

MASTER

Pseudorotatie voor de vergelijking $q_{tt} = -q_{xxxx} - q_{yyyy}$: de vergelijking $x_{fxxx} = \text{alfaf}$

Brands, Hans R.

Award date:
1978

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Pseudorotatie voor de vergelijking

$$q_{tt} = -q_{xxxx} - q_{yyyy}.$$

De vergelijking $xf_{xxx} = -\alpha f$.

Verslag van het afstudeerwerk van Hans R. Brands in de vakgroep
Theoretisch Natuurkunde onder leiding van Prof. dr. L.J.F. Broer
en Drs. L.C.J.M. Mooren.

Eindhoven, december 1977.

I N H O U D

Notaties	2
1. Pseudorotatie voor de vergelijking $q_{tt} = -q_{xxxx} - q_{yyyy}$	
1.1. Inleiding	3
1.2. De natuurlijke coördinaten \hat{G} en $\hat{\theta}$	4
1.3. De natuurlijke coördinaten in het geval $\hat{V} = k^2 + l^2$	7
1.4. De natuurlijke coördinaten in het geval $\hat{V} = k^4 + l^4$	8
1.5. Beschrijving van $\cos j\phi$ en $\sin j\phi$ in termen van $\cos j\theta$ en $\sin j\theta$	9
1.6. De fourierreeks van $v = \cos m\theta = \cos \frac{m\pi}{4K} - F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})$	11
2. De vergelijking $x f''''(x) = -\alpha f(x)$	
2.1 Inleiding	13
2.2. Oplossen door machtrekssubstitutie	13
2.3. Oplossen door Laplacetransformatie	15
2.4. Gelijkstellen	17
2.5. Inverse Laplacetransformatie	17
2.6. Tabel van de Moorenfuncties voor enkele reële waarden van x	19
3. Appendix	
3.1. De fourierreeks van $\cos^n \alpha$	20
3.2. Enkele eigenschappen van de amplitudefunctie	22
3.3. Formules: Bessel- en Laplacetransformaties	24
Literatuur	26

Notaties

De notatie van de elliptische funkties en integralen is identiek aan die van {ByF}

$\text{am}(u,k) = \text{amu} = \psi$	amplitudefunctie	
$\text{cn}(u,k) = \text{cnu}$	cosinus amplitudefunctie	
$\text{dn}(u,k) = \text{dnu}$	delta amplitudefunctie	
$\text{sn}(u,k) = \text{snu}$	sinus amplitudefunctie	
k	modulus van elliptische funkties en integralen	
$k' = (1-k^2)^{\frac{1}{2}}$	complementaire modulus	
$F(\psi,k) = u$	eerste elliptische integraal; inverse van amu	
$K = K(k) = F(\frac{1}{2}\pi,k)$	volledige eerste elliptische integraal	
$K' = K(k')$	geassocieerde volledige eerste elliptische integraal	
$q = \exp(-\pi K'/K)$	Jacobi's nome	
$K_1(z)$	gemodificeerde Hankelfunctie v.d. eerste orde	{AS 9.6.e.v.}
$J_1(z)$	Besselfunctie v.d. eerste orde	{AS 9.1.e.v.}
$\text{erf}(z)$	foutenintegraal	{AS 7.1.1.}
$\text{erfc}(z)$	complementaire foutenintegraal	{AS 7.1.2.}
M_0, M_e, M_1	Moorenfuncties	{zie tekst}
g_0, g_e, g_1	Laplacegetransformeerden van de Moorenfuncties	{zie tekst}
$\text{Ei}(z)$	exponential integraal	{GHI.312}
$I(z,\alpha)$	Abramowitz-Laporte integraal	{zie tekst}
$f_1(x)$	Abramowitz-Laporte functie	{AS 27.5.}
\mathcal{P}_z	Laplaceoperator	{zie tekst}
$M(a,b,z)$	Kummerfunctie	{AS 13.1.2.}

1. PSEUDOROTATIE VOOR DE VERGELIJKING

$$\underline{q_{tt} = -q_{xxxx} - q_{yyyy}}$$

1.1. Inleiding

Bij het zoeken naar behoudswetten van bewegingsvergelijkingen van het type

$$q_{tt} = -Vq \quad (1)$$

waarin V een hermitische operator is, kunnen we gebruik maken van commutatoren K van V .

Immers, als V met K commuteert, gelden de volgende behoudswetten (zie $\{VaB\}$):

a) K hermitisch:

$$\frac{1}{2}(q_t, Kq_t) + (q, VKq) = \text{constant} \quad (2)$$

b) K antihermitisch:

$$(q_t, Kq) = \text{constant} \quad (3)$$

In dit verslag wordt gekeken naar antihermitische commutatoren van de operatoren

$$V_1 = -\partial_x^2 - \partial_y^2 \quad (4)$$

en
$$V_2 = \partial_x^4 + \partial_y^4 \quad (5)$$

Na fouriertransformatie worden "natuurlijke coördinaten" ingevoerd en worden de eigenwaardevergelijkingen voor de bijbehorende operatoren (de pseudorotatie- en pseudodilatatieoperator) opgelost.

