey en Whitt [20].

4 De gemiddelde pointwise stationary approximation voor wachtrijen met cyclische aankomstintensiteit

Naar aanleiding van de PSA, die kort werd besproken in §3, hebben Green en Kolesar [12] een benadering geconstrueerd voor de gemiddelde prestatiecriteria op lange termijn voor wachtrijen waarbij het aankomstproces verloopt volgens een Poissonproces en waarbij de aankomstintensiteit cyclisch varieert in de tijd. Deze benadering wordt door Green en Kolesar [12] en Whitt [27] ook PSA genoemd, maar om verwarring te voorkomen zal hij hier de *average pointwise stationary approximation* (APSA) worden genoemd. De APSA bestaat uit een gewogen gemiddelde van het prestatie criterium op elk punt in de tijd, genomen over de periode van de aankomstintensiteit, dat zou ontstaan als het systeem op dat moment in evenwicht zou zijn. Dus hoewel de PSA een functie is van de tijd, is de APSA dat niet.

Green en Kolesar gaan uit van een $M_t/M/c$ wachtrij waarbij de aankomstintensiteit zich gedraagt als een sinusoïde. Aangenomen wordt dat

$$\bar{\lambda} := \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t) dt < c\mu, \quad (15)$$

waarbij T de periode van de aankomstintensiteit is, $\lambda(t)$ de aankomstintensiteit op tijdstip t is en μ de vertrekintensiteit. vergelijking (15) wordt geïst om ervoor te zorgen dat de belasting van het systeem niet te hoog wordt. $p_n(t)$ wordt gedefinieerd als de kans dat op tijdstip t er n klanten in het systeem zijn. Green en Kolesar beschouwen nu 4 verschillende prestatiecriteria, namelijk de gemiddelde wachtrijlengte (dus zonder de klanten die bediend worden) per periode L_q , de gemiddelde tijd dat een klant moet wachten W_q , de gemiddelde kans dat er een klant aankomt die moet wachten op bediening p_d en de gemiddelde kans dat alle bedienden bezig zijn p_b . Deze grootheden worden gegeven door

$$L_q := \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{n=c}^{\infty} (n-c) p_n(t) \right) dt, \quad (16)$$

$$W_q := \frac{L_q}{\bar{\lambda}}, \quad (17)$$

$$p_d := \frac{1}{\bar{\lambda}T} \int_0^T \lambda(t) \left(1 - \sum_{n=0}^{c-1} p_n(t) \right) dt \quad \text{en} \quad (18)$$

$$p_b := \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \sum_{n=0}^{c-1} p_n(t) \right) dt. \quad (19)$$

De APSA benaderingen van deze grootheden worden genoteerd als L_q^∞ , W_q^∞ , p_d^∞ en p_b^∞ en worden als volgt gedefinieerd:

$$L_q^\infty := \frac{1}{T} \int_0^T L_q(\lambda(t)) dt, \quad (20)$$

$$W_q^\infty := \frac{1}{\bar{\lambda}T} \int_0^T \lambda(t) W_q(\lambda(t)) dt, \quad (21)$$

$$p_d^\infty := \frac{1}{\bar{\lambda}T} \int_0^T \lambda(t) p_d(\lambda(t)) dt, \quad (22)$$

$$p_b^\infty := \frac{1}{T} \int_0^T p_b(\lambda(t)) dt. \quad (23)$$

Hierbij zijn $W_q(\lambda(t))$, $L_q(\lambda(t))$, $p_d(\lambda(t))$ en $p_b(\lambda(t))$ de verwachte wachtrijlengte, de verwachte tijd dat een klant moet wachten, de verwachte kans dat een klant moet wachten en de verwachte kans dat alle bedienden

bezig zijn, in een $M/M/c$ wachtrij met *constante* aankomstintensiteit $\lambda = \lambda(t)$ en vertrekintensiteit μ . Dit is de PSA benadering van deze grootheden.

Voor een $M/M/1$ wachtrij geldt bijvoorbeeld dat $L_q^\infty = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\frac{\lambda(t)}{\mu}}{1 - \frac{\lambda(t)}{\mu}} dt$.

In [13] hebben Green en Svoronos empirisch bepaald dat als

$$\rho_{max} := \sup_t \frac{\lambda(t)}{c\mu} < 1, \quad (24)$$

dus als de maximale belasting kleiner is dan 1, dan

$$W_q \leq W_q^\infty \quad \text{en} \quad L_q \leq L_q^\infty. \quad (25)$$

In [12] kijken Green en Kolesar vervolgens hoe goed de APSA de prestatiecriteria benadert. Zo concluderen zij dat als de periode van de aankomstintensiteit groter wordt, de APSA van alle vier de genoemde prestatiecriteria beter wordt. Ook is het zo dat hogere vertrekintensiteiten een positief effect hebben op de prestatie van de APSA voor alle prestatiecriteria.

Voor de gemiddelde vertraging en gemiddelde wachtrijlengte geldt dat de APSA hiervan slechter wordt naarmate de maximale belasting hoger wordt. Zodra deze waarde groter wordt dan of gelijk is aan 1 geeft de APSA geen eindige waarden. Ook geldt voor alle vier de benaderingen dat de APSA beter wordt naarmate de intensiteiten hoger worden met ρ constant. In [27] bewijst Whitt dat de APSA asymptotisch correct is als de intensiteiten naar oneindig gaan met ρ constant.

Green en Kolesar [12] raden aan de APSA te gebruiken als de vertrekintensiteit groter is dan 2 en de maximale belasting kleiner dan 0.83. Voor nog hogere vertrekintensiteit zoals bijvoorbeeld $\mu = 20$ is de APSA zelfs nog voor hogere waarden van ρ_{max} goed.

5 Randomization

Randomization (of uniformization) is een methode om de overgangskansen van een Markovproces te benaderen. Deze kan dus worden gebruikt om, gegeven een begintoestand, de toestand van bijvoorbeeld een $M/M/1$ of $M/M/c/c$ rij op tijdstip t te benaderen. De methode is toe te schrijven aan [16] en [9] en is bedoeld voor wachtrijen met constante aankomst- en vertrekintensiteiten. Met enkele aanpassingen kan deze ook worden gebruikt voor wachtrijen met niet constante parameters.

In [22] wordt de randomization methode voor wachtrijen met constante parameters behandeld. Laat $\{X(t) | t \geq 0\}$ een Markovproces zijn waarbij voor elke toestand i de totale intensiteit uit die toestand gelijk is aan $v_i = v$. De tijd die er gemiddeld wordt doorgebracht is dus gelijk aan $\frac{1}{v}$. Dan geldt dat $N(t)$, het aantal overgangen tussen toestanden tot tijdstip t , een Poisson process is met parameter v . Voor de overgangskans $P_{ij}(t)$ geldt dan door conditioneren op $N(t)$

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) = \mathbb{P}[X(t) = j | X(0) = i] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[X(t) = j | X(0) = i, N(t) = n] e^{-vt} \frac{(vt)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n e^{-vt} \frac{(vt)^n}{n!}, \end{aligned} \quad (26)$$

waarbij P_{ij} de overgangskans is van de bijbehorende Markovketen en P_{ij}^n de n -staps kans. Door de som af te kappen kan deze uitdrukking worden gebruikt om de toestand van een wachtrij op tijdstip t te benaderen.

Deze methode kan ook worden gebruikt voor Markovketens die niet dezelfde intensiteit uit elke toestand hebben. Dit wordt gedaan door denkbeeldige overgangen van een toestand naar zichzelf toe te staan. Bekijk om dit te doen een Markovproces waarbij de intensiteiten v_i uit elke toestand eindig zijn en kies een v waarvoor geldt

$$v_i \leq v \quad \text{voor alle } i. \quad (27)$$

Als het proces nu in toestand i is dan verlaat het i met intensiteit v_i . Dit is echter equivalent met zeggen dat, hoewel toestand i met intensiteit v wordt verlaten, maar v_i/v van de overgangen echt zijn. De overige

$1 - v_i/v$ overgangen zijn denkbeeldige overgangen naar zichzelf. De overgangskansen P_{ij}^* van dit aangepaste Markovproces worden dus gegeven door

$$P_{ij}^* = \begin{cases} 1 - \frac{v_i}{v}, & j = i \\ \frac{v_i}{v} P_{ij}, & j \neq i. \end{cases} \quad (28)$$

Gecombineerd met vergelijking (26) geeft dit dat

$$P_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{*n} e^{-vt} \frac{(vt)^n}{n!}. \quad (29)$$

Hierbij is P_{ij}^{*n} de n -staps overgangskans van de Markovketen waarvan de kansen worden gegeven in (28). Om vergelijking (29) te kunnen gebruiken moeten twee waarden benaderd worden: de plaats waar de reeks wordt afgekapt en, als de toestandsruimte oneindig is, de plaats waar deze moet worden afgekapt. In [9] stelt Grassmann voor alleen tot term $m = \lceil vt + 5\sqrt{vt} + 4.9 \rceil$ te sommeren.

In [14] wordt deze methode ook gebruikt voor een $M_t/M/c(t)$ rij met *niet-constante* aankomst- en vertrekintensiteiten. Hierbij wordt rekening gehouden met het feit dat dit een Markovproces met *niet-constante* aankomstintensiteit is door de aankomstintensiteit $\lambda(t)$ te benaderen met een stuksgewijs constante functie $\tilde{\lambda}(t)$. De aangepaste overgangskans P_{ij}^* wordt dan gegeven door

$$P_{ij}^*(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{\lambda}(t)}{v}, & j = i + 1 \\ 1 - \frac{\tilde{\lambda}(t) + \min(i,c)\mu}{v}, & j = i \\ \frac{\min(i,c)\mu}{v}, & j = i - 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \quad (30)$$

Deze methode is zonder veel aanpassingen ook bruikbaar om de toestand van een $M_t/M/c/c$ rij te benaderen. Voor een uitgebreidere uitleg hierover zie §10.

6 De modified offered load benadering voor een Erlang verlies systeem

Een bekend resultaat uit de wachtrijtheorie is de *Erlang blokkeringsformule*. Deze zegt dat de kans dat in een $M/G/c/c$ wachtrij (het Erlang verlies systeem) alle bedienden bezet zijn voldoet aan

$$\mathbb{P}[Q_c(\infty) = c] = \frac{e^{-\rho} \rho^c / c!}{\sum_{j=0}^c e^{-\rho} \rho^j / j!} = \frac{\rho^c / c!}{\sum_{j=0}^c \rho^j / j!} =: \beta_c(\rho). \quad (31)$$

Hierbij is $Q_c(\infty)$ het aantal bezette bedienden in het systeem in evenwicht. Verder geldt dat $\rho = \lambda \mathbb{E}B$ de belasting van het systeem is, met $\mathbb{E}B$ de verwachte bedieningstijd. Het is nooit gelukt om een zelfde soort formule te vinden voor de $M_t/G/c/c$ wachtrij, een Erlang verlies systeem met niet-constante aankomstintensiteit.

Er is echter wel een exacte oplossing voor de verdeling van het aantal bezette bedienden op een willekeurige tijd in de $M_t/G/\infty$ wachtrij (het Erlang verlies systeem met oneindig veel bedienden), namelijk

$$\mathbb{P}[Q_\infty(t) = k] = e^{-m_\infty(t)} \frac{(m_\infty(t))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (32)$$

met

$$m_\infty(t) := \mathbb{E}\left[\int_{t-B}^t \lambda(u) du\right]. \quad (33)$$

Hier is m_∞ het verwachte aantal aankomsten tussen het tijdstip t en één bedieningstijd daarvoor. Dit is een maat voor de belasting van het systeem. Merk op dat als hierbij $\lambda(u)$ constant wordt genomen, dus $\lambda(u) = \lambda$, er geldt dat $m_\infty(t) = \lambda \mathbb{E}B$.

De exacte oplossingen voor de $M/G/c/c$ en de $M_t/G/\infty$ wachtrij zijn door Jagerman [15] gebruikt om

de modified offered load (MOL) benadering te formuleren voor de $M_t/G/c/c$ wachtrij. Voor deze benadering wordt in (31), de uitdrukking voor het niet tijdsafhankelijke Erlang verlies systeem, de belasting ρ vervangen door $m_\infty(t)$ uit (32). De MOL benadering voor de $M_t/M/c/c$ wordt dus gegeven door

$$\mathbb{P}[Q_c(t) = c] \approx \beta_c(m_\infty(t)) = \frac{\frac{(m_\infty(t))^c}{c!}}{\sum_{j=0}^c \frac{(m_\infty(t))^j}{j!}} = \mathbb{P}[Q_\infty(t) = c | Q_\infty(t) \leq c]. \quad (34)$$

Massey en Whitt [19] hebben ook naar deze MOL benadering gekeken. Zij leveren hiervoor een theoretische basis en foutafschattingen. Zo leiden ze af voor de $M_t/G/c/c$ wachtrij dat

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbb{P}[Q_c(\tau) = c] - \beta_c(m_\infty(\tau))| \leq 2 \int_0^t \beta_c(m_\infty(\tau)) \left| \frac{dm_\infty(\tau)}{d\tau} \right| d\tau. \quad (35)$$

Dit is een afchatting van de grootste fout op het interval $(0, t)$ tussen de MOL benadering van de kans op een vol systeem en de echte waarde. Hierbij is de $\beta_c(m_\infty(\tau))$ de waarde van de MOL benadering op tijdstip τ en $\frac{dm_\infty(\tau)}{d\tau}$ de afgeleide van de $m_\infty(t)$ uit vergelijking (33). Voor de $M_t/M/c/c$ geldt volgens [19] zelfs dat

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbb{P}[Q_c(\tau) = c] - \beta_c(m_\infty(\tau))| \leq 2 \int_0^t \beta_c(m_\infty(\tau))(1 - \beta_c(m_\infty(\tau))) \left| \frac{dm_\infty(\tau)}{d\tau} \right| d\tau. \quad (36)$$

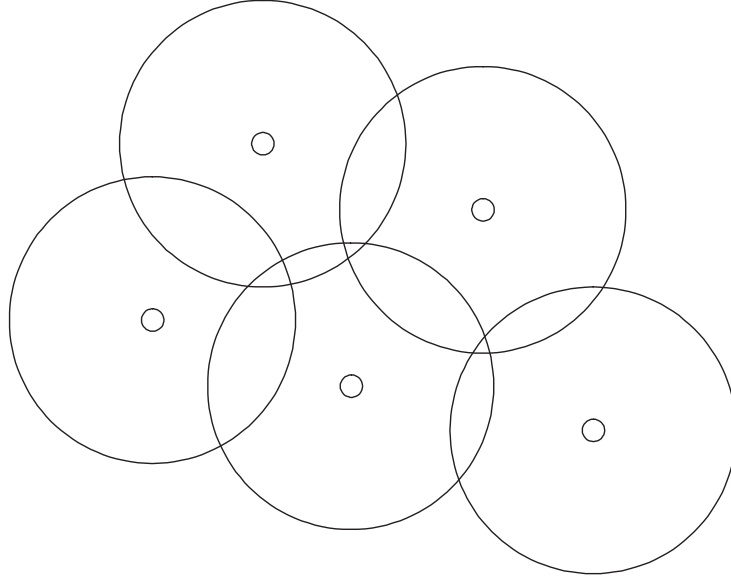
7 De modified offered load benadering voor netwerken van Erlang verlies systemen

In [2] beschrijven Abdalla en Boucherie een andere toepassing voor de MOL benadering. Deze benadering is niet bedoeld voor een Erlang verlies systeem zoals in §6, maar voor *netwerken* van Erlang verlies systemen. Deze netwerken kunnen worden gebruikt om bijvoorbeeld GSM netwerken of andere mobiele communicatie te modelleren. De MOL benadering zal net zoals bij §6 worden gebruikt om de kans te berekenen dat een van de Erlang verlies systemen in het netwerk vol zit. Allereerst zal echter worden gekeken naar de werking van een mobiel communicatienetwerk en de modellering daarvan met behulp van een netwerk van verlies systemen.

Een mobiel communicatienetwerk bestaat uit basisstations waarmee bijvoorbeeld een GSM verbinding kan maken. Een basisstation heeft echter een beperkt gebied waarin het bereikbaar is, de cel van dat station genoemd. De basisstations worden zo neergezet dat overal een basisstation is waarmee contact kan worden gemaakt, zie figuur 2.

Een eigenschap van een mobiel netwerk is dat een gebruiker van cel kan wisselen, bijvoorbeeld als de gebruiker over een weg rijdt en zo uit de cel van een basisstation gaat. Een basisstation kan echter maar een beperkt aantal gebruikers tegelijk aan. Als een gebruiker contact wil maken met een basisstation, maar dit lukt niet omdat op dat moment geen capaciteit is voor nieuwe gebruikers, is er sprake van *oproepblokkering* en wordt de cel *geblokkeerd* genoemd. Er zijn twee soorten oproepblokkering. Allereerst is er het type dat net is beschreven, namelijk *handover blokkering*. Dit vindt plaats als een gebruiker van het ene naar het andere basisstation wil gaan, maar hier niet in slaagt omdat dat basisstation geen nieuwe gebruikers meer kan verwerken. De andere soort oproepblokkering vindt plaats als een nieuwe gebruiker, die nog geen contact heeft gehad met een ander basisstation en een zogenaamde *nieuwe oproep* is, geen contact kan krijgen. Dit heet *nieuwe oproep blokkering*. Het komt ook voor dat een geblokkeerde gebruiker opnieuw contact probeert te maken met een basisstation. Zolang hij in dezelfde cel blijft zitten zal dit niet lukken. Zodra hij echter naar een aangrenzende cel gaat kan hij wel contact maken met dit basisstation. Dit resulteert in een *redial rate* voor de burens van een geblokkeerde cel.

Bij het model uit [2] wordt gekeken naar mobiele communicatienetwerken waarbij de gebruikers die geblokkeerd zijn opnieuw contact proberen te maken. Ook wordt in het model rekening gehouden met tijdsafhankelijke aankomstintensiteit van de gebruikers. (Dit is de reden waarom de MOL benadering wordt gebruikt). In de praktijk ontstaat dit verschil in aankomstintensiteit bijvoorbeeld door het verschil in het aantal bellers dag en nacht. Een andere oorzaak hiervan is het spitsuur, waardoor meer gebruikers in één bepaalde cel zitten dan op andere tijdstippen.



Figuur 2: Een GSM netwerk met 5 basisstations.

Er wordt een netwerk van N basisstations bekeken. De toestand van dit netwerk wordt aangegeven met de vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ waarbij n_i het aantal gebruikers aangeeft dat contact heeft met het i^e basisstation. De toestanden \mathbf{n} worden beperkt door bijvoorbeeld de capaciteit van de basisstations en de verzameling van toegestane toestanden kan worden geschreven als

$$S_s = \{\mathbf{n} : \mathbf{A}\mathbf{n} \leq \mathbf{s}\}. \quad (37)$$

Hierbij is A een $d \times N$ matrix en is \mathbf{s} een vector van grootte d , waarbij d het aantal beperkingen is. De nieuwe oproepen bij het i^e basisstation komen aan volgens een niet-homogeen Poisson proces met intensiteit $\lambda_i(t)$. Deze gebruikers worden toegelaten als $\mathbf{n} + \mathbf{e}_i \in S_s$. Als dit niet het geval is worden deze gebruikers uit het systeem verwijderd en is sprake van nieuwe oproep blokkering. Een gebruiker die niet geblokkeerd wordt blijft vervolgens een exponentieel verdeelde tijd met parameter μ_i in het systeem zitten. Als deze tijd om is zal de gebruiker met kans $p_{ik}(t)$ proberen contact te maken met het k^e basisstation (dit geeft dus een gebruiker die zich van de ene naar de andere cel beweegt weer) en met kans $p_{i0}(t) = 1 - \sum_{k=1}^N p_{ik}(t)$ zal de gebruiker helemaal uit het systeem verdwijnen. (Dan beëindigt de klant dus zelf het contact). Een overgang tussen basisstations i en k heet succesvol als geldt dat $\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \in S_s$. Als dit niet zo is wordt de gebruiker uit het systeem verwijderd. Maar omdat deze gebruikers opnieuw contact proberen te maken resulteert dit voor de aan station k grenzende basisstations j in een extra aankomstproces met intensiteit $r_{kj}(t)$. Voor meer informatie over een mobiel netwerk of de modellering ervan zie [2] of [6].

De bovenstaande beschrijving resulteert in een Markovproces $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ dat het aantal gebruikers per basisstation beschrijft. De toestandsruimte van het proces is gegeven door (37) en de overgangsintensiteiten $\mathbf{Q}(t) = (q(\mathbf{n}, \mathbf{n}', t), \mathbf{n}, \mathbf{n}' \in S_s)$ worden gegeven door

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n}', t) = \begin{cases} \lambda_i(t), & \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_i \\ n_i \mu_i(t) p_{i0}(t), & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i \text{ en } \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \in S_s \quad \forall k \\ n_i \mu_i(t) p_{ik}(t), & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \\ n_i \mu_i(t) (p_{ik}(t) + p_{i0}(t)), & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i \text{ en } \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \notin S_s \\ r_{kj}(t), & \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_j \text{ en } \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin S_s. \end{cases} \quad (38)$$

Hierbij stelt het eerste geval de gebeurtenis voor dat een gebruiker aankomt bij het i^e basisstation. Het tweede geval staat voor de gebeurtenis dat een gebruiker van het i^e basisstation uit het systeem gaat omdat zijn gesprek klaar is. Het derde geval staat voor de gebeurtenis dat een gebruiker van het i^e basisstation naar het k^e basisstation gaat, het vierde geval voor de gebeurtenis dat een gebruiker het systeem verlaat óf omdat hij naar het k^e station wil, maar deze geen nieuwe gebruikers meer kan verwerken, óf omdat zijn gesprek klaar is (en het k^e basisstation geen nieuwe gebruikers kan verwerken). De laatste intensiteit stelt

de *redial rate* voor van gebruikers in het k^e basisstation die worden geblokkeerd.

De kans op toestand \mathbf{n} op tijdstip t wordt nu gegeven door:

$$P(\mathbf{n}, t) := \mathbb{P}[X(t) = \mathbf{n}], \quad \mathbf{n} \in S_s, t \geq 0.$$

Helaas is het net zoals bij het enkele Erlang verlies systeem uit §6 niet mogelijk om een uitdrukking voor deze kans te geven. Daarom is het tevens niet mogelijk om een uitdrukking te vinden voor de blokkeringskans voor nieuwe oproepen. Voor cel i is dit de kans dat het Markovproces zich in een toestand bevindt waarvoor geldt dat een nieuwe gebruiker voor cel i zal worden geblokkeerd. Deze kans wordt gegeven door:

$$\beta_i(t) := \sum_{\mathbf{n} \in T_i} P(\mathbf{n}, t), \quad t \geq 0, \quad (39)$$

waarbij $T_i = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} \in S_s, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i \notin S_s\}$. Deze kans kan echter wel worden benaderd met de MOL benadering. Ook nu weer wordt gebruik gemaakt van het Erlang verlies systeem met oneindig veel bedienden, maar dan in een netwerk met N van deze rijen. Ook hiervan is namelijk de verdeling van het aantal klanten bekend. Noem deze Markovketen \mathbf{X}^∞ en laat $S^\infty = \{\mathbf{n} : n_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$ de bijbehorende toestandsruimte zijn. Dan geldt voor de overgangssintensiteiten

$$q^\infty(\mathbf{n}, \mathbf{n}', t) = \begin{cases} \lambda_i(t), & \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_i \\ n_i \mu_i(t) p_{i0}(t), & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i \\ n_i \mu_i(t) p_{ik}(t), & \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k. \end{cases} \quad (40)$$

De kans op \mathbf{n} klanten $P^\infty(\mathbf{n}, t)$ op tijdstip t is nu volgens [2] multidimensionaal Poisson verdeeld:

$$P^\infty(\mathbf{n}, t) = \mathbb{P}[X^\infty(t) = \mathbf{n}] = \prod_{i=1}^N \frac{c_i(t)^{n_i}}{n_i!} e^{-c_i(t)}, \quad (41)$$

waarbij $\{c_i, i = 1, \dots, N\}$ de oplossing is van het stelsel *traffic equations*:

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^N c_k(t) \mu_k(t) p_{ki}(t) - \mu_i(t) c_i(t), \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (42)$$

De MOL benadering $P^*(\mathbf{n}, t)$ van $P(\mathbf{n}, t)$ wordt gegeven door

$$P(\mathbf{n}, t) \approx \mathbb{P}[X^\infty(t) = \mathbf{n} | X^\infty(t) \in S_s] =: P^*(\mathbf{n}, t), \quad \mathbf{n} \in S_s. \quad (43)$$

Deze formule is vergelijkbaar met die voor een enkel Erlang verlies systeem, zie (34). Nu de MOL benadering voor deze kans bekend is kan ook een benadering voor de blokkeringskans, $\beta_i^*(t)$ worden gegeven.

$$\beta_i(t) = \sum_{\mathbf{n} \in T_i} P(\mathbf{n}, t) \approx \sum_{\mathbf{n} \in T_i} P^*(\mathbf{n}, t) = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in T_i} \prod_{l=1}^N c_l(t)^{n_l} / n_l!}{\sum_{\mathbf{n} \in S_s} \prod_{j=1}^N c_j(t)^{n_j} / n_j!} =: \beta_i^*(t), \quad t \geq 0. \quad (44)$$

Naast oproepblokkering speelt ook *handover blocking* een rol. De MOL benadering van de kans dat een gebruiker die van basisstation i wisselt naar basisstation k wordt geblokkeerd wordt gegeven door

$$\beta_{ik}^*(t) = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in T_{ik}} \prod_{l=1}^N c_l(t)^{n_l} / n_l!}{\sum_{\mathbf{n} \in U_i} \prod_{j=1}^N c_j(t)^{n_j} / n_j!}, \quad t \geq 0, \quad (45)$$

waarbij $T_{ik} = \{\mathbf{m} : \mathbf{m} \in S_s, \mathbf{m} + \mathbf{e}_i \in S_s, \mathbf{m} + \mathbf{e}_k \notin S_s\}$ en $U_i = \{\mathbf{m} : \mathbf{m} \in S_s, \mathbf{m} + \mathbf{e}_i \in S_s\}$.

In [2] wordt ook gekeken naar de fout van de MOL benadering. De fout van de benadering van de blokkeringskans wordt bepaald door de fout in de benadering van de kans op een bepaalde toestand, zie (43). De manier waarop deze fout wordt afgeschat lijkt heel veel op de manier waarop de foutafschatting uit formule (36) tot stand is gekomen.

$$\sup_{\tau \leq t} |\mathbf{P}^*(\tau) - \mathbf{P}(\tau)| \leq 2 \int_0^t \sum_{i=1}^N \beta_i^*(\tau) \left\{ \left| \frac{dc_i(\tau)}{d\tau} \right| + \sum_{k=1}^N [c_k(\tau) \mu_k(\tau) p_{ki}(\tau) - r_{ki}(\tau)] \right\} d\tau. \quad (46)$$

8 De formules van Little voor wachtrijen met tijdsafhankelijke parameters

Met de genoemde methoden om de toestand van een wachtrij te benaderen is het niet mogelijk om de verdeling of zelfs alleen maar de verwachting van de tijd doorgebracht in het systeem of de tijd doorgebracht in de wachtrij te benaderen. Ook kan, omdat deze benaderingen bedoeld zijn voor systemen met tijdsafhankelijke parameters, hier niet de gebruikelijke versie van de formules van Little worden gebruikt. Een versie van deze formule die wél rekening houdt met de tijdsafhankelijkheid van de wachtrij is te vinden in [4]. De formule geeft een verband tussen de verdeling van S en $\mathbb{E}Q(t)$, de verwachte tijd die een klant die in het interval $(u - du, u]$ is aangekomen doorbrengt in het systeem, en het verwachte aantal klanten in het systeem. Dit verband wordt gegeven door:

$$\mathbb{E}Q(t) = \int_0^t h(u) \mathbb{P}[S(u) > t - u] du, \quad (47)$$

met

$$h(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \mathbb{E}[N_a(u) - N_a(u - \Delta u)]. \quad (48)$$

Hierbij is $N_a(t)$ het aantal aankomsten op het interval $(0, t]$.

9 Vergelijking van de randomization en MOL benadering voor de $M_t/M/c(t)$ wachtrij.

Er zijn een aantal methoden besproken om het gedrag van een wachtrij met tijdsafhankelijke aankomst- en vertrekintensiteit te benaderen. Om deze methoden te kunnen vergelijken moet worden gekeken naar twee eigenschappen: de rekestijd en de fout die ze geven. In [14] worden 6 van deze methoden met elkaar vergeleken. Twee hiervan zijn de MOL benadering en de randomization methode. Een andere methode die wordt bekeken is het numeriek oplossen van de Kolmogorov voorwaartse vergelijkingen m.b.v. de Runge Kutta methode. Omdat bij deze methode de fout willekeurig klein kan worden gemaakt wordt deze methode in [14] gebruikt als ‘exacte’ methode. Dat wil zeggen dat de resultaten die deze methode geeft worden gebruikt om de fout van de andere methoden te bepalen.

Bij deze vergelijking worden de methoden gebruikt om voor een $M_t/M/c(t)$ wachtrij de kans te berekenen dat een klant niet hoeft te wachten op een bediening. De MOL benadering voor deze rij wordt op eenzelfde manier gemaakt als voor de $M_t/M/c/c$ wachtrij die wordt beschreven in §6, met als verschil dat de $M/G/c/c$ wachtrij gebruikt bij deze methode wordt vervangen door de $M/G/c$ wachtrij. Bij een $M_t/M/c(t)$ wachtrij is zowel de aankomstintensiteit als het aantal bedienden afhankelijk van de tijd. Er is voor deze wachtrij gekozen omdat alle methoden toegepast kunnen worden op deze wachtrij. De auteurs van [14] hebben 128 verschillende modellen bekeken en aan de hand daarvan de methoden beoordeeld. De wachtrijen worden bekeken over een periode van 24 uur en zowel de aankomstintensiteit als het aantal bedienden wordt gegeven door een periodieke functie met een periode van 24 uur. De aankomstintensiteit $\lambda(t)$ voldoet aan

$$\lambda(t) = \bar{\lambda}(1 + \alpha \sin(2\pi t/24)), \quad (49)$$

waarbij $\bar{\lambda}$ en α de parameters zijn. Hier stelt $\bar{\lambda}$ de gemiddelde aankomstintensiteit en $\alpha \in [0, 1]$ de relatieve amplitude voor. De vergelijking voor het aantal bedienden ziet er iets ingewikkelder uit omdat dit een geheel getal moet zijn. Deze wordt dus gegeven door

$$c(t) = \left\lceil \int_{(i-1)\delta_p}^{i\delta_p} s_c(u) du / \delta_p \right\rceil, \quad (50)$$

waarbij

$$s_c(t) = \bar{s}_c(1 + \beta \sin(2\pi(t - \gamma)/24)). \quad (51)$$

factor	waarde 1	waarde 2
Vertrekintensiteit μ	2/uur	32/uur
Gemiddelde belasting ρ	2	32
Amplitude aankomstintensiteit α	0.1	0.9
Amplitude aantal bedienden β	0.1	0.9
Gemiddelde bezetting $\hat{\rho}$	0.5	0.95
Verschuiving γ	0 uur	3 uur
Grootte interval δ_p	0.25 uur	4 uur

Tabel 1: Instelwaarden voor de factoren.

beoordelingsmethode	EXT	RND	MOL
Gemiddelde berekeningstijd (sec.)	2890.268	342.518	1.241
Gemiddelde absolute fout	N.V.T.	0.0026	0.1452
Gemiddelde maximale absolute fout	N.V.T.	0.0248	0.5558

Tabel 2: De resultaten van de metingen. Bron [14].

Het aantal bedienden wordt dus zo gekozen dat het tijdens elke periode $((i-1)\delta_p, i\delta_p]$ constant blijft. Voor het aantal bedienden zijn er 3 parameters: het gemiddelde aantal bedienden \bar{s}_c , de amplitude β en de verschuiving γ . Door het toevoegen van de factor γ ligt de piek in het aantal bedienden later dan de piek in de aankomst-intensiteit.

In tabel 1 staan voor de elk van de hierboven genoemde parameters 2 verschillende waarden. Alle combinaties van deze waarden nemen resulteert in 128 verschillende instellingen. In [14] wordt bij elke instelling 24 uur lang om de 5 minuten de kans berekend dat een klant geen wachttijd heeft, wat dus in totaal 289 waarden per instelling oplevert. Aan de hand van deze metingen worden de verschillende methoden met elkaar vergeleken. $\hat{\lambda}$ wordt bepaald door de belasting en de vertrekintensiteit: $\hat{\lambda} = \rho\mu$. Deze kan dus de waarden 4, 64 of 1024 aannemen. De parameter $\hat{\rho}$ wordt gebruikt om de parameter \hat{s}_c te berekenen: $\hat{s}_c = \rho/\hat{\rho}$.

Om de methoden met elkaar te vergelijken moet er ook een ‘exacte oplossing’ zijn van dit probleem, om te kijken hoe goed de benadering is die de verschillende methoden leveren. Zoals al gezegd zal daarvoor de numerieke oplossing van de Kolmogorov voorwaartse vergelijkingen worden gebruikt. De methoden worden dan beoordeeld op de gemiddelde rekentijd over alle 128 verschillende instellingen, de gemiddelde absolute fout en de absoluut grootste fout over alle meetpunten voor alle instellingen. De methoden zullen als volgt worden afgekort: het oplossen van de Kolmogorov voorwaartse vergelijkingen zal EXT worden genoemd, de *modified offered load* benadering zal MOL worden genoemd en de randomization methode RND. De resultaten van de metingen staan in tabel 2.

Zoals duidelijk te zien is in tabel 2 hangt de berekeningstijd van een methode erg af van hpe precies hij is. Het is dus afhankelijk van de vereiste precisie welke methode de beste resultaten geeft. Opvallend is wel dat voor de EXT en RND methoden de berekeningstijd veel meer afhangt van de instellingen van de parameters dan dat voor de MOL methode het geval was. In [14] werden nog een aantal andere methoden vergeleken die qua berekeningstijd en precisie in dezelfde klasse vallen als de MOL benadering. Opvallend hierbij is dat de MOL methode en opzicht van deze methoden op allebei de gebieden beter presteerde. Voor meer informatie over deze vergelijkingen, zie [14].

10 Opzet van de vergelijking voor de $M_t/M/c/c$ wachtrij

Net zoals in §9 zullen er hier een aantal methoden om het gedrag van wachtrijen met tijdsafhankelijke parameters te benaderen met elkaar worden vergeleken. Nu echter wordt gekeken naar een ander type wachtrij, namelijk $M_t/M/c/c$. Ook zal hier naast de MOL en randomization benadering ook worden gekeken naar de PSA en UA benaderingen. Deze methoden zullen worden gebruikt om de kans op een vol systeem te berekenen. Als referentie voor deze kans zal weer de oplossing worden gebruikt die wordt verkregen uit het oplossen van de Kolmogorov voorwaartse vergelijkingen.

Net als in §9 worden er een aantal verschillende gevallen bekeken. Omdat het aantal bedienden nu constant is, zijn er minder parameters, waardoor ook het aantal gevallen minder is. In tabellen 3 en 4 staan de waarden voor de verschillende factoren. De reden dat er twee tabellen zijn met instellingen zijn is omdat er onderscheid wordt gemaakt tussen hoge en lage waarden voor de aankomst- en vertrekintensiteiten. Later zal blijken dat dit veel verschil maakt voor de kwaliteit van de benaderingen. In totaal worden er 16 verschillende gevallen bekeken.

factor	waarde 1	waarde 2
Aankomstintensiteit constante λ	10	20
Amplitude aankomstintensiteit α	0.1	0.9
Vertrekintensiteit μ	2	3

Tabel 3: Instelwaarden voor de factoren met hoge waarden voor de aankomst- en vertrekintensiteit.

factor	waarde 1	waarde 2
Aankomstintensiteit constante λ	0.5	1
Amplitude aankomstintensiteit α	0.1	0.9
Vertrekintensiteit μ	0.1	0.15

Tabel 4: Instelwaarden voor de factoren met lage waarden voor de aankomst- en vertrekintensiteit.

De aankomstintensiteit op tijdstip t wordt gegeven door:

$$\lambda(t) = \bar{\lambda} \left(1 + \alpha \sin \frac{2\pi t}{24} \right). \quad (52)$$

De reden dat de aankomstintensiteit ook wordt gedefinieerd voor $t < 0$ is om ervoor te zorgen dat het berekenen van de MOL benadering goed gaat. Het aantal bedienden c wordt bij deze vergelijking constant gehouden op $c = 10$.

Bij deze vergelijking wordt als tijdseenheid uren genomen. Bij elke instelling van parameters wordt voor alle benaderingsmethoden gekeken naar de kans op een vol systeem. Dit gebeurt om het half uur, beginnend op $t = 0$ en eindigend op $t = 24$. Dus in totaal worden per instelling per benaderingsmethode 49 kansen berekend.

Afgesproken wordt dat het aantal klanten in het systeem 0 is op tijdstip $t = 0$. Alle berekeningen worden gedaan met Mathematica 5.1.

De benaderingen die worden bekeken zijn al besproken in dit verslag. Waar nodig zal de aanpassing worden besproken om ze geschikt te maken voor Erlang verlies systemen.

PSA

De PSA is besproken in §3. De PSA benadering op tijdstip t , $\pi^{(PSA)}(t)$ is gelijk aan de limiettoestand van de M/M/c/c wachtrij met constante aankomstintensiteit $\lambda = \lambda(t)$. Dit betekent dus dat

$$(\pi^{(PSA)}(t))_{(n)} = \frac{\rho(t)^n / n!}{\sum_{i=0}^c \rho(t)^i / i!}.$$

Hierbij is $\rho(t)$ gelijk aan

$$\rho(t) = \frac{\lambda(t)}{\mu}.$$

De PSA benadering voor de kans op een vol systeem op tijdstip t wordt dus:

$$\mathbb{P}[Q(t)_{PSA} = c] = \frac{\rho(t)^c / c!}{\sum_{i=0}^c \rho(t)^i / i!}. \quad (53)$$

UA2 en UA3

Naast de PSA wordt ook de UA benadering met twee en met drie termen bekeken. De eerste term van deze benadering is zoals gezegd de PSA, terwijl de andere twee termen worden bepaald uit vergelijking (10).

MOL

De MOL benadering voor de kans op een vol systeem wordt gegeven door vergelijking (34). Hierbij geldt voor $m_\infty(t)$:

$$\begin{aligned} m_\infty(t) &= \mathbb{E}\left[\int_{t-B}^t \lambda(u) du\right] \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{t-x}^t \lambda(u) du\right) \mu e^{-\mu x} dx. \end{aligned} \tag{54}$$

En dus voldoet de MOL benadering aan:

$$\mathbb{P}[Q(t)_{MOL} = c] = \frac{\frac{(m_\infty(t))^c}{c!}}{\sum_{j=0}^c \frac{(m_\infty(t))^j}{j!}}, \tag{55}$$

met de $m_\infty(t)$ uit (54)

Randomization

De Randomization methode is al besproken in §5. Zoals daar ook al is gezegd is de methode ook toepasbaar voor de $M_t/M/c/c$ wachtrij. Dit wordt gedaan door de vergelijkingen in (30) aan te passen. Een verschil met de randomization methode gebruikt in §5 is dat bij het Erlang verlies systeem de matrix met overgangskansen eindig is.

Zoals al gezegd is in §5 is het niet mogelijk om bij het construeren van de matrix voor de randomization methode de constante parameter λ gewoon te vervangen door de tijdsafhankelijke $\lambda(t)$ en zo een benadering te krijgen voor een wachtrij met tijdsafhankelijke aankomstintensiteit. In plaats daarvan zal de randomization methode worden toegepast na vaste intervallen met lengte Δt . Aan het begin van elk interval zal een nieuwe matrix worden gemaakt zoals in vergelijking (29). Deze zal in dat interval worden gebruikt als benadering voor de wachtrij. In de praktijk komt dit neer op het benaderen van de aankomstintensiteit door de stuksgewijs constante functie $\bar{\lambda}(t)$ die wordt gegeven door:

$$\bar{\lambda}(n \cdot \Delta t + t) = \lambda(n \cdot \Delta t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t < \Delta t.$$

De randomization benadering $\mathbb{P}[Q_{RND} = c]$ van de kans op een vol systeem bij een $M_t/M/c/c$ wachtrij met aankomstintensiteit $\lambda(t)$ en vertrekintensiteit μ wordt nu gegeven door

$$\mathbb{P}[Q_{RND} = c](n \cdot \Delta t) = \mathbf{S}(n \cdot \Delta t)_{(c+1, \cdot)} \cdot \pi^{(n \cdot \Delta t)}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{56}$$

waarbij $\mathbf{S}(n \cdot \Delta t)_{(c+1, \cdot)}$ de $(c+1)^e$ rij van de matrix $\mathbf{S}(n \cdot \Delta t)$ is en

$$\begin{aligned} \pi^{(0)} &= \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{c+1} \\ \pi^{((n+1) \cdot \Delta t)} &= \mathbf{S}^{(n \cdot \Delta t)} \pi^{(n \cdot \Delta t)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

De matrix $\mathbf{S}(t)$ in deze vergelijkingen is de matrix die wordt verkregen door de randomization methode toe te passen op een $M/M/c/c$ wachtrij met aankomstintensiteit $\lambda(t)$ en vertrekintensiteit μ . De matrix met overgangsintensiteiten van dit proces wordt gegeven door:

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + i\mu} & i = j - 1 \\ \frac{i\mu}{\lambda(t) + i\mu} & i = j + 1, \quad i \neq c \\ 1 & i = j + 1, \quad i = c \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \tag{57}$$

De vector $\pi^{(n \cdot \Delta t)}$ geeft de kansverdeling aan van het aantal klanten in het systeem op tijdstip $n \cdot \Delta t$. Door de onderste rij van de matrix $\mathbf{S}(n \cdot \Delta t)$ met $\pi^{(n \cdot \Delta t)}$ te vermenigvuldigen wordt dus een gewogen gemiddelde genomen van de kans op een vol systeem over de toestand van de wachtrij op tijdstip $n \cdot \Delta t$.

Kolmogorov voorwaartse vergelijkingen

De Kolmogorov voorwaartse vergelijkingen luiden:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t). \quad (58)$$

Hierbij is q_{kj} de intensiteit waarmee van toestand k naar toestand j wordt gegaan, en is v_j de som van alle vertrekintensiteiten uit toestand j . $P_{ij}(t)$ is de kans dat als het systeem op tijdstip 0 in toestand i was, het op tijdstip t in toestand j is. De toestand is hier het totaal aantal klanten in het systeem. Voor het Erlang verlies systeem geldt voor deze parameters:

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= \lambda(t), & i = 0, 1, \dots, c-1 \\ q_{i,i-1} &= i\mu, & i = 1, 2, \dots, c \\ v_j &= \lambda(t) + j\mu, & j = 1, 2, \dots, c. \end{aligned}$$

Dit resulteert in het volgende stelsel van $(c+1)^2$ differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} P'_{i0}(t) &= \mu P_{i1}(t) - \lambda(t) P_{i0}(t), & i = 0, 1, \dots, c \\ P'_{ij}(t) &= \lambda(t) P_{i,j-1}(t) + (j+1)\mu P_{i,j+1}(t) - (\lambda(t) + j\mu) P_{ij}(t), & i = 0, 1, \dots, c \\ & & j = 1, 2, \dots, c-1 \\ P'_{ic}(t) &= \lambda(t) P_{i,c-1}(t) - c\mu P_{ic}(t), & i = 0, 1, \dots, c. \end{aligned} \quad (59)$$

Het stelsel heeft de volgende beginvoorwaarden:

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, c, \quad j = 0, 1, \dots, c. \quad (60)$$

Omdat op tijdstip $t = 0$ er 0 klanten in het systeem zijn, moet voor de kans op een vol systeem op tijdstip t worden gekeken naar $P_{0,c}(t)$. Dus de benadering die de Kolmogorov vergelijkingen geven is gelijk aan

$$\mathbb{P}[Q(t)_{EXT} = c] = P_{0,c}(t). \quad (61)$$

11 Resultaten

De resultaten van deze vergelijking staan in bijlage A. In deze bijlage staat voor elk van de bekeken gevallen een tabel met daarin de gegevens voor die instelwaarden. De linkse kolom van elke tabel geeft het tijdstip aan. De andere kolommen bevatten van links naar rechts: de ‘exacte’ waarde van de kans op een vol systeem en de randomization, MOL, PSA, UA2 en UA3 benaderingen van de kans op een vol systeem. Tussen deze kolommen staan de bijbehorende relatieve verschillen met de exacte waarde van deze kans. Het relatieve verschil $\Delta\%$ tussen de exacte waarde $\mathbb{P}[Q_{EXT} = c]$ en de benadering $\mathbb{P}[Q_{APP} = c]$ (en dit geldt voor alle benaderingen) wordt gegeven door

$$\Delta\% = \frac{\mathbb{P}[Q_{APP} = c] - \mathbb{P}[Q_{EXT} = c]}{\mathbb{P}[Q_{EXT} = c]} \cdot 100\%.$$

De factor $\mathbb{P}[Q_{EXT} = c]$ in de noemer van deze uitdrukking kan heel erg klein worden. Op tijdstippen waarop dit het geval is staat een * in plaats van de relatieve kans, wat dus aangeeft dat deze kans te klein is om door te worden gedeeld. Dit wordt gedaan als $\mathbb{P}[Q_{EXT} = c] < 10^{-3}$.

Onderaan de tabellen staan drie rijen waarin de resultaten worden samengevat. De bovenste rij (‘Gem’) bevat het gemiddelde van alle tijdstippen. Voor kolommen met de benaderingen betekent dit dus het gemiddelde van de kansen, en voor de kolommen met de relatieve verschillen is dit het gemiddelde van de precisie van de benaderingen. De tweede rij (‘|Gem|’) bevat de *absolute* gemiddelden. De laatste rij (‘|Gem|

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
Gem.	0.065	0.076	91.896	0.084	187.616	0.091	380.496	0.09	195.216	0.05	78.385
Gem .	0.065	0.076	107.103	0.084	188.728	0.091	399.155	0.103	468.446	0.128	686.618
Gem .aang.	0.05	0.051	36.117	0.064	86.243	0.049	63.454	0.07	282.765	0.102	640.06

Tabel 5: De gemiddelde waarden van de benaderingen en relatieve verschillen over alle gevallen.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
Gem.	0.088	0.088	1.578	0.091	8.384	0.091	12.248	0.091	6.541	0.091	8.134
Gem .	0.088	0.088	6.188	0.091	10.244	0.091	19.409	0.091	10.317	0.091	8.621
Gem .aang.	0.049	0.049	6.993	0.051	3.297	0.049	12.532	0.05	3.383	0.049	0.735

Tabel 6: De gemiddelde waarden van de benaderingen en relatieve verschillen over gevallen met hoge instelwaarden.

aang⁷) bevat de absolute gemiddelden van de resultaten voor tijdstip $t \geq 5$. Deze waarde kan worden gebruikt om te zien hoe groot de invloed is van de beginperiode, waarin de situatie erg snel verandert.

In tabel 5 staat voor deze samengevatte waarden weer het gemiddelde over alle bekeken gevallen. Deze tabel, en vooral de kolommen die de relatieve verschillen bevatten, kan worden gebruikt om de benaderingsmethode te beoordelen. Tabel 6 bevat ook het gemiddelde over meerdere gevallen, maar dan alleen over de gevallen met hoge instelwaarden. In tabel 7 wordt juist gekeken naar de gevallen met lage instelwaarden. Deze laatste twee tabellen kunnen gebruikt worden om te zien of de benaderingen in situaties met hoge instelwaarden beter presteren dan met lage instelwaarden of andersom.

Uit de eerste tabel, tabel 5 vallen een aantal conclusies te trekken. Uit de tweede rij, die de absolute waarde van de relatieve verschillen bevat, valt op te maken dat de randomization benadering gemiddeld het beste presteert. Maar een relatief verschil van 1.334 betekent nog altijd dat gemiddeld de fout in de benadering groter was dan de te benaderen waarde. De benadering die hierna het best presteert is de MOL benadering. Deze presteert ongeveer 2 keer zo slecht als de beste methode.

Vervolgens is het niet de UA2 of UA3 benadering die hierna als beste presteert, maar de PSA benadering. Dit is opvallend omdat de UA2 en UA3 zijn ontworpen als verbeteringen van de PSA. Blijkbaar is het zo dat de som in vergelijking (13) te snel divergeert om nog een goede benadering op te leveren. Dit blijkt ook uit het gemiddelde absolute relatieve verschil van de UA3 benadering, wat bijna 800 % is.

De slechte prestatie van de benaderingen is voor een deel toe te schrijven aan de beginperiode waarin de wachtrij zich vanuit een leeg systeem naar een soort evenwichtstoestand toewerkt. In de derde rij, dat de eerste 10 metingen niet meetelt is te zien dat alle benaderingsmethoden na deze beginperiode iets beter presteren dan in de beginperiode zelf. Dit valt ook deels te verklaren doordat de randomization benadering de enige benadering is die begint in de oorsprong. De andere benaderingen doen dit niet, en omdat $\Delta\%$ wordt berekend door te delen door de exacte waarde (die in deze periode dus heel erg laag is) wordt het verschil nog eens extra benadrukt. Zonder deze eerste 10 metingen blijkt de PSA benadering iets beter te presteren dan de MOL benadering, maar verder zijn er weinig onderlinge verschillen.

Uit tabel 6 blijkt dat er toch wel degelijk gevallen zijn waarvoor de benaderingen het wél goed doen. De gemiddelde absolute relatieve verschillen zijn veel kleiner dan wanneer alle instelwaarden worden bekeken, en zijn in sommige gevallen zelfs aanvaardbaar te noemen. Ook nu weer is de randomization methode de beste benadering, hoewel het verschil met de andere methoden veel kleiner is. Opvallender is dat, in tegenstelling tot wanneer alle instelwaarden worden bekeken, de UA2 en UA3 benaderingen nu wel degelijk

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
Gem.	0.0042	0.064	182.214	0.078	366.847	0.091	748.744	0.088	383.892	0.01	148.636
Gem .	0.042	0.064	208.018	0.078	367.213	0.091	778.901	0.115	926.574	0.166	1364.61
Gem .aang.	0.05	0.053	65.241	0.076	169.189	0.049	114.376	0.09	562.147	0.154	1279.39

Tabel 7: De gemiddelde waarden van de benaderingen en relatieve verschillen over gevallen met lage instelwaarden.

een verbetering van elkaar en van de PSA benadering zijn. De UA2 en UA3 benadering zijn zelfs zó goed dat ze op de beginperiode na zelfs beter zijn dan de randomization benadering.

Voor de gevallen met lage instelwaarden presteren de benaderingen helaas niet zo goed. Dit is duidelijk te zien in tabel 7. De randomization methode is, met een gemiddeld absoluut relatief verschil van 260 % nog het beste. De UA3 benadering presteert met 1570 % het slechtste.

Vanwege de inefficiënte implementatie van sommige benaderingen wordt voor resultaten over de rekentijd van de benaderingen verwezen naar [14]. Alleen de UA2 en UA3 benadering ontbreken hier. Hoewel deze twee methoden iets lastiger zijn om te implementeren hebben ze dezelfde orde van grootte rekentijd nodig als de PSA en MOL benadering.

12 Conclusie

Na het bekijken van twee vormen van tijdsafhankelijk gedrag in wachtrijen en het bekijken en vergelijken van een aantal methoden om de twee soort te analyseren kunnen er een aantal conclusies worden getrokken. Uit de vergelijking is gebleken dat de prestatie van sommige benaderingen erg afhangt van de parameters van de bekeken wachtrij. Dit geldt vooral voor de UA en PSA benaderingen, maar in mindere mate ook voor de randomization benadering.

Helaas is vanwege het beperkte aantal gevallen dat hier wordt bekeken het niet mogelijk om een duidelijk oordeel te geven over welke methode in welke situatie het beste is. Voor een oordeel zijn ook resultaten over de rekentijd nodig.

Een andere belangrijke conclusie is dat er heel voorzichtig moet worden omgegaan met de UA benadering. Dit omdat deze voor de verkeerde instellingen heel erg slechte benaderingen kunnen geven.

Er zijn een aantal suggesties voor verder onderzoek te noemen. Allereerst is het, om een duidelijke keuze te kunnen maken tussen de genoemde methoden om het gedrag van wachtrijen met tijdsafhankelijke parameters te benaderen, zaak om de vergelijking in §10 uit te breiden door veel meer gevallen te bekijken. De vergelijking in dit verslag heeft alleen een globaal beeld gegeven van de prestatie van de verschillende methoden en heeft laten zien dat vooral de prestatie van de UA benadering erg verschilt voor de verschillende instelwaarden. Om duidelijk te kunnen zien voor welke parameters deze benaderingen bruikbaar zijn, is echter nog veel meer onderzoek nodig. Ook het toevoegen van meer benaderingen, zoals bijvoorbeeld genoemd in [14] of in de inleiding zou goed zijn voor de vergelijking.

Verder zou om de vergelijking compleet te maken ook moeten worden gekeken naar de rekentijd die het kost om de benaderingen uit te rekenen. Om dit te doen is het wel belangrijk dat vooral de randomization methode efficiënter wordt geïmplementeerd. Uit [14] blijkt dat dit veel beter kan dan dat voor dit verslag is gedaan. Pas als ook voor de rekentijd voldoende resultaten zijn kan, uiteraard gegeven de parameters van de te benaderen wachtrij, worden besloten welke benadering het beste is.

Een belangrijke keuze bij het toepassen van de randomization methode is de stapgrootte die wordt gebruikt. Voor deze benadering is gekozen om dit even groot te kiezen als de tijd tussen de waarnemingen. De vraag is nu wat het variëren van deze stapgrootte voor effect heeft op de prestatie en de benodigde rekentijd voor deze methode.

Als laatste zou het interessant zijn om de prestatie van de MOL benadering voor netwerken van Erlang verlies systemen uit §7 te bekijken. Omdat dit netwerk is gemodelleerd als een Markovproces is het mogelijk de benadering te vergelijken met de randomization benadering en de oplossing van de Kolmogorov voorwaartse vergelijking. De vraag is natuurlijk of de MOL benadering ook zo goed weet te presteren in deze ingewikkeldere situatie.

Referenties

- [1] J. Abate en W. Whitt (1987). Transient behavior of the $M/M/1$ queue: Starting at the origin. *Queueing Systems* **2**, 41-65.
- [2] N. Abdalla en R.J. Boucherie (2002). Blocking probabilities in mobile communication networks with time-varying rates and redialing subscribers. *Ann. Oper. Res.* **112**, 15-34.
- [3] I. Adan en J. Resing (2001). *Queueing Theory*. Dictaat TU Eindhoven.

- [4] D. Bertsimas en G. Mourtzinou (1997). Transient laws of non-stationary queueing systems and their applications. *Queueing Systems* **25**, 115-155.
- [5] J.P.C. Blanc en E.A. van Doorn (1986). Relaxation times for queueing systems. In: *CWI Monograph 1*, eds. J.W. de Bakker, M. Hazewinkel en J.K. Lenstra. North-Holland Publ. Cy., Amsterdam, pp. 139-162.
- [6] R.J. Boucherie en N.M. van Dijk (2000). On a queueing network model for cellular mobile telecommunications networks. *Oper. Res.* **48**, 38-49.
- [7] O. Boxma en D. Denisov (2004). Time dependence in queues.
- [8] J.W. Cohen (1982). *The Single Server Queue*, tweede druk. North-Holland Publ. Cy., Amsterdam.
- [9] W.K. Grassmann (1989). Numerical solutions for Markovian event systems. *Quantitative Methoden in der Wirtschaftswissenschaften*, 73-87.
- [10] W.K. Grassmann (2000). *Computational Probability*. Kluwer Academic Publ. Boston.
- [11] L. Green, P. Kolesar en A. Svoronos (1991). Some effects of nonstationarity on multiserver Markovian queueing systems. *Oper. Res.* **39**, 502-511.
- [12] L. Green en P. Kolesar (1991). The pointwise stationary approximation for queues with nonstationary arrivals. *Management Sci.* **37**, 84-97.
- [13] L. Green en A. Svoronos (1991). Some effects of nonstationarity on multiserver markovian queueing systems. *Oper. Res.* **39**, 502-511.
- [14] Armann Ingolfsson, Elvira Akhmetshina, Susan Budge, Yongyue Li en Xudong Wu (2002). A survey and experimental comparison of service level approximation methods for non-stationary queueing systems. Niet gepubliceerd.
- [15] D.L. Jagerman (1975). Nonstationary blocking in telephone traffic. *Bell Syst. Tech. J.* **54**, 625-661.
- [16] A. Jensen (1953). Markoff chains as an aid in the study of Markoff processes. *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **36**, 87-91.
- [17] J.F.C. Kingman (1963). The exponential decay of Markov transition probabilities. *Proc. London Math. Soc.* **13**, 337-358.
- [18] J.F.C. Kingman (1963). Ergodic properties of continuous-time Markov processes and their discrete skeletons. *Proc. London Math. Soc.* **13**, 593-604.
- [19] W. Massey en W. Whitt (1994). An analysis of the modified offered-load approximation for the non-stationary Erlang loss model. *Ann. Appl. Probab.* **4**, 1145-1160.
- [20] W. Massey en W. Whitt (1998). Uniform acceleration expansions for Markov chains with time-varying rates. *Ann. Appl. Probab.* **8**, 1130-1155.
- [21] A.R. Odoni en E. Roth (1983). An empirical investigation of the transient behavior of stationary queueing systems. *Oper. Res.* **31**, 432-455.
- [22] S.M. Ross (2000). *Introduction to Probability Models*, zevende druk. Harcourt/Academic Press, San Diego.
- [23] E. Roth (1979). A closure approximation for the nonstationary $M/M/s$ queue. *Management Sci.* **25**, 522-534.
- [24] E. Roth (1985). A heuristic technique for the transient behavior of Markovian queueing systems. *Oper. Res. Letters* **3**, 301-305.
- [25] W.J. Stewart (1994). *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*. Princeton University Press, Princeton.

- [26] G.M. Thompson (1993). Accounting for the multi-period impact of service when determining employee requirements for labor scheduling. *J. Oper. Management* **11**, 269-187.
- [27] W.Whitt (1991). The pointwise stationary approximation for $M_t/M_t/1$ queues is asymptotically correct as the rates increase. *Management Sci.* **37**, 307-314.

A Tabellen

In deze bijlage staan de resultaten van de vergelijking van de benaderingsmethoden. De rijen van de tabel staan voor de verschillende tijdstippen waarop is gemeten. Op elk van deze tijdstippen wordt gekeken naar de 'exacte' waarde van de kans dat een $M_t/M/10$ wachtrij vol zit en worden er 5 benaderingen voor deze kans gegeven. Tussendoor staat steeds het relatieve verschil uit vergelijking (62) van een benaderingsmethode met de 'exacte' waarde. In de onderste drie rijen van elke tabel staan respectievelijk: de gemiddelden over alle tijdstippen, de absolute waarde van dit gemiddelde en de absolute waarde van het gemiddelde waarbij de eerste 10 metingen worden weggelaten. Bij elke tabel staat welke instellingen voor de berekeningen zijn gebruikt.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.017	*	0.018	*	0.017	*	0.017	*
0.5	0.001	0.002	66.106	0.018	1181.02	0.02	1267.44	0.019	1197.3	0.019	1196.46
1.	0.01	0.012	20.162	0.02	89.086	0.021	101.419	0.02	91.661	0.02	91.384
1.5	0.017	0.019	8.577	0.021	19.846	0.022	27.274	0.021	21.551	0.021	21.289
2.	0.021	0.022	4.567	0.022	4.986	0.023	11.061	0.022	6.511	0.022	6.217
2.5	0.023	0.024	2.966	0.023	0.79	0.025	6.132	0.024	2.253	0.024	1.918
3.	0.025	0.025	2.218	0.025	-0.453	0.026	4.277	0.025	0.96	0.025	0.587
3.5	0.026	0.026	1.776	0.026	-0.776	0.027	3.344	0.026	0.572	0.026	0.167
4.	0.027	0.027	1.438	0.027	-0.794	0.028	2.689	0.027	0.467	0.027	0.037
4.5	0.028	0.028	1.131	0.028	-0.705	0.028	2.116	0.028	0.448	0.028	-0.001
5.	0.028	0.029	0.832	0.028	-0.572	0.029	1.562	0.029	0.451	0.028	-0.008
5.5	0.029	0.029	0.533	0.029	-0.418	0.029	1.012	0.029	0.458	0.029	-0.007
6.	0.029	0.029	0.234	0.029	-0.253	0.029	0.462	0.029	0.462	0.029	-0.003
6.5	0.029	0.029	-0.064	0.029	-0.081	0.029	-0.086	0.029	0.462	0.029	0.002
7.	0.029	0.029	-0.361	0.029	0.093	0.029	-0.63	0.029	0.457	0.029	0.007
7.5	0.029	0.028	-0.654	0.029	0.268	0.028	-1.169	0.029	0.446	0.029	0.012
8.	0.028	0.028	-0.942	0.028	0.438	0.028	-1.698	0.028	0.429	0.028	0.018
8.5	0.027	0.027	-1.221	0.028	0.603	0.027	-2.216	0.027	0.407	0.027	0.024
9.	0.026	0.026	-1.49	0.027	0.757	0.026	-2.717	0.027	0.378	0.026	0.03
9.5	0.025	0.025	-1.746	0.026	0.899	0.025	-3.197	0.026	0.342	0.025	0.036
10.	0.024	0.024	-1.985	0.025	1.025	0.023	-3.649	0.024	0.298	0.024	0.043
10.5	0.023	0.023	-2.203	0.023	1.133	0.022	-4.067	0.023	0.247	0.023	0.05
11.	0.022	0.021	-2.397	0.022	1.221	0.021	-4.441	0.022	0.188	0.022	0.057
11.5	0.021	0.02	-2.561	0.021	1.286	0.02	-4.764	0.021	0.121	0.021	0.063
12.	0.019	0.019	-2.69	0.02	1.329	0.018	-5.024	0.019	0.048	0.019	0.069
12.5	0.018	0.018	-2.78	0.018	1.347	0.017	-5.212	0.018	-0.033	0.018	0.073
13.	0.017	0.016	-2.825	0.017	1.341	0.016	-5.317	0.017	-0.118	0.017	0.076
13.5	0.016	0.015	-2.82	0.016	1.311	0.015	-5.329	0.016	-0.206	0.016	0.077
14.	0.015	0.014	-2.763	0.015	1.258	0.014	-5.24	0.015	-0.295	0.015	0.076
14.5	0.014	0.014	-2.649	0.014	1.183	0.013	-5.044	0.014	-0.383	0.014	0.074
15.	0.013	0.013	-2.477	0.013	1.089	0.013	-4.736	0.013	-0.468	0.013	0.069
15.5	0.012	0.012	-2.248	0.013	0.976	0.012	-4.315	0.012	-0.547	0.012	0.063
16.	0.012	0.012	-1.964	0.012	0.848	0.011	-3.786	0.012	-0.619	0.012	0.055
16.5	0.011	0.011	-1.629	0.011	0.707	0.011	-3.156	0.011	-0.682	0.011	0.046
17.	0.011	0.011	-1.249	0.011	0.556	0.011	-2.436	0.011	-0.733	0.011	0.036
17.5	0.011	0.011	-0.834	0.011	0.398	0.011	-1.643	0.011	-0.772	0.011	0.025
18.	0.011	0.011	-0.393	0.011	0.236	0.01	-0.798	0.01	-0.798	0.011	0.014
18.5	0.011	0.011	0.061	0.011	0.071	0.011	0.077	0.01	-0.81	0.011	0.002
19.	0.011	0.011	0.515	0.011	-0.094	0.011	0.955	0.011	-0.807	0.011	-0.011
19.5	0.011	0.011	0.958	0.011	-0.256	0.011	1.813	0.011	-0.788	0.011	-0.023
20.	0.011	0.011	1.376	0.011	-0.412	0.011	2.623	0.011	-0.755	0.011	-0.035
20.5	0.012	0.012	1.758	0.011	-0.562	0.012	3.364	0.011	-0.707	0.011	-0.047
21.	0.012	0.012	2.095	0.012	-0.702	0.013	4.015	0.012	-0.644	0.012	-0.058
21.5	0.013	0.013	2.379	0.013	-0.831	0.013	4.562	0.013	-0.57	0.013	-0.067
22.	0.013	0.014	2.605	0.013	-0.946	0.014	4.993	0.013	-0.486	0.013	-0.074
22.5	0.014	0.015	2.77	0.014	-1.047	0.015	5.305	0.014	-0.394	0.014	-0.08
23.	0.015	0.016	2.874	0.015	-1.131	0.016	5.495	0.015	-0.298	0.015	-0.083
23.5	0.016	0.017	2.918	0.016	-1.196	0.017	5.567	0.016	-0.201	0.016	-0.083
24.	0.017	0.018	2.906	0.017	-1.242	0.018	5.53	0.017	-0.105	0.017	-0.082
Gem.	0.018	0.018	1.853	0.019	26.605	0.019	28.417	0.019	26.831	0.019	26.908
Gem .	0.018	0.018	3.606	0.019	27.114	0.019	31.709	0.019	27.329	0.019	26.935
Gem . aang.	0.015	0.015	2.058	0.015	0.887	0.014	3.905	0.015	0.452	0.015	0.056

Tabel 8: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 10$, $\alpha = 1/10$ en $\mu = 2$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.002	*	0.002	*	0.002	*	0.002	*
0.5	0.	0.	*	0.002	*	0.002	*	0.002	*	0.002	*
1.	0.001	0.002	10.923	0.002	34.932	0.002	42.607	0.002	35.553	0.002	35.507
1.5	0.002	0.002	4.979	0.002	5.992	0.002	11.716	0.002	6.539	0.002	6.434
2.	0.002	0.002	3.323	0.002	0.899	0.002	5.979	0.002	1.463	0.002	1.304
2.5	0.002	0.002	2.707	0.002	-0.127	0.002	4.466	0.002	0.461	0.002	0.251
3.	0.003	0.003	2.332	0.003	-0.318	0.003	3.775	0.003	0.287	0.003	0.029
3.5	0.003	0.003	2.	0.003	-0.326	0.003	3.227	0.003	0.282	0.003	-0.015
4.	0.003	0.003	1.663	0.003	-0.29	0.003	2.686	0.003	0.308	0.003	-0.021
4.5	0.003	0.003	1.314	0.003	-0.24	0.003	2.129	0.003	0.336	0.003	-0.018
5.	0.003	0.003	0.954	0.003	-0.183	0.003	1.555	0.003	0.357	0.003	-0.013
5.5	0.003	0.003	0.586	0.003	-0.122	0.003	0.969	0.003	0.372	0.003	-0.008
6.	0.003	0.003	0.214	0.003	-0.059	0.003	0.378	0.003	0.378	0.003	-0.003
6.5	0.003	0.003	-0.158	0.003	0.007	0.003	-0.213	0.003	0.378	0.003	0.002
7.	0.003	0.003	-0.528	0.003	0.072	0.003	-0.8	0.003	0.37	0.003	0.008
7.5	0.003	0.003	-0.891	0.003	0.136	0.003	-1.377	0.003	0.354	0.003	0.013
8.	0.003	0.003	-1.245	0.003	0.198	0.003	-1.939	0.003	0.332	0.003	0.018
8.5	0.003	0.003	-1.585	0.003	0.256	0.003	-2.48	0.003	0.303	0.003	0.022
9.	0.003	0.003	-1.908	0.003	0.309	0.003	-2.994	0.003	0.267	0.003	0.026
9.5	0.003	0.002	-2.21	0.003	0.357	0.002	-3.475	0.003	0.225	0.003	0.03
10.	0.002	0.002	-2.486	0.002	0.397	0.002	-3.916	0.002	0.177	0.002	0.033
10.5	0.002	0.002	-2.732	0.002	0.431	0.002	-4.31	0.002	0.125	0.002	0.035
11.	0.002	0.002	-2.942	0.002	0.456	0.002	-4.648	0.002	0.068	0.002	0.037
11.5	0.002	0.002	-3.111	0.002	0.473	0.002	-4.923	0.002	0.009	0.002	0.038
12.	0.002	0.002	-3.235	0.002	0.481	0.002	-5.125	0.002	-0.052	0.002	0.038
12.5	0.002	0.002	-3.308	0.002	0.481	0.002	-5.249	0.002	-0.114	0.002	0.037
13.	0.001	0.001	-3.325	0.001	0.472	0.001	-5.285	0.001	-0.175	0.001	0.035
13.5	0.001	0.001	-3.284	0.001	0.456	0.001	-5.228	0.001	-0.234	0.001	0.033
14.	0.001	0.001	-3.18	0.001	0.431	0.001	-5.072	0.001	-0.289	0.001	0.03
14.5	0.001	0.001	-3.013	0.001	0.4	0.001	-4.816	0.001	-0.34	0.001	0.026
15.	0.001	0.001	-2.782	0.001	0.362	0.001	-4.458	0.001	-0.386	0.001	0.023
15.5	0.001	0.001	-2.489	0.001	0.319	0.001	-4.001	0.001	-0.426	0.001	0.019
16.	0.001	0.001	-2.139	0.001	0.271	0.001	-3.451	0.001	-0.46	0.001	0.016
16.5	0.001	0.001	-1.736	0.001	0.22	0.001	-2.815	0.001	-0.488	0.001	0.013
17.	0.001	0.001	-1.289	0.001	0.165	0.001	-2.107	0.001	-0.51	0.001	0.009
17.5	0.001	0.001	-0.808	0.001	0.108	0.001	-1.341	0.001	-0.526	0.001	0.006
18.	0.001	0.001	-0.304	0.001	0.05	0.001	-0.536	0.001	-0.536	0.001	0.003
18.5	0.001	0.001	0.21	0.001	-0.009	0.001	0.288	0.001	-0.541	0.001	0.
19.	0.001	0.001	0.722	0.001	-0.067	0.001	1.11	0.001	-0.539	0.001	-0.003
19.5	0.001	0.001	1.217	0.001	-0.124	0.001	1.909	0.001	-0.531	0.001	-0.007
20.	0.001	0.001	1.683	0.001	-0.179	0.001	2.664	0.001	-0.516	0.001	-0.01
20.5	0.001	0.001	2.109	0.001	-0.231	0.001	3.356	0.001	-0.493	0.001	-0.014
21.	0.001	0.001	2.485	0.001	-0.28	0.001	3.969	0.001	-0.463	0.001	-0.018
21.5	0.001	0.001	2.804	0.001	-0.324	0.001	4.489	0.001	-0.425	0.001	-0.023
22.	0.001	0.001	3.06	0.001	-0.363	0.001	4.907	0.001	-0.379	0.001	-0.027
22.5	0.001	0.001	3.249	0.001	-0.397	0.001	5.217	0.001	-0.327	0.001	-0.031
23.	0.001	0.001	3.371	0.001	-0.425	0.001	5.419	0.001	-0.268	0.001	-0.035
23.5	0.001	0.001	3.427	0.001	-0.446	0.002	5.512	0.001	-0.206	0.001	-0.037
24.	0.002	0.002	3.419	0.002	-0.46	0.002	5.501	0.002	-0.14	0.002	-0.04
Gem.	0.002	0.002	0.165	0.002	0.901	0.002	0.883	0.002	0.808	0.002	0.893
Gem .	0.002	0.002	2.233	0.002	1.104	0.002	4.171	0.002	1.19	0.002	0.906
Gem . aang.	0.001	0.001	2.411	0.001	0.32	0.001	3.849	0.001	0.336	0.001	0.023

Tabel 9: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 10$, $\alpha = 1/10$ en $\mu = 3$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.01	*	0.018	*	0.01	*	0.01	*
0.5	0.002	0.004	105.665	0.018	749.294	0.031	1349.28	0.02	829.927	0.02	809.53
1.	0.022	0.03	38.485	0.031	45.995	0.048	124.481	0.036	65.287	0.034	59.843
1.5	0.048	0.057	20.367	0.048	1.292	0.068	43.015	0.055	15.482	0.053	12.056
2.	0.072	0.082	12.858	0.068	-6.884	0.089	22.694	0.076	5.506	0.075	3.063
2.5	0.096	0.105	8.861	0.088	-8.216	0.11	14.377	0.099	2.73	0.097	0.971
3.	0.118	0.126	6.345	0.109	-7.813	0.13	9.803	0.12	1.687	0.119	0.42
3.5	0.138	0.145	4.594	0.129	-6.91	0.148	6.857	0.14	1.156	0.139	0.233
4.	0.156	0.161	3.303	0.147	-5.853	0.163	4.803	0.157	0.835	0.156	0.143
4.5	0.17	0.174	2.31	0.162	-4.753	0.175	3.3	0.171	0.629	0.17	0.089
5.	0.18	0.183	1.515	0.174	-3.652	0.184	2.145	0.181	0.499	0.18	0.053
5.5	0.187	0.189	0.845	0.183	-2.56	0.19	1.205	0.188	0.422	0.187	0.029
6.	0.191	0.191	0.248	0.188	-1.474	0.191	0.384	0.191	0.384	0.191	0.01
6.5	0.19	0.19	-0.321	0.19	-0.38	0.19	-0.391	0.191	0.38	0.19	-0.007
7.	0.186	0.185	-0.9	0.188	0.738	0.184	-1.186	0.187	0.406	0.186	-0.024
7.5	0.179	0.176	-1.527	0.182	1.902	0.175	-2.066	0.18	0.467	0.179	-0.045
8.	0.168	0.165	-2.239	0.174	3.131	0.163	-3.103	0.169	0.566	0.168	-0.073
8.5	0.155	0.15	-3.084	0.162	4.445	0.148	-4.385	0.156	0.716	0.154	-0.111
9.	0.138	0.133	-4.112	0.146	5.859	0.13	-6.022	0.14	0.925	0.138	-0.159
9.5	0.12	0.113	-5.389	0.129	7.376	0.11	-8.155	0.121	1.198	0.12	-0.214
10.	0.1	0.093	-6.989	0.109	8.983	0.089	-10.956	0.101	1.518	0.1	-0.255
10.5	0.08	0.072	-9.	0.088	10.636	0.068	-14.622	0.081	1.816	0.079	-0.23
11.	0.06	0.053	-11.52	0.067	12.253	0.048	-19.352	0.061	1.914	0.06	-0.042
11.5	0.042	0.036	-14.646	0.048	13.704	0.031	-25.296	0.043	1.474	0.042	0.423
12.	0.027	0.022	-18.467	0.031	14.82	0.018	-32.484	0.027	-0.036	0.028	1.181
12.5	0.016	0.012	-23.041	0.018	15.425	0.009	-40.753	0.015	-3.254	0.016	1.946
13.	0.008	0.006	-28.376	0.009	15.389	0.004	-49.725	0.007	-8.706	0.008	2.002
13.5	0.004	0.002	-34.407	0.004	14.688	0.001	-58.859	0.003	-16.538	0.004	0.376
14.	0.001	0.001	-40.985	0.002	13.427	0.	-67.574	0.001	-26.4	0.001	-3.717
14.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
15.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
15.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
16.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
16.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
21.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
21.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
22.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
22.5	0.	0.001	*	0.	*	0.001	*	0.	*	0.001	*
23.	0.002	0.003	62.647	0.002	-6.548	0.004	148.619	0.001	-54.226	0.002	-1.274
23.5	0.005	0.007	48.263	0.004	-7.489	0.009	107.473	0.003	-23.839	0.004	-5.627
24.	0.01	0.014	36.886	0.01	-8.377	0.018	77.229	0.01	-7.945	0.01	-4.751
Gem.	0.059	0.059	3.024	0.06	17.723	0.06	32.056	0.06	16.224	0.06	17.874
Gem .	0.059	0.059	11.392	0.06	20.618	0.06	46.134	0.06	21.977	0.06	18.549
Gem . aang.	0.012	0.011	11.56	0.014	4.888	0.01	22.515	0.012	5.092	0.012	0.753

Tabel 10: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 10$, $\alpha = 9/10$ en $\mu = 2$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.001	*	0.002	*	0.001	*	0.001	*
0.5	0.001	0.001	74.488	0.002	315.28	0.003	561.348	0.002	301.53	0.002	328.495
1.	0.003	0.005	32.853	0.004	20.854	0.006	78.466	0.004	21.839	0.004	24.939
1.5	0.007	0.009	21.71	0.007	-0.173	0.01	38.09	0.008	3.076	0.008	3.527
2.	0.012	0.014	16.309	0.012	-3.459	0.015	26.24	0.012	0.928	0.012	0.362
2.5	0.018	0.02	12.651	0.017	-3.939	0.022	19.692	0.018	0.918	0.018	-0.058
3.	0.024	0.027	9.82	0.024	-3.825	0.028	14.968	0.025	1.039	0.024	-0.049
3.5	0.031	0.034	7.535	0.03	-3.51	0.035	11.294	0.032	1.057	0.031	-0.004
4.	0.038	0.04	5.657	0.037	-3.077	0.041	8.369	0.038	1.005	0.038	0.022
4.5	0.044	0.046	4.089	0.043	-2.558	0.046	5.994	0.044	0.928	0.044	0.029
5.	0.049	0.05	2.747	0.048	-1.974	0.051	4.017	0.049	0.854	0.049	0.026
5.5	0.052	0.053	1.563	0.051	-1.343	0.053	2.309	0.052	0.798	0.052	0.018
6.	0.054	0.054	0.475	0.053	-0.677	0.054	0.764	0.054	0.764	0.054	0.008
6.5	0.053	0.053	-0.571	0.053	0.013	0.053	-0.713	0.054	0.754	0.053	-0.003
7.	0.052	0.051	-1.627	0.052	0.72	0.051	-2.207	0.052	0.767	0.052	-0.012
7.5	0.048	0.047	-2.74	0.049	1.434	0.046	-3.801	0.049	0.797	0.048	-0.019
8.	0.043	0.042	-3.961	0.044	2.147	0.041	-5.579	0.044	0.837	0.043	-0.02
8.5	0.038	0.036	-5.339	0.039	2.843	0.035	-7.627	0.038	0.87	0.038	-0.011
9.	0.031	0.029	-6.927	0.032	3.505	0.028	-10.033	0.032	0.867	0.031	0.016
9.5	0.025	0.023	-8.781	0.026	4.106	0.022	-12.885	0.025	0.779	0.025	0.068
10.	0.018	0.016	-10.953	0.019	4.618	0.015	-16.262	0.019	0.529	0.018	0.154
10.5	0.013	0.011	-13.496	0.013	5.007	0.01	-20.221	0.013	0.007	0.013	0.268
11.	0.008	0.007	-16.452	0.009	5.246	0.006	-24.789	0.008	-0.924	0.008	0.382
11.5	0.005	0.004	-19.852	0.005	5.318	0.003	-29.944	0.005	-2.422	0.005	0.434
12.	0.003	0.002	-23.707	0.003	5.227	0.002	-35.62	0.002	-4.639	0.003	0.316
12.5	0.001	0.001	-28.007	0.001	4.992	0.001	-41.705	0.001	-7.7	0.001	-0.115
13.	0.	0.	*	0.001	*	0.	*	0.	*	0.	*
13.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
14.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
14.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
15.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
15.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
16.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
16.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
21.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
21.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
22.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
22.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
23.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
23.5	0.	0.001	*	0.	*	0.001	*	0.	*	0.	*
24.	0.001	0.001	39.155	0.001	-3.483	0.002	67.628	0.001	-13.039	0.001	-0.138
Gem.	0.014	0.014	1.768	0.014	7.21	0.014	12.812	0.014	6.372	0.014	7.319
Gem .	0.014	0.014	7.581	0.014	8.354	0.014	21.44	0.014	7.544	0.014	7.337
Gem . aang.	0.002	0.001	5.228	0.002	1.169	0.001	8.144	0.002	1.009	0.002	0.062

Tabel 11: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 10$, $\alpha = 9/10$ en $\mu = 3$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.209	*	0.215	*	0.212	*	0.212	*
0.5	0.081	0.102	26.271	0.215	166.366	0.221	173.765	0.218	171.061	0.218	170.986
1.	0.2	0.209	4.326	0.221	10.022	0.226	12.955	0.224	11.923	0.224	11.888
1.5	0.227	0.23	1.219	0.226	-0.254	0.232	2.256	0.23	1.406	0.23	1.371
2.	0.235	0.237	0.69	0.232	-1.354	0.237	0.949	0.236	0.199	0.236	0.162
2.5	0.241	0.242	0.555	0.237	-1.385	0.242	0.713	0.241	0.056	0.241	0.019
3.	0.245	0.246	0.475	0.242	-1.273	0.247	0.602	0.245	0.04	0.245	0.002
3.5	0.249	0.25	0.401	0.246	-1.13	0.25	0.506	0.249	0.038	0.249	0.
4.	0.253	0.253	0.326	0.25	-0.972	0.254	0.411	0.253	0.037	0.253	0.
4.5	0.255	0.256	0.251	0.253	-0.802	0.256	0.316	0.256	0.037	0.255	0.
5.	0.258	0.258	0.176	0.256	-0.624	0.258	0.222	0.258	0.037	0.258	0.
5.5	0.259	0.259	0.101	0.258	-0.438	0.259	0.129	0.259	0.036	0.259	0.
6.	0.259	0.26	0.026	0.259	-0.248	0.26	0.036	0.26	0.036	0.259	0.
6.5	0.259	0.259	-0.049	0.259	-0.055	0.259	-0.056	0.259	0.036	0.259	0.
7.	0.258	0.258	-0.124	0.259	0.14	0.258	-0.149	0.259	0.036	0.258	0.
7.5	0.257	0.256	-0.198	0.258	0.335	0.256	-0.241	0.257	0.036	0.257	0.
8.	0.255	0.254	-0.272	0.256	0.528	0.254	-0.334	0.255	0.037	0.255	0.
8.5	0.252	0.251	-0.345	0.253	0.716	0.25	-0.427	0.252	0.037	0.252	0.
9.	0.248	0.247	-0.417	0.25	0.898	0.247	-0.519	0.248	0.037	0.248	0.
9.5	0.244	0.243	-0.488	0.246	1.072	0.242	-0.612	0.244	0.037	0.244	0.
10.	0.239	0.238	-0.556	0.242	1.234	0.237	-0.702	0.239	0.036	0.239	0.
10.5	0.234	0.232	-0.62	0.237	1.382	0.232	-0.79	0.234	0.035	0.234	0.001
11.	0.228	0.227	-0.679	0.232	1.513	0.226	-0.873	0.229	0.032	0.228	0.001
11.5	0.223	0.221	-0.732	0.226	1.624	0.221	-0.949	0.223	0.029	0.223	0.002
12.	0.217	0.215	-0.776	0.22	1.711	0.215	-1.016	0.217	0.024	0.217	0.003
12.5	0.211	0.209	-0.81	0.215	1.771	0.209	-1.07	0.211	0.018	0.211	0.004
13.	0.205	0.203	-0.831	0.209	1.802	0.203	-1.108	0.205	0.009	0.205	0.005
13.5	0.199	0.197	-0.837	0.203	1.801	0.197	-1.127	0.199	-0.001	0.199	0.006
14.	0.194	0.192	-0.825	0.197	1.766	0.191	-1.122	0.194	-0.013	0.194	0.007
14.5	0.188	0.187	-0.795	0.192	1.697	0.186	-1.092	0.188	-0.027	0.188	0.008
15.	0.184	0.182	-0.745	0.187	1.592	0.182	-1.032	0.184	-0.041	0.184	0.008
15.5	0.179	0.178	-0.675	0.182	1.453	0.178	-0.943	0.179	-0.057	0.179	0.008
16.	0.176	0.175	-0.584	0.178	1.282	0.174	-0.824	0.176	-0.072	0.176	0.008
16.5	0.173	0.172	-0.476	0.175	1.083	0.172	-0.676	0.173	-0.085	0.173	0.007
17.	0.17	0.17	-0.351	0.172	0.859	0.17	-0.505	0.17	-0.096	0.17	0.006
17.5	0.169	0.169	-0.214	0.17	0.617	0.168	-0.313	0.169	-0.105	0.169	0.004
18.	0.168	0.168	-0.068	0.169	0.36	0.168	-0.109	0.168	-0.109	0.168	0.001
18.5	0.168	0.168	0.08	0.168	0.097	0.168	0.099	0.168	-0.11	0.168	-0.001
19.	0.169	0.169	0.226	0.169	-0.167	0.17	0.305	0.169	-0.106	0.169	-0.003
19.5	0.171	0.171	0.365	0.17	-0.425	0.172	0.5	0.171	-0.098	0.171	-0.005
20.	0.173	0.174	0.492	0.172	-0.672	0.174	0.676	0.173	-0.087	0.173	-0.007
20.5	0.176	0.177	0.602	0.175	-0.901	0.178	0.828	0.176	-0.074	0.176	-0.008
21.	0.18	0.181	0.694	0.178	-1.107	0.182	0.952	0.18	-0.059	0.18	-0.008
21.5	0.184	0.186	0.766	0.182	-1.287	0.186	1.045	0.184	-0.043	0.184	-0.008
22.	0.189	0.191	0.816	0.187	-1.438	0.191	1.106	0.189	-0.028	0.189	-0.008
22.5	0.195	0.196	0.845	0.192	-1.557	0.197	1.138	0.195	-0.014	0.195	-0.007
23.	0.2	0.202	0.854	0.197	-1.643	0.203	1.142	0.2	-0.001	0.2	-0.006
23.5	0.206	0.208	0.845	0.203	-1.696	0.209	1.122	0.206	0.01	0.206	-0.005
24.	0.212	0.214	0.82	0.209	-1.717	0.215	1.08	0.212	0.018	0.212	-0.004
Gem.	0.206	0.207	0.607	0.214	3.726	0.214	3.801	0.214	3.758	0.214	3.764
Gem .	0.206	0.207	1.116	0.214	4.589	0.214	4.478	0.214	3.808	0.214	3.767
Gem . aang.	0.192	0.192	0.62	0.193	1.25	0.192	0.836	0.192	0.05	0.192	0.005

Tabel 12: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 20$, $\alpha = 1/10$ en $\mu = 2$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.064	*	0.066	*	0.064	*	0.064	*
0.5	0.028	0.034	19.353	0.067	136.878	0.069	144.615	0.068	139.699	0.068	139.613
1.	0.064	0.067	4.073	0.07	9.725	0.072	13.157	0.071	11.031	0.071	10.976
1.5	0.073	0.075	1.772	0.073	0.293	0.076	3.246	0.074	1.463	0.074	1.401
2.	0.077	0.078	1.286	0.077	-0.858	0.079	1.842	0.078	0.254	0.077	0.184
2.5	0.08	0.081	1.099	0.08	-0.949	0.082	1.499	0.081	0.098	0.08	0.022
3.	0.083	0.084	0.954	0.083	-0.884	0.084	1.289	0.083	0.082	0.083	0.001
3.5	0.086	0.086	0.811	0.085	-0.787	0.087	1.093	0.086	0.084	0.086	-0.001
4.	0.088	0.088	0.664	0.087	-0.674	0.089	0.895	0.088	0.086	0.088	-0.001
4.5	0.09	0.09	0.515	0.089	-0.552	0.09	0.694	0.09	0.088	0.09	-0.001
5.	0.091	0.091	0.364	0.091	-0.42	0.091	0.493	0.091	0.089	0.091	-0.001
5.5	0.092	0.092	0.212	0.092	-0.282	0.092	0.292	0.092	0.09	0.092	0.
6.	0.092	0.092	0.06	0.092	-0.14	0.092	0.09	0.092	0.09	0.092	0.
6.5	0.092	0.092	-0.093	0.092	0.005	0.092	-0.111	0.092	0.09	0.092	0.
7.	0.092	0.092	-0.244	0.092	0.151	0.091	-0.311	0.092	0.09	0.092	0.
7.5	0.091	0.09	-0.394	0.091	0.295	0.09	-0.51	0.091	0.089	0.091	0.001
8.	0.089	0.089	-0.542	0.09	0.435	0.089	-0.708	0.089	0.087	0.089	0.001
8.5	0.087	0.087	-0.687	0.088	0.57	0.087	-0.904	0.088	0.085	0.087	0.001
9.	0.085	0.085	-0.829	0.086	0.697	0.084	-1.097	0.085	0.082	0.085	0.002
9.5	0.083	0.082	-0.965	0.083	0.814	0.082	-1.285	0.083	0.077	0.083	0.003
10.	0.08	0.079	-1.093	0.081	0.919	0.079	-1.465	0.08	0.071	0.08	0.003
10.5	0.077	0.076	-1.213	0.078	1.009	0.076	-1.635	0.077	0.063	0.077	0.004
11.	0.074	0.073	-1.32	0.075	1.084	0.072	-1.792	0.074	0.053	0.074	0.006
11.5	0.07	0.069	-1.413	0.071	1.14	0.069	-1.93	0.071	0.041	0.07	0.007
12.	0.067	0.066	-1.487	0.068	1.178	0.066	-2.044	0.067	0.026	0.067	0.008
12.5	0.064	0.063	-1.539	0.065	1.194	0.063	-2.13	0.064	0.009	0.064	0.009
13.	0.061	0.06	-1.567	0.062	1.19	0.06	-2.182	0.061	-0.01	0.061	0.011
13.5	0.058	0.057	-1.565	0.059	1.164	0.057	-2.193	0.058	-0.032	0.058	0.012
14.	0.055	0.054	-1.532	0.056	1.117	0.054	-2.161	0.055	-0.056	0.055	0.012
14.5	0.053	0.052	-1.465	0.053	1.049	0.051	-2.079	0.053	-0.08	0.053	0.013
15.	0.05	0.05	-1.363	0.051	0.962	0.049	-1.946	0.05	-0.104	0.05	0.013
15.5	0.048	0.048	-1.227	0.049	0.858	0.047	-1.762	0.048	-0.128	0.048	0.012
16.	0.047	0.046	-1.056	0.047	0.738	0.046	-1.527	0.047	-0.15	0.047	0.011
16.5	0.045	0.045	-0.856	0.046	0.605	0.045	-1.246	0.045	-0.169	0.045	0.009
17.	0.044	0.044	-0.629	0.044	0.462	0.044	-0.925	0.044	-0.185	0.044	0.007
17.5	0.044	0.043	-0.383	0.044	0.311	0.043	-0.574	0.043	-0.196	0.044	0.004
18.	0.043	0.043	-0.124	0.043	0.155	0.043	-0.202	0.043	-0.202	0.043	0.002
18.5	0.043	0.043	0.141	0.043	-0.002	0.043	0.178	0.043	-0.203	0.043	-0.001
19.	0.044	0.044	0.401	0.044	-0.159	0.044	0.554	0.044	-0.198	0.044	-0.004
19.5	0.044	0.045	0.651	0.044	-0.312	0.045	0.912	0.044	-0.189	0.044	-0.006
20.	0.045	0.046	0.881	0.045	-0.458	0.046	1.242	0.045	-0.174	0.045	-0.009
20.5	0.047	0.047	1.086	0.046	-0.596	0.047	1.533	0.047	-0.155	0.047	-0.011
21.	0.048	0.049	1.26	0.048	-0.723	0.049	1.778	0.048	-0.133	0.048	-0.012
21.5	0.051	0.051	1.399	0.05	-0.836	0.051	1.972	0.05	-0.109	0.05	-0.013
22.	0.053	0.054	1.503	0.052	-0.934	0.054	2.113	0.053	-0.084	0.053	-0.013
22.5	0.055	0.056	1.57	0.055	-1.016	0.057	2.2	0.055	-0.059	0.055	-0.013
23.	0.058	0.059	1.601	0.058	-1.079	0.06	2.235	0.058	-0.034	0.058	-0.012
23.5	0.061	0.062	1.599	0.061	-1.122	0.063	2.223	0.061	-0.011	0.061	-0.011
24.	0.064	0.065	1.567	0.064	-1.146	0.066	2.169	0.064	0.009	0.064	-0.01
Gem.	0.064	0.065	0.433	0.067	3.083	0.067	3.175	0.067	3.089	0.067	3.107
Gem .	0.064	0.065	1.396	0.067	3.652	0.067	4.511	0.067	3.198	0.067	3.112
Gem . aang.	0.055	0.055	1.155	0.055	0.811	0.055	1.617	0.055	0.101	0.055	0.009

Tabel 13: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 20$, $\alpha = 1/10$ en $\mu = 3$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.161	*	0.215	*	0.194	*	0.191	*
0.5	0.105	0.146	39.622	0.215	105.246	0.267	155.202	0.251	140.157	0.249	137.758
1.	0.282	0.303	7.282	0.267	-5.44	0.315	11.615	0.303	7.398	0.302	6.836
1.5	0.346	0.356	2.848	0.315	-9.096	0.358	3.305	0.349	0.73	0.348	0.445
2.	0.387	0.394	1.777	0.357	-7.744	0.394	1.931	0.388	0.208	0.387	0.049
2.5	0.42	0.425	1.223	0.393	-6.338	0.425	1.296	0.42	0.11	0.42	0.016
3.	0.447	0.451	0.86	0.424	-5.145	0.451	0.897	0.447	0.066	0.447	0.008
3.5	0.469	0.472	0.609	0.45	-4.137	0.472	0.629	0.469	0.042	0.469	0.004
4.	0.486	0.488	0.428	0.47	-3.274	0.488	0.439	0.486	0.028	0.486	0.002
4.5	0.5	0.501	0.292	0.487	-2.522	0.501	0.299	0.5	0.02	0.5	0.001
5.	0.509	0.51	0.185	0.499	-1.849	0.51	0.188	0.509	0.016	0.509	0.001
5.5	0.514	0.515	0.094	0.508	-1.231	0.515	0.096	0.515	0.013	0.514	0.
6.	0.517	0.517	0.012	0.513	-0.643	0.517	0.013	0.517	0.013	0.517	0.
6.5	0.515	0.515	-0.069	0.515	-0.066	0.515	-0.07	0.515	0.013	0.515	0.
7.	0.511	0.51	-0.156	0.513	0.523	0.51	-0.157	0.511	0.015	0.511	0.
7.5	0.502	0.501	-0.255	0.508	1.144	0.501	-0.258	0.502	0.018	0.502	-0.001
8.	0.49	0.488	-0.376	0.499	1.824	0.488	-0.383	0.49	0.024	0.49	-0.002
8.5	0.474	0.472	-0.531	0.487	2.59	0.472	-0.545	0.475	0.035	0.474	-0.003
9.	0.454	0.451	-0.739	0.47	3.478	0.451	-0.765	0.455	0.052	0.454	-0.005
9.5	0.43	0.425	-1.026	0.449	4.534	0.425	-1.076	0.43	0.082	0.43	-0.01
10.	0.4	0.395	-1.43	0.424	5.815	0.394	-1.53	0.401	0.134	0.4	-0.021
10.5	0.366	0.358	-2.01	0.393	7.395	0.358	-2.211	0.367	0.227	0.366	-0.042
11.	0.326	0.317	-2.849	0.356	9.362	0.315	-3.258	0.327	0.398	0.326	-0.089
11.5	0.281	0.27	-4.071	0.314	11.822	0.267	-4.899	0.283	0.708	0.28	-0.186
12.	0.232	0.218	-5.841	0.266	14.873	0.215	-7.497	0.235	1.252	0.231	-0.374
12.5	0.181	0.166	-8.38	0.214	18.566	0.16	-11.591	0.185	2.115	0.18	-0.656
13.	0.13	0.115	-11.941	0.16	22.802	0.107	-17.868	0.134	3.166	0.129	-0.807
13.5	0.085	0.07	-16.781	0.108	27.185	0.062	-26.94	0.088	3.545	0.085	-0.04
14.	0.048	0.037	-23.067	0.063	30.886	0.029	-38.833	0.048	1.121	0.049	2.488
14.5	0.023	0.016	-30.767	0.03	32.747	0.011	-52.46	0.021	-6.766	0.024	5.127
15.	0.009	0.005	-39.53	0.011	31.842	0.003	-65.787	0.007	-20.722	0.009	2.892
15.5	0.002	0.001	-48.637	0.003	28.18	0.001	-76.854	0.002	-37.898	0.002	-7.205
16.	0.001	0.	-57.059	0.001	22.764	0.	-84.691	0.	-54.039	0.	-22.487
16.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.5	0.	0.	*	0.	*	0.001	*	0.	*	0.	*
21.	0.001	0.002	113.062	0.001	-7.393	0.003	301.942	-0.001	-227.487	0.001	49.938
21.5	0.004	0.007	83.594	0.003	-9.521	0.011	199.754	0.	-88.361	0.003	-13.37
22.	0.013	0.021	58.964	0.011	-11.879	0.029	124.955	0.01	-21.982	0.011	-16.955
22.5	0.035	0.049	39.914	0.03	-14.098	0.062	74.799	0.036	1.863	0.033	-6.714
23.	0.075	0.094	25.96	0.063	-15.586	0.107	43.174	0.08	6.507	0.074	-0.418
23.5	0.129	0.149	16.314	0.108	-15.883	0.16	24.311	0.135	5.04	0.13	1.143
24.	0.189	0.208	10.065	0.161	-14.981	0.215	13.632	0.194	2.885	0.191	0.888
Gem.	0.222	0.223	3.012	0.229	5.036	0.231	11.445	0.23	-5.699	0.229	2.821
Gem .	0.222	0.223	13.441	0.229	10.62	0.231	27.677	0.23	12.964	0.229	5.653
Gem . aang.	0.087	0.086	20.698	0.094	12.192	0.087	40.586	0.088	16.766	0.087	4.546

Tabel 14: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 20$, $\alpha = 9/10$ en $\mu = 2$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.048	*	0.066	*	0.053	*	0.052	*
0.5	0.039	0.053	35.842	0.076	93.106	0.097	147.738	0.085	115.619	0.083	112.333
1.	0.111	0.124	11.351	0.109	-2.264	0.132	18.577	0.12	8.116	0.119	6.981
1.5	0.154	0.164	6.291	0.143	-7.197	0.166	7.872	0.156	1.354	0.155	0.665
2.	0.19	0.198	4.223	0.177	-6.7	0.199	4.941	0.191	0.552	0.19	0.118
2.5	0.222	0.228	2.963	0.209	-5.744	0.229	3.353	0.222	0.327	0.222	0.05
3.	0.25	0.255	2.104	0.238	-4.799	0.256	2.324	0.25	0.207	0.25	0.027
3.5	0.274	0.278	1.497	0.263	-3.924	0.278	1.624	0.274	0.137	0.274	0.015
4.	0.293	0.296	1.056	0.284	-3.128	0.296	1.131	0.293	0.094	0.293	0.009
4.5	0.308	0.31	0.723	0.301	-2.402	0.31	0.768	0.308	0.069	0.308	0.005
5.	0.319	0.32	0.459	0.313	-1.732	0.32	0.486	0.319	0.054	0.319	0.003
5.5	0.326	0.326	0.238	0.322	-1.102	0.326	0.252	0.326	0.046	0.326	0.001
6.	0.328	0.328	0.038	0.327	-0.494	0.328	0.042	0.328	0.042	0.328	0.
6.5	0.327	0.326	-0.158	0.327	0.11	0.326	-0.162	0.327	0.043	0.327	-0.001
7.	0.322	0.321	-0.365	0.324	0.727	0.32	-0.38	0.322	0.049	0.322	-0.002
7.5	0.312	0.311	-0.601	0.317	1.377	0.31	-0.63	0.313	0.059	0.312	-0.004
8.	0.299	0.296	-0.887	0.305	2.08	0.296	-0.938	0.299	0.078	0.299	-0.006
8.5	0.282	0.278	-1.249	0.29	2.858	0.278	-1.337	0.282	0.108	0.282	-0.011
9.	0.26	0.256	-1.723	0.27	3.735	0.256	-1.874	0.261	0.155	0.26	-0.018
9.5	0.235	0.23	-2.36	0.247	4.734	0.229	-2.622	0.236	0.23	0.235	-0.031
10.	0.207	0.2	-3.225	0.219	5.873	0.199	-3.682	0.207	0.347	0.207	-0.052
10.5	0.175	0.168	-4.407	0.188	7.158	0.166	-5.206	0.176	0.522	0.175	-0.084
11.	0.142	0.134	-6.023	0.154	8.572	0.132	-7.404	0.143	0.765	0.142	-0.122
11.5	0.109	0.1	-8.209	0.12	10.047	0.097	-10.551	0.11	1.046	0.109	-0.141
12.	0.077	0.069	-11.119	0.086	11.45	0.066	-14.954	0.078	1.227	0.077	-0.064
12.5	0.05	0.043	-14.895	0.056	12.567	0.04	-20.87	0.051	0.956	0.05	0.224
13.	0.029	0.023	-19.634	0.033	13.137	0.021	-28.365	0.029	-0.391	0.029	0.75
13.5	0.014	0.011	-25.333	0.016	12.945	0.009	-37.176	0.014	-3.564	0.014	1.178
14.	0.006	0.004	-31.859	0.007	11.956	0.003	-46.696	0.005	-9.05	0.006	0.718
14.5	0.002	0.001	-38.926	0.002	10.369	0.001	-56.146	0.002	-16.726	0.002	-1.454
15.	0.	0.	*	0.001	*	0.	*	0.	*	0.	*
15.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
16.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
16.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
21.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
21.5	0.	0.001	*	0.	*	0.001	*	0.	*	0.	*
22.	0.001	0.002	63.973	0.001	-5.393	0.003	113.259	0.001	-37.355	0.001	1.724
22.5	0.005	0.007	47.947	0.005	-6.472	0.009	80.852	0.004	-15.906	0.005	-2.254
23.	0.013	0.018	35.246	0.012	-7.547	0.021	56.353	0.013	-4.705	0.013	-2.215
23.5	0.029	0.036	25.401	0.026	-8.435	0.04	38.352	0.029	0.191	0.028	-1.09
24.	0.052	0.062	17.968	0.048	-8.936	0.066	25.568	0.053	1.679	0.052	-0.228
Gem.	0.118	0.118	1.762	0.12	2.786	0.12	5.398	0.12	0.946	0.12	2.388
Gem .	0.118	0.118	8.741	0.12	5.899	0.12	15.153	0.12	4.526	0.12	2.706
Gem . aang.	0.031	0.03	12.213	0.034	4.857	0.03	18.808	0.032	3.256	0.031	0.424

Tabel 15: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 20$, $\alpha = 9/10$ en $\mu = 3$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.015	*	0.018	*	-0.001	*	0.	*
0.5	0.	0.	*	0.016	*	0.02	*	-0.001	*	-0.005	*
1.	0.	0.	*	0.016	*	0.021	*	0.001	*	-0.011	*
1.5	0.	0.	*	0.016	*	0.022	*	0.002	*	-0.016	*
2.	0.	0.	*	0.016	*	0.023	*	0.004	*	-0.021	*
2.5	0.	0.	*	0.017	*	0.025	*	0.007	*	-0.024	*
3.	0.	0.	*	0.017	*	0.026	*	0.009	*	-0.027	*
3.5	0.	0.001	*	0.017	*	0.027	*	0.012	*	-0.03	*
4.	0.	0.002	*	0.018	*	0.028	*	0.016	*	-0.031	*
4.5	0.	0.003	*	0.018	*	0.028	*	0.019	*	-0.031	*
5.	0.	0.005	*	0.019	*	0.029	*	0.023	*	-0.03	*
5.5	0.	0.006	*	0.019	*	0.029	*	0.026	*	-0.028	*
6.	0.	0.008	*	0.02	*	0.029	*	0.029	*	-0.025	*
6.5	0.	0.01	*	0.02	*	0.029	*	0.032	*	-0.021	*
7.	0.	0.012	*	0.02	*	0.029	*	0.035	*	-0.017	*
7.5	0.001	0.014	1982.29	0.021	3096.36	0.028	4259.62	0.038	5683.85	-0.012	-1968.89
8.	0.001	0.015	1590.86	0.021	2272.95	0.028	3008.46	0.04	4354.03	-0.007	-852.92
8.5	0.001	0.016	1292.36	0.021	1723.41	0.027	2183.98	0.041	3409.14	-0.001	-171.612
9.	0.001	0.017	1061.41	0.022	1343.63	0.026	1622.3	0.042	2718.11	0.005	253.667
9.5	0.002	0.018	880.275	0.022	1073.08	0.025	1228.47	0.043	2199.69	0.012	523.043
10.	0.002	0.019	736.381	0.022	875.163	0.023	945.315	0.043	1801.83	0.018	694.406
10.5	0.003	0.019	620.707	0.022	726.968	0.022	737.25	0.042	1490.22	0.024	802.139
11.	0.003	0.019	526.694	0.022	613.682	0.021	581.443	0.041	1241.71	0.03	867.167
11.5	0.003	0.019	449.517	0.022	525.469	0.02	462.85	0.04	1040.28	0.035	902.536
12.	0.004	0.019	385.583	0.022	455.629	0.018	371.319	0.038	874.674	0.04	916.616
12.5	0.004	0.019	332.189	0.021	399.493	0.017	299.846	0.036	736.802	0.044	914.983
13.	0.005	0.018	287.276	0.021	353.74	0.016	243.506	0.034	620.758	0.047	901.531
13.5	0.005	0.018	249.267	0.021	315.96	0.015	198.772	0.031	522.153	0.049	879.143
14.	0.005	0.017	216.935	0.021	284.377	0.014	163.077	0.029	437.666	0.051	850.077
14.5	0.006	0.016	189.323	0.02	257.66	0.013	134.523	0.026	364.739	0.052	816.179
15.	0.006	0.016	165.673	0.02	234.798	0.013	111.693	0.024	301.361	0.052	778.984
15.5	0.006	0.015	145.381	0.019	215.011	0.012	93.513	0.021	245.922	0.052	739.761
16.	0.006	0.014	127.962	0.019	197.693	0.011	79.164	0.019	197.113	0.051	699.506
16.5	0.007	0.014	113.02	0.018	182.37	0.011	68.012	0.017	153.858	0.05	658.937
17.	0.007	0.013	100.232	0.018	168.665	0.011	59.565	0.014	115.27	0.048	618.477
17.5	0.007	0.013	89.329	0.018	156.283	0.011	53.438	0.012	80.619	0.047	578.251
18.	0.007	0.013	80.084	0.017	144.986	0.01	49.323	0.01	49.323	0.045	538.095
18.5	0.007	0.012	72.306	0.017	134.59	0.011	46.97	0.009	20.935	0.043	497.589
19.	0.007	0.012	65.829	0.016	124.948	0.011	46.171	0.007	-4.858	0.041	456.107
19.5	0.007	0.012	60.509	0.016	115.948	0.011	46.742	0.005	-28.237	0.038	412.9
20.	0.008	0.012	56.216	0.016	107.502	0.011	48.516	0.004	-49.257	0.036	367.196
20.5	0.008	0.012	52.835	0.016	99.545	0.012	51.327	0.003	-67.856	0.033	318.326
21.	0.008	0.012	50.258	0.015	92.029	0.013	55.008	0.001	-83.873	0.03	265.859
21.5	0.008	0.012	48.385	0.015	84.921	0.013	59.38	0.	-97.074	0.026	209.721
22.	0.009	0.013	47.121	0.015	78.195	0.014	64.25	-0.001	-107.188	0.021	150.298
22.5	0.009	0.013	46.374	0.015	71.836	0.015	69.415	-0.001	-113.953	0.017	88.473
23.	0.009	0.013	46.055	0.015	65.832	0.016	74.658	-0.002	-117.158	0.012	25.603
23.5	0.01	0.014	46.076	0.015	60.176	0.017	79.761	-0.002	-116.684	0.006	-36.578
24.	0.01	0.015	46.353	0.015	54.862	0.018	84.509	-0.001	-112.542	0.	-96.122
Gem.	0.004	0.011	250.226	0.018	340.975	0.019	360.86	0.019	566.559	0.015	277.54
Gem .	0.004	0.011	250.226	0.018	340.975	0.019	360.86	0.019	603.239	0.028	405.137
Gem . aang.	0.006	0.015	188.064	0.018	248.218	0.014	185.494	0.018	385.997	0.036	554.537

Tabel 16: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 1/2$, $\alpha = 1/10$ en $\mu = 1/10$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.001	*	0.002	*	0.	*	0.001	*
0.5	0.	0.	*	0.001	*	0.002	*	0.	*	0.	*
1.	0.	0.	*	0.001	*	0.002	*	0.	*	0.	*
1.5	0.	0.	*	0.001	*	0.002	*	0.	*	-0.001	*
2.	0.	0.	*	0.001	*	0.002	*	0.	*	-0.001	*
2.5	0.	0.	*	0.001	*	0.002	*	0.001	*	-0.001	*
3.	0.	0.	*	0.002	*	0.003	*	0.001	*	-0.002	*
3.5	0.	0.	*	0.002	*	0.003	*	0.001	*	-0.002	*
4.	0.	0.	*	0.002	*	0.003	*	0.002	*	-0.002	*
4.5	0.	0.	*	0.002	*	0.003	*	0.002	*	-0.002	*
5.	0.	0.001	*	0.002	*	0.003	*	0.002	*	-0.002	*
5.5	0.	0.001	*	0.002	*	0.003	*	0.003	*	-0.002	*
6.	0.	0.001	*	0.002	*	0.003	*	0.003	*	-0.002	*
6.5	0.	0.001	*	0.002	*	0.003	*	0.003	*	-0.001	*
7.	0.	0.001	*	0.002	*	0.003	*	0.004	*	-0.001	*
7.5	0.	0.002	*	0.002	*	0.003	*	0.004	*	0.	*
8.	0.	0.002	*	0.002	*	0.003	*	0.004	*	0.001	*
8.5	0.	0.002	*	0.002	*	0.003	*	0.004	*	0.001	*
9.	0.	0.002	*	0.002	*	0.003	*	0.004	*	0.002	*
9.5	0.	0.002	*	0.002	*	0.002	*	0.004	*	0.002	*
10.	0.001	0.002	300.988	0.002	338.125	0.002	338.904	0.004	712.894	0.003	449.451
10.5	0.001	0.002	254.237	0.002	286.584	0.002	260.788	0.004	595.194	0.003	460.483
11.	0.001	0.002	215.263	0.002	246.045	0.002	200.799	0.004	498.358	0.004	458.953
11.5	0.001	0.002	182.5	0.002	213.64	0.002	154.13	0.004	417.746	0.004	448.75
12.	0.001	0.002	154.756	0.002	187.359	0.002	117.442	0.003	349.972	0.004	432.613
12.5	0.001	0.002	131.119	0.002	165.757	0.002	88.369	0.003	292.513	0.004	412.54
13.	0.001	0.002	110.884	0.002	147.781	0.001	65.205	0.003	243.454	0.004	390.036
13.5	0.001	0.002	93.501	0.002	132.645	0.001	46.702	0.003	201.306	0.004	366.263
14.	0.001	0.002	78.535	0.002	119.757	0.001	31.932	0.002	164.889	0.004	342.131
14.5	0.001	0.002	65.641	0.002	108.662	0.001	20.198	0.002	133.246	0.004	318.353
15.	0.001	0.001	54.545	0.002	99.009	0.001	10.977	0.002	105.586	0.004	295.476
15.5	0.001	0.001	45.023	0.002	90.521	0.001	3.868	0.002	81.24	0.003	273.901
16.	0.001	0.001	36.894	0.002	82.981	0.001	-1.431	0.001	59.638	0.003	253.897
16.5	0.001	0.001	30.009	0.002	76.217	0.001	-5.147	0.001	40.282	0.003	235.607
17.	0.001	0.001	24.242	0.002	70.09	0.001	-7.454	0.001	22.743	0.003	219.052
17.5	0.001	0.001	19.49	0.001	64.493	0.001	-8.479	0.001	6.648	0.003	204.134
18.	0.001	0.001	15.663	0.001	59.339	0.001	-8.315	0.001	-8.315	0.003	190.632
18.5	0.001	0.001	12.685	0.001	54.56	0.001	-7.033	0.001	-22.4	0.002	178.205
19.	0.001	0.001	10.487	0.001	50.105	0.001	-4.689	0.001	-35.789	0.002	166.386
19.5	0.001	0.001	9.008	0.001	45.934	0.001	-1.332	0.	-48.589	0.002	154.594
20.	0.001	0.001	8.19	0.001	42.017	0.001	2.987	0.	-60.818	0.002	142.148
20.5	0.001	0.001	7.976	0.001	38.331	0.001	8.204	0.	-72.399	0.002	128.305
21.	0.001	0.001	8.312	0.001	34.862	0.001	14.235	0.	-83.152	0.002	112.313
21.5	0.001	0.001	9.141	0.001	31.597	0.001	20.97	0.	-92.803	0.002	93.492
22.	0.001	0.001	10.402	0.001	28.53	0.001	28.265	0.	-100.997	0.002	71.32
22.5	0.001	0.001	12.032	0.001	25.654	0.001	35.945	0.	-107.322	0.001	45.538
23.	0.001	0.001	13.964	0.001	22.966	0.001	43.796	0.	-111.353	0.001	16.233
23.5	0.001	0.001	16.124	0.001	20.461	0.002	51.582	0.	-112.695	0.001	-16.108
24.	0.001	0.001	18.436	0.001	18.137	0.002	59.047	0.	-111.036	0.001	-50.588
Gem.	0.001	0.001	39.797	0.002	59.228	0.002	31.846	0.002	60.368	0.001	138.655
Gem .	0.001	0.001	39.797	0.002	59.228	0.002	33.637	0.002	99.865	0.002	141.378
Gem . aang.	0.001	0.001	67.243	0.002	100.074	0.001	56.835	0.001	168.737	0.003	238.879

Tabel 17: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 1/2$, $\alpha = 1/10$ en $\mu = 3/20$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.002	*	0.018	*	-0.158	*	-0.026	*
0.5	0.	0.	*	0.003	*	0.031	*	-0.194	*	-0.371	*
1.	0.	0.	*	0.003	*	0.048	*	-0.207	*	-0.675	*
1.5	0.	0.	*	0.004	*	0.068	*	-0.194	*	-0.845	*
2.	0.	0.	*	0.005	*	0.089	*	-0.16	*	-0.869	*
2.5	0.	0.001	*	0.007	*	0.11	*	-0.114	*	-0.791	*
3.	0.	0.003	*	0.009	*	0.13	*	-0.062	*	-0.662	*
3.5	0.	0.007	*	0.011	*	0.148	*	-0.01	*	-0.521	*
4.	0.	0.015	*	0.014	*	0.163	*	0.04	*	-0.391	*
4.5	0.001	0.026	5134.22	0.018	3393.8	0.175	34787.2	0.085	16747.	-0.282	-56201.9
5.	0.001	0.041	3507.67	0.022	1814.79	0.184	16197.3	0.125	10945.5	-0.196	-17470.5
5.5	0.002	0.057	2455.47	0.026	1070.99	0.19	8374.43	0.16	7063.31	-0.134	-6095.35
6.	0.004	0.074	1762.21	0.031	682.465	0.191	4713.98	0.191	4713.98	-0.094	-2468.42
6.5	0.006	0.09	1295.34	0.036	462.162	0.19	2842.03	0.219	3297.21	-0.075	-1271.03
7.	0.01	0.104	973.457	0.041	328.852	0.184	1809.35	0.244	2424.64	-0.078	-904.502
7.5	0.013	0.114	746.147	0.046	243.967	0.175	1200.79	0.266	1873.43	-0.101	-846.517
8.	0.018	0.121	581.669	0.051	187.793	0.163	820.437	0.287	1517.5	-0.144	-913.177
8.5	0.022	0.124	459.675	0.055	149.613	0.148	569.55	0.306	1283.86	-0.206	-1031.18
9.	0.026	0.122	366.845	0.059	123.297	0.13	395.519	0.322	1128.08	-0.278	-1158.24
9.5	0.03	0.118	294.277	0.061	105.195	0.11	269.012	0.334	1020.56	-0.342	-1248.95
10.	0.033	0.109	235.891	0.063	93.067	0.089	173.166	0.338	938.499	-0.37	-1237.57
10.5	0.034	0.099	187.456	0.064	85.522	0.068	98.232	0.33	861.512	-0.321	-1037.79
11.	0.035	0.086	145.986	0.063	81.701	0.048	38.756	0.303	770.536	-0.166	-575.67
11.5	0.034	0.072	109.377	0.062	81.106	0.031	-8.06	0.257	650.875	0.08	133.287
12.	0.033	0.057	76.192	0.06	83.501	0.018	-43.56	0.195	498.927	0.328	905.749
12.5	0.03	0.044	45.542	0.057	88.853	0.009	-68.661	0.128	328.034	0.459	1428.41
13.	0.027	0.031	17.024	0.053	97.317	0.004	-84.663	0.071	165.603	0.421	1472.24
13.5	0.023	0.021	-9.32	0.048	109.223	0.001	-93.562	0.032	38.882	0.277	1097.57
14.	0.019	0.013	-33.076	0.044	125.092	0.	-97.746	0.012	-40.51	0.133	590.136
14.5	0.016	0.007	-53.599	0.038	145.655	0.	-99.36	0.003	-79.68	0.047	201.139
15.	0.012	0.004	-70.235	0.033	171.878	0.	-99.856	0.001	-94.601	0.012	-1.399
15.5	0.009	0.002	-82.613	0.028	204.961	0.	-99.975	0.	-98.903	0.002	-76.032
16.	0.007	0.001	-90.871	0.024	246.298	0.	-99.996	0.	-99.828	0.	-95.663
16.5	0.005	0.	-95.616	0.019	297.3	0.	-100.	0.	-99.978	0.	-99.388
17.	0.003	0.	-98.018	0.015	358.956	0.	-100.	0.	-99.997	0.	-99.922
17.5	0.002	0.	-99.107	0.012	430.962	0.	-100.	0.	-100.	0.	-99.987
18.	0.002	0.	-99.559	0.01	510.269	0.	-100.	0.	-100.	0.	-99.994
18.5	0.001	0.	-99.735	0.007	589.365	0.	-100.	0.	-100.001	0.	-99.975
19.	0.001	0.	-99.794	0.006	655.56	0.	-100.	0.	-100.011	0.	-99.68
19.5	0.001	0.	-99.792	0.005	693.436	0.	-99.996	0.	-100.178	0.	-95.169
20.	0.	0.	*	0.004	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.5	0.	0.	*	0.003	*	0.	*	0.	*	0.002	*
21.	0.	0.	*	0.002	*	0.	*	-0.001	*	0.011	*
21.5	0.	0.	*	0.002	*	0.	*	-0.003	*	0.041	*
22.	0.	0.	*	0.002	*	0.	*	-0.011	*	0.111	*
22.5	0.	0.	*	0.002	*	0.001	*	-0.029	*	0.216	*
23.	0.001	0.	-87.168	0.002	239.666	0.004	630.135	-0.063	-11284.	0.287	50919.6
23.5	0.001	0.	-75.226	0.002	183.344	0.009	1203.4	-0.11	-15295.2	0.221	30469.7
24.	0.001	0.	-55.353	0.002	138.878	0.018	1811.23	-0.158	-16559.1	-0.026	-2782.79
Gem.	0.009	0.032	349.905	0.025	291.323	0.06	1519.17	0.057	245.224	-0.108	-181.49
Gem .	0.009	0.032	400.888	0.025	291.323	0.06	1580.2	0.117	2051.43	0.217	3741.4
Gem . aang.	0.011	0.019	71.26	0.025	196.962	0.01	187.943	0.071	1672.58	0.122	3231.69

Tabel 18: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 1/2$, $\alpha = 9/10$ en $\mu = 1/10$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.	*	0.002	*	-0.014	*	0.037	*
0.5	0.	0.	*	0.	*	0.003	*	-0.023	*	0.032	*
1.	0.	0.	*	0.	*	0.006	*	-0.033	*	0.01	*
1.5	0.	0.	*	0.	*	0.01	*	-0.042	*	-0.028	*
2.	0.	0.	*	0.	*	0.015	*	-0.046	*	-0.074	*
2.5	0.	0.	*	0.	*	0.022	*	-0.046	*	-0.116	*
3.	0.	0.001	*	0.001	*	0.028	*	-0.04	*	-0.147	*
3.5	0.	0.002	*	0.001	*	0.035	*	-0.029	*	-0.162	*
4.	0.	0.003	*	0.002	*	0.041	*	-0.015	*	-0.164	*
4.5	0.	0.006	*	0.002	*	0.046	*	0.002	*	-0.155	*
5.	0.001	0.009	1675.16	0.003	542.13	0.051	9542.04	0.02	3678.59	-0.141	-27027.6
5.5	0.001	0.013	1241.29	0.005	357.168	0.053	5234.79	0.037	3658.41	-0.124	-12608.8
6.	0.002	0.018	938.043	0.006	248.535	0.054	3070.78	0.054	3070.78	-0.108	-6449.87
6.5	0.003	0.022	721.336	0.007	180.587	0.053	1895.88	0.069	2485.64	-0.093	-3600.34
7.	0.004	0.025	562.913	0.009	136.038	0.051	1214.3	0.081	2013.54	-0.08	-2171.99
7.5	0.005	0.028	444.404	0.011	105.839	0.046	795.416	0.091	1651.4	-0.067	-1385.36
8.	0.007	0.03	353.654	0.012	84.946	0.041	524.559	0.097	1373.33	-0.052	-893.384
8.5	0.008	0.03	282.467	0.013	70.402	0.035	341.416	0.099	1153.46	-0.034	-530.124
9.	0.009	0.029	225.214	0.014	60.402	0.028	212.798	0.096	970.739	-0.01	-213.396
9.5	0.01	0.027	177.961	0.015	53.812	0.022	119.786	0.089	809.252	0.019	92.1
10.	0.01	0.024	137.921	0.015	49.911	0.015	51.316	0.077	658.125	0.05	387.065
10.5	0.01	0.021	103.112	0.015	48.238	0.01	0.765	0.062	511.762	0.076	643.281
11.	0.01	0.017	72.141	0.014	48.515	0.006	-36.003	0.046	370.118	0.089	814.871
11.5	0.009	0.013	44.074	0.014	50.59	0.003	-61.826	0.03	238.112	0.086	860.685
12.	0.008	0.009	18.355	0.012	54.413	0.002	-78.968	0.018	123.453	0.069	770.921
12.5	0.007	0.006	-5.246	0.011	60.017	0.001	-89.49	0.009	33.129	0.046	580.141
13.	0.005	0.004	-26.685	0.009	67.513	0.	-95.329	0.004	-29.923	0.025	353.681
13.5	0.004	0.002	-45.71	0.008	77.091	0.	-98.193	0.001	-68.1	0.011	155.192
14.	0.003	0.001	-61.96	0.006	89.024	0.	-99.405	0.	-87.728	0.004	19.028
14.5	0.002	0.001	-75.105	0.005	103.674	0.	-99.837	0.	-96.105	0.001	-54.889
15.	0.002	0.	-84.999	0.003	121.495	0.	-99.964	0.	-99.003	0.	-86.408
15.5	0.001	0.	-91.758	0.002	143.014	0.	-99.993	0.	-99.798	0.	-96.802
16.	0.001	0.	-95.829	0.002	168.766	0.	-99.999	0.	-99.967	0.	-99.413
16.5	0.	0.	*	0.001	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.	0.	0.	*	0.001	*	0.	*	0.	*	0.	*
17.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
18.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
19.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
20.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
21.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*
21.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.001	*
22.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	0.	*	0.003	*
22.5	0.	0.	*	0.	*	0.	*	-0.001	*	0.008	*
23.	0.	0.	*	0.	*	0.	*	-0.003	*	0.018	*
23.5	0.	0.	*	0.	*	0.001	*	-0.008	*	0.029	*
24.	0.	0.	*	0.	*	0.002	*	-0.014	*	0.037	*
Gem.	0.002	0.007	132.872	0.004	59.635	0.014	449.895	0.014	453.454	-0.018	-1031.46
Gem .	0.002	0.007	152.762	0.004	59.635	0.014	489.038	0.026	477.153	0.045	1222.36
Gem . aang.	0.002	0.003	29.755	0.004	37.319	0.001	34.865	0.009	86.735	0.019	169.737

Tabel 19: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 1/2$, $\alpha = 9/10$ en $\mu = 3/20$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.199	*	0.215	*	0.169	*	0.151	*
0.5	0.	0.	*	0.2	*	0.221	*	0.177	*	0.153	*
1.	0.	0.	*	0.201	*	0.226	*	0.185	*	0.157	*
1.5	0.	0.	*	0.203	*	0.232	*	0.193	*	0.162	*
2.	0.	0.003	*	0.204	*	0.237	*	0.202	*	0.168	*
2.5	0.	0.01	*	0.206	*	0.242	*	0.211	*	0.175	*
3.	0.	0.023	*	0.208	*	0.247	*	0.219	*	0.182	*
3.5	0.001	0.043	3331.16	0.21	16468.1	0.25	19672.6	0.227	17831.3	0.19	14887.4
4.	0.003	0.068	2294.96	0.212	7384.81	0.254	8857.46	0.235	8191.41	0.197	6865.44
4.5	0.005	0.094	1615.28	0.214	3812.06	0.256	4581.49	0.242	4320.95	0.204	3633.36
5.	0.009	0.119	1164.65	0.216	2188.84	0.258	2631.37	0.249	2530.22	0.211	2131.99
5.5	0.015	0.143	860.005	0.218	1364.22	0.259	1637.91	0.254	1605.76	0.217	1353.67
6.	0.022	0.164	649.316	0.22	906.593	0.26	1085.37	0.26	1085.37	0.222	913.737
6.5	0.03	0.182	500.18	0.222	633.932	0.259	755.497	0.264	771.319	0.226	647.225
7.	0.04	0.196	392.216	0.224	461.805	0.258	546.781	0.268	570.734	0.23	476.435
7.5	0.05	0.208	312.391	0.226	347.861	0.256	408.196	0.271	436.478	0.233	361.837
8.	0.062	0.217	252.21	0.227	269.417	0.254	312.373	0.273	343.035	0.235	281.992
8.5	0.073	0.223	206.019	0.228	213.627	0.25	243.801	0.274	275.816	0.237	224.627
9.	0.084	0.227	169.984	0.229	172.864	0.247	193.268	0.274	226.075	0.237	182.392
9.5	0.095	0.229	141.45	0.23	142.405	0.242	155.073	0.274	188.349	0.238	150.709
10.	0.105	0.23	118.55	0.231	119.22	0.237	125.563	0.273	159.099	0.238	126.634
10.5	0.115	0.229	99.943	0.231	101.301	0.232	102.328	0.271	135.958	0.239	108.218
11.	0.123	0.228	84.655	0.231	87.277	0.226	83.731	0.268	117.292	0.239	94.137
11.5	0.131	0.225	71.969	0.23	76.188	0.221	68.638	0.264	101.947	0.24	83.463
12.	0.137	0.222	61.346	0.23	67.348	0.215	56.247	0.26	89.085	0.241	75.526
12.5	0.143	0.218	52.382	0.229	60.25	0.209	45.981	0.254	78.087	0.243	69.816
13.	0.147	0.213	44.768	0.228	54.517	0.203	37.423	0.248	68.487	0.245	65.915
13.5	0.151	0.209	38.266	0.226	49.856	0.197	30.264	0.242	59.935	0.247	63.458
14.	0.154	0.204	32.693	0.225	46.042	0.191	24.276	0.234	52.164	0.25	62.1
14.5	0.156	0.2	27.905	0.223	42.893	0.186	19.289	0.226	44.977	0.252	61.495
15.	0.158	0.195	23.792	0.221	40.262	0.182	15.173	0.218	38.234	0.254	61.294
15.5	0.159	0.191	20.265	0.219	38.027	0.178	11.83	0.209	31.841	0.256	61.147
16.	0.16	0.187	17.254	0.217	36.086	0.174	9.184	0.201	25.745	0.256	60.714
16.5	0.16	0.184	14.705	0.215	34.354	0.172	7.171	0.192	19.931	0.256	59.682
17.	0.16	0.181	12.569	0.213	32.759	0.17	5.738	0.183	14.411	0.253	57.79
17.5	0.161	0.178	10.811	0.211	31.239	0.168	4.836	0.175	9.221	0.249	54.848
18.	0.161	0.176	9.394	0.209	29.746	0.168	4.418	0.168	4.418	0.243	50.756
18.5	0.161	0.175	8.291	0.207	28.241	0.168	4.435	0.161	0.066	0.235	45.518
19.	0.162	0.174	7.47	0.205	26.692	0.17	4.835	0.156	-3.763	0.225	39.246
19.5	0.162	0.174	6.905	0.203	25.08	0.172	5.563	0.151	-7.005	0.215	32.15
20.	0.164	0.174	6.567	0.202	23.394	0.174	6.56	0.148	-9.604	0.204	24.525
20.5	0.165	0.175	6.427	0.201	21.629	0.178	7.759	0.146	-11.523	0.192	16.717
21.	0.167	0.177	6.454	0.2	19.789	0.182	9.095	0.145	-12.749	0.182	9.095
21.5	0.169	0.18	6.619	0.199	17.886	0.186	10.5	0.146	-13.296	0.172	2.005
22.	0.171	0.183	6.889	0.198	15.934	0.191	11.908	0.148	-13.205	0.164	-4.258
22.5	0.174	0.186	7.234	0.198	13.951	0.197	13.255	0.152	-12.542	0.157	-9.479
23.	0.177	0.19	7.622	0.198	11.96	0.203	14.486	0.157	-11.394	0.153	-13.537
23.5	0.18	0.195	8.025	0.199	9.984	0.209	15.552	0.163	-9.861	0.151	-16.408
24.	0.184	0.2	8.415	0.199	8.044	0.215	16.418	0.169	-8.05	0.151	-18.152
Gem.	0.102	0.159	259.551	0.214	725.233	0.214	854.156	0.213	802.342	0.213	682.351
Gem .	0.102	0.159	259.551	0.214	725.233	0.214	854.156	0.213	806.954	0.213	684.875
Gem . aang.	0.156	0.195	28.558	0.214	40.343	0.192	26.636	0.198	40.134	0.221	49.934

Tabel 20: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 1$, $\alpha = 1/10$ en $\mu = 1/10$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.056	*	0.066	*	0.038	*	0.033	*
0.5	0.	0.	*	0.056	*	0.069	*	0.041	*	0.032	*
1.	0.	0.	*	0.057	*	0.072	*	0.045	*	0.031	*
1.5	0.	0.	*	0.058	*	0.076	*	0.05	*	0.031	*
2.	0.	0.001	*	0.06	*	0.079	*	0.054	*	0.033	*
2.5	0.	0.003	*	0.061	*	0.082	*	0.059	*	0.034	*
3.	0.	0.007	*	0.063	*	0.084	*	0.064	*	0.037	*
3.5	0.001	0.013	1742.84	0.064	9250.24	0.087	12522.5	0.069	10002.7	0.04	5751.92
4.	0.001	0.02	1259.56	0.066	4420.94	0.089	5992.4	0.074	5016.3	0.044	2902.46
4.5	0.003	0.028	931.243	0.067	2412.2	0.09	3264.07	0.079	2859.06	0.047	1668.9
5.	0.004	0.036	704.154	0.069	1453.04	0.091	1957.64	0.084	1792.32	0.051	1055.58
5.5	0.007	0.044	543.585	0.071	943.781	0.092	1262.79	0.088	1208.01	0.055	716.902
6.	0.01	0.051	427.436	0.072	649.91	0.092	861.248	0.092	861.248	0.059	514.138
6.5	0.013	0.057	341.548	0.074	468.679	0.092	613.188	0.096	641.853	0.063	384.841
7.	0.017	0.063	276.713	0.075	350.754	0.091	451.331	0.099	495.628	0.066	298.222
7.5	0.02	0.067	226.83	0.076	270.594	0.09	340.814	0.101	393.884	0.069	237.931
8.	0.024	0.07	187.775	0.077	214.119	0.089	262.414	0.103	320.478	0.072	194.734
8.5	0.028	0.073	156.707	0.078	173.142	0.087	204.962	0.104	265.841	0.075	163.141
9.	0.032	0.075	131.632	0.078	142.679	0.084	161.676	0.104	224.041	0.077	139.741
9.5	0.036	0.076	111.124	0.079	119.576	0.082	128.272	0.104	191.257	0.08	122.331
10.	0.039	0.076	94.149	0.079	101.765	0.079	101.96	0.103	164.942	0.082	109.429
10.5	0.042	0.075	79.943	0.079	87.846	0.076	80.869	0.102	143.344	0.084	100.003
11.	0.044	0.074	67.939	0.078	76.848	0.072	63.714	0.1	125.232	0.086	93.295
11.5	0.046	0.073	57.707	0.078	68.075	0.069	49.593	0.097	109.718	0.087	88.724
12.	0.048	0.071	48.92	0.077	61.022	0.066	37.867	0.094	96.154	0.089	85.818
12.5	0.049	0.069	41.328	0.076	55.308	0.063	28.071	0.09	84.061	0.09	84.169
13.	0.05	0.067	34.737	0.075	50.644	0.06	19.87	0.086	73.083	0.091	83.418
13.5	0.05	0.065	28.997	0.074	46.804	0.057	13.013	0.082	62.958	0.092	83.234
14.	0.05	0.062	23.993	0.072	43.607	0.054	7.317	0.077	53.494	0.092	83.319
14.5	0.05	0.06	19.634	0.071	40.909	0.051	2.645	0.073	44.555	0.092	83.4
15.	0.05	0.058	15.849	0.069	38.588	0.049	-1.106	0.068	36.047	0.091	83.236
15.5	0.049	0.056	12.584	0.068	36.545	0.047	-4.014	0.063	27.911	0.09	82.62
16.	0.049	0.054	9.797	0.066	34.697	0.046	-6.139	0.059	20.112	0.089	81.379
16.5	0.048	0.052	7.453	0.064	32.976	0.045	-7.53	0.054	12.639	0.087	79.369
17.	0.048	0.05	5.523	0.063	31.325	0.044	-8.226	0.05	5.498	0.084	76.475
17.5	0.047	0.049	3.984	0.061	29.698	0.043	-8.262	0.047	-1.287	0.082	72.605
18.	0.047	0.048	2.814	0.06	28.059	0.043	-7.676	0.043	-7.676	0.078	67.693
18.5	0.046	0.047	1.993	0.059	26.385	0.043	-6.504	0.04	-13.613	0.075	61.695
19.	0.046	0.047	1.499	0.057	24.659	0.044	-4.791	0.037	-19.028	0.071	54.605
19.5	0.046	0.046	1.31	0.056	22.873	0.045	-2.59	0.035	-23.836	0.067	46.46
20.	0.046	0.047	1.4	0.056	21.028	0.046	0.037	0.033	-27.942	0.063	37.357
20.5	0.046	0.047	1.743	0.055	19.13	0.047	3.013	0.032	-31.248	0.059	27.467
21.	0.046	0.047	2.307	0.054	17.192	0.049	6.253	0.031	-33.664	0.054	17.035
21.5	0.047	0.048	3.059	0.054	15.229	0.051	9.658	0.03	-35.115	0.05	6.384
22.	0.048	0.05	3.962	0.054	13.259	0.054	13.123	0.031	-35.552	0.046	-4.114
22.5	0.049	0.051	4.977	0.054	11.304	0.057	16.536	0.032	-34.966	0.042	-14.057
23.	0.05	0.053	6.064	0.054	9.382	0.06	19.789	0.033	-33.389	0.038	-23.061
23.5	0.051	0.055	7.181	0.055	7.515	0.063	22.778	0.035	-30.898	0.035	-30.794
24.	0.053	0.057	8.288	0.056	5.721	0.066	25.411	0.038	-27.611	0.033	-37.014
Gem.	0.032	0.048	155.924	0.066	447.511	0.067	581.387	0.066	509.725	0.064	321.04
Gem .	0.032	0.048	155.924	0.066	447.511	0.067	583.707	0.066	524.249	0.064	325.491
Gem . aang.	0.048	0.057	20.66	0.065	36.496	0.055	19.943	0.058	48.813	0.073	62.008

Tabel 21: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 1$, $\alpha = 1/10$ en $\mu = 3/20$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.079	*	0.215	*	-0.191	*	-1.7	*
0.5	0.	0.	*	0.086	*	0.267	*	-0.048	*	-1.052	*
1.	0.	0.	*	0.095	*	0.315	*	0.077	*	-0.557	*
1.5	0.	0.001	*	0.107	*	0.358	*	0.179	*	-0.215	*
2.	0.	0.009	*	0.121	*	0.394	*	0.261	*	0.014	*
2.5	0.001	0.035	4532.93	0.136	17947.7	0.425	56250.8	0.326	43057.2	0.168	22105.
3.	0.003	0.086	2637.84	0.153	4769.35	0.451	14212.4	0.377	11854.8	0.272	8547.05
3.5	0.01	0.158	1552.79	0.172	1698.89	0.472	4839.58	0.417	4263.75	0.346	3517.73
4.	0.023	0.237	941.045	0.191	737.594	0.488	2041.77	0.449	1866.58	0.398	1643.19
4.5	0.045	0.313	590.54	0.21	364.993	0.501	1006.91	0.473	945.491	0.435	860.568
5.	0.078	0.375	383.619	0.23	195.86	0.51	556.603	0.492	533.979	0.461	494.082
5.5	0.119	0.423	257.168	0.248	109.503	0.515	334.473	0.506	327.297	0.479	304.506
6.	0.165	0.457	177.167	0.266	61.42	0.517	213.605	0.517	213.605	0.491	197.962
6.5	0.212	0.477	124.873	0.282	32.954	0.515	142.528	0.523	146.534	0.496	133.812
7.	0.257	0.488	89.648	0.297	15.429	0.51	98.028	0.527	104.851	0.496	92.819
7.5	0.297	0.491	65.253	0.31	4.462	0.501	68.659	0.529	78.017	0.49	65.077
8.	0.329	0.487	47.901	0.322	-2.323	0.488	48.33	0.528	60.463	0.477	44.992
8.5	0.353	0.478	35.213	0.331	-6.281	0.472	33.563	0.527	49.133	0.456	28.961
9.	0.369	0.463	25.638	0.339	-8.211	0.451	22.232	0.525	42.367	0.421	14.118
9.5	0.376	0.445	18.124	0.344	-8.59	0.425	12.94	0.525	39.383	0.367	-2.61
10.	0.377	0.421	11.931	0.348	-7.688	0.394	4.687	0.527	40.065	0.28	-25.54
10.5	0.37	0.394	6.502	0.349	-5.632	0.358	-3.314	0.536	44.898	0.142	-61.681
11.	0.357	0.362	1.4	0.348	-2.435	0.315	-11.743	0.553	54.956	-0.081	-122.54
11.5	0.339	0.326	-3.747	0.346	1.992	0.267	-21.201	0.582	71.708	-0.422	-224.53
12.	0.316	0.287	-9.275	0.341	7.841	0.215	-32.176	0.62	96.116	-0.888	-380.614
12.5	0.29	0.245	-15.486	0.335	15.43	0.16	-44.869	0.655	126.061	-1.348	-565.169
13.	0.26	0.201	-22.646	0.326	25.233	0.107	-58.896	0.655	151.634	-1.415	-643.712
13.5	0.229	0.158	-30.944	0.315	37.935	0.062	-72.976	0.577	152.542	-0.635	-377.87
14.	0.196	0.117	-40.428	0.303	54.515	0.029	-85.074	0.412	109.917	0.673	243.325
14.5	0.164	0.08	-50.914	0.289	76.365	0.011	-93.423	0.218	33.01	1.296	691.166
15.	0.133	0.051	-61.905	0.273	105.462	0.003	-97.79	0.08	-39.56	0.891	570.698
15.5	0.105	0.029	-72.585	0.256	144.591	0.001	-99.448	0.02	-80.864	0.326	211.967
16.	0.08	0.014	-81.967	0.238	197.587	0.	-99.896	0.003	-95.747	0.072	-10.32
16.5	0.059	0.006	-89.227	0.219	269.478	0.	-99.984	0.	-99.293	0.01	-82.375
17.	0.043	0.003	-94.057	0.199	366.176	0.	-99.997	0.	-99.897	0.001	-97.189
17.5	0.03	0.001	-96.791	0.18	492.973	0.	-99.999	0.	-99.983	0.	-99.481
18.	0.021	0.	-98.118	0.161	650.705	0.	-100.	0.	-100.	0.	-99.741
18.5	0.015	0.	-98.67	0.143	829.106	0.	-99.999	0.	-100.031	0.	-99.044
19.	0.012	0.	-98.81	0.127	1000.48	0.	-99.991	0.	-100.365	0.001	-90.332
19.5	0.009	0.	-98.664	0.112	1122.58	0.	-99.897	0.	-104.348	0.01	4.579
20.	0.008	0.	-98.198	0.1	1157.28	0.	-98.958	-0.003	-140.687	0.065	718.374
20.5	0.008	0.	-97.223	0.09	1093.93	0.001	-92.298	-0.019	-351.556	0.288	3733.7
21.	0.008	0.	-95.342	0.081	954.853	0.003	-61.972	-0.074	-1063.76	0.737	9435.14
21.5	0.009	0.001	-91.848	0.076	779.267	0.011	25.162	-0.196	-2380.87	0.881	10144.
22.	0.01	0.001	-85.661	0.072	602.895	0.029	185.627	-0.353	-3545.7	-0.091	-992.826
22.5	0.013	0.003	-75.427	0.071	447.715	0.062	379.911	-0.454	-3624.99	-1.666	-13044.4
23.	0.017	0.007	-59.95	0.071	322.108	0.107	534.885	-0.441	-2716.95	-2.511	-15001.8
23.5	0.023	0.014	-38.939	0.074	225.633	0.16	604.546	-0.336	-1579.87	-2.339	-10413.5
24.	0.031	0.027	-13.696	0.079	153.803	0.215	591.669	-0.191	-716.646	-1.7	-5578.33
Gem.	0.126	0.167	199.573	0.209	755.775	0.231	1643.57	0.222	967.821	-0.096	322.227
Gem .	0.126	0.167	269.798	0.209	757.455	0.231	1711.89	0.316	1663.38	0.583	2281.97
Gem . aang.	0.122	0.095	60.012	0.204	384.541	0.087	137.944	0.259	618.001	0.647	2543.58

Tabel 22: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 1$, $\alpha = 9/10$ en $\mu = 1/10$.

tijd	EXT	RND	$\Delta\%$	MOL	$\Delta\%$	PSA	$\Delta\%$	UA2	$\Delta\%$	UA3	$\Delta\%$
0.	0.	0.	*	0.006	*	0.066	*	-0.185	*	-0.585	*
0.5	0.	0.	*	0.008	*	0.097	*	-0.155	*	-0.672	*
1.	0.	0.	*	0.011	*	0.132	*	-0.101	*	-0.605	*
1.5	0.	0.	*	0.016	*	0.166	*	-0.035	*	-0.459	*
2.	0.	0.003	*	0.022	*	0.199	*	0.033	*	-0.297	*
2.5	0.	0.013	*	0.03	*	0.229	*	0.095	*	-0.15	*
3.	0.002	0.034	1640.15	0.04	1921.13	0.256	12913.1	0.15	7530.26	-0.03	-1650.71
3.5	0.006	0.066	1045.06	0.052	797.865	0.278	4726.11	0.197	3313.29	0.063	1000.59
4.	0.013	0.106	686.047	0.065	387.677	0.296	2106.29	0.236	1653.95	0.135	904.987
4.5	0.026	0.148	464.305	0.081	207.189	0.31	1083.19	0.267	919.05	0.189	618.704
5.	0.045	0.189	323.183	0.097	116.419	0.32	618.666	0.293	556.888	0.228	410.929
5.5	0.068	0.224	230.544	0.113	66.177	0.326	381.596	0.313	361.782	0.255	276.871
6.	0.094	0.252	167.896	0.128	36.445	0.328	248.873	0.328	248.873	0.273	190.281
6.5	0.121	0.272	124.342	0.143	18.089	0.326	168.775	0.34	179.833	0.282	132.444
7.	0.147	0.285	93.264	0.157	6.544	0.32	117.282	0.348	135.96	0.283	91.831
7.5	0.17	0.29	70.526	0.169	-0.64	0.31	82.259	0.353	107.544	0.275	61.278
8.	0.189	0.289	53.456	0.179	-4.853	0.296	57.103	0.357	89.312	0.256	35.981
8.5	0.202	0.283	40.271	0.188	-6.913	0.278	37.965	0.359	78.354	0.226	12.24
9.	0.209	0.271	29.742	0.193	-7.304	0.256	22.448	0.361	73.099	0.181	-13.291
9.5	0.21	0.254	20.986	0.197	-6.298	0.229	8.956	0.363	72.767	0.118	-43.922
10.	0.207	0.234	13.346	0.198	-4.025	0.199	-3.638	0.366	76.965	0.036	-82.465
10.5	0.198	0.211	6.305	0.197	-0.495	0.166	-16.137	0.367	85.2	-0.058	-129.036
11.	0.186	0.185	-0.556	0.194	4.38	0.132	-29.061	0.364	96.103	-0.14	-175.698
11.5	0.17	0.157	-7.592	0.188	10.798	0.097	-42.583	0.35	106.296	-0.167	-198.362
12.	0.151	0.128	-15.099	0.18	19.077	0.066	-56.409	0.316	109.458	-0.084	-155.279
12.5	0.131	0.1	-23.303	0.17	29.687	0.04	-69.716	0.258	97.347	0.112	-14.776
13.	0.11	0.075	-32.337	0.158	43.3	0.021	-81.299	0.181	64.766	0.313	183.911
13.5	0.09	0.052	-42.189	0.144	60.859	0.009	-90.058	0.104	16.323	0.373	316.524
14.	0.07	0.033	-52.651	0.129	83.681	0.003	-95.596	0.047	-33.389	0.274	289.42
14.5	0.053	0.02	-63.28	0.113	113.6	0.001	-98.423	0.016	-70.08	0.133	149.541
15.	0.038	0.01	-73.417	0.097	153.145	0.	-99.555	0.004	-89.723	0.043	12.563
15.5	0.027	0.005	-82.307	0.081	205.746	0.	-99.902	0.001	-97.34	0.01	-63.81
16.	0.018	0.002	-89.312	0.066	275.864	0.	-99.983	0.	-99.478	0.001	-91.569
16.5	0.011	0.001	-94.161	0.052	368.792	0.	-99.997	0.	-99.917	0.	-98.499
17.	0.007	0.	-97.008	0.04	489.548	0.	-100.	0.	-99.988	0.	-99.763
17.5	0.004	0.	-98.461	0.03	639.737	0.	-100.	0.	-99.998	0.	-99.954
18.	0.002	0.	-99.128	0.022	811.301	0.	-100.	0.	-100.	0.	-99.974
18.5	0.001	0.	-99.396	0.016	978.515	0.	-100.	0.	-100.005	0.	-99.883
19.	0.001	0.	-99.459	0.011	1096.77	0.	-99.997	0.	-100.083	0.	-98.467
19.5	0.001	0.	-99.371	0.008	1120.52	0.	-99.957	0.	-101.292	0.	-77.67
20.	0.001	0.	-99.082	0.006	1035.23	0.	-99.438	0.	-116.152	0.001	145.372
20.5	0.	0.	*	0.005	*	0.	*	-0.001	*	0.008	*
21.	0.	0.	*	0.004	*	0.	*	-0.004	*	0.036	*
21.5	0.001	0.	-93.713	0.003	497.195	0.001	49.668	-0.014	-2641.03	0.102	18208.4
22.	0.001	0.	-87.103	0.003	351.28	0.003	338.107	-0.041	-5850.15	0.186	26262.2
22.5	0.001	0.	-74.64	0.003	241.996	0.009	815.919	-0.086	-8984.66	0.183	18671.9
23.	0.001	0.001	-53.756	0.004	163.638	0.021	1339.75	-0.14	-9905.25	-0.009	-732.753
23.5	0.002	0.002	-23.361	0.005	108.471	0.04	1695.91	-0.179	-8211.17	-0.326	-14860.2
24.	0.004	0.004	14.514	0.006	69.671	0.066	1774.11	-0.185	-5357.01	-0.585	-16738.9
Gem.	0.061	0.086	69.862	0.082	255.098	0.12	549.067	0.115	-534.353	0.008	660.225
Gem .	0.061	0.086	135.196	0.082	256.344	0.12	617.71	0.161	1186.33	0.178	2114.31
Gem . aang.	0.051	0.042	56.374	0.074	309.563	0.03	265.352	0.104	1476.18	0.11	3384.72

Tabel 23: De benaderingen voor waarden $\bar{\lambda} = 1$, $\alpha = 9/10$ en $\mu = 3/20$.