Ten behoeve van de terugtransformatie wordt getracht de eigenfuncties van de \hat{V}_{1op} uit te drukken in de eigenfuncties van de \hat{V}_{2op} en omgekeerd.

1.2. De natuurlijke coördinaten \hat{G} en $\hat{\theta}$

Zij in de vergelijking

$$q_{tt} = -Vq \quad (1)$$

$$V = V_1 = -\partial_x^2 - \partial_y^2 \quad (2)$$

of
$$V = V_2 = \partial_x^4 + \partial_y^4. \quad (3)$$

Een antihermitische kommutator K van V is

$$K = xVy - yVx. \quad (4)$$

Fouriertransformatie van (1) en (2), resp. (1) en (3), resp. (4) levert:

$$\hat{V}_1 = \omega^2 = k^2 + l^2 \quad (5)$$

$$\hat{V}_2 = \omega^2 = k^4 + l^4 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \partial_k (\hat{V} \partial_l) - \partial_l (\hat{V} \partial_k) \\ &= \hat{V}_k \partial_l - \hat{V}_l \partial_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Deze operator \hat{K} noemen we \hat{V}_{op} , de bij \hat{V} horende kommuterende antihermitische operator.

We zoeken straks een n in

$$\hat{G} = \hat{V}^n \quad (8)$$

zodanig dat \hat{G}_{op} éénwaardige periodieke eigenfuncties heeft van de vorm

$$\hat{u} = \exp i \lambda \hat{\theta} \quad (9)$$

met:
$$\hat{\theta} = \hat{\theta} \left(\frac{1}{k} \right) \quad (10)$$

We laten voor 't gemak de dakjes weg.

De eigenwaardevergelijking voor G_{op} wordt:

$$G_{op} u = G_{k1} u_1 - G_{1k} u_k = i\lambda u$$

met (9):

$$G_{k1} \theta_1 - \theta_k G_{1k} = 1 \quad (11)$$

Deze regel wordt door Broer en Mooren de "oppervlakteregel" genoemd (zie hieronder).

Voor G_{op} geldt:

$$\begin{aligned} G_{op} &= G_{k1} \partial_1 - G_{1k} \partial_k = G_{k1} \theta_1 \partial_\theta + G_{k1} G_{1k} \partial_G - G_{1k} G_{k1} \partial_G - G_{1k} \theta_k \partial_\theta \\ &= \partial_\theta \end{aligned} \quad (12)$$

G_{op} is dus te beschouwen als een rotatieoperator. Hij wordt de "pseudorotatieoperator" genoemd.

Analoog geldt voor θ_{op} :

$$\theta_{op} = -\partial_G, \quad (13)$$

zodat θ_{op} te beschouwen is als een dilatatieoperator, de "pseudodilatatieoperator"

G en θ worden de natuurlijke coördinaten van het probleem genoemd.

Het verband tussen V_{op} en G_{op} wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} G_{op} &= G_{k1} \partial_1 - G_{1k} \partial_k = \\ &= (v^n)_k \partial_1 - (v^n)_1 \partial_k = \\ &= n v^{n-1} (v_k \partial_1 - v_1 \partial_k) \\ &= n G^{\frac{n-1}{n}} V_{op} \\ V_{op} &= n^{-1} G^{-\frac{n-1}{n}} \partial_\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

(11) wordt de oppervlakteregel genoemd omdat er een meetkundige interpretatie voor is:

De raakvector \underline{a} in het punt $(k, l, 0)$ (we schrijven even in drie dimensies) aan de kromme $G = \text{constant}$ ($\partial_\theta = 0$) is:

$$\underline{a} = (-G_l, G_k, 0).$$

De richtingsvector \underline{b} in het punt $(k, l, 0)$ van de rechte $\theta = \text{constant}$ ($\partial_G = 0$) is:

$$\underline{b} = (-\theta_l, \theta_k, 0)$$

Het oppervlak door \underline{a} en \underline{b} opgespannen heeft de vector

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = (0, 0, G_k \theta_l - \theta_k G_l)$$

volgens (11) is dus

$$\underline{c} = (0, 0, 1).$$

G_{op} verdeelt het oppervlak tussen twee krommen $G = \text{constant}$ dus in gelijke stukken; θ_{op} verdeelt het oppervlak tussen twee rechten $\theta = \text{constant}$ in gelijke stukken.

1.3. De natuurlijke coördinaten in het geval $\hat{V} = k^2 + l^2$

We bepalen n in $G = V^n$ (1.1.8.), door G en θ in te vullen in de oppervlakte-regel 1.2.11.

Dan vinden we

$$n(k^2 + l^2)^{n-1} (2 \frac{l^2}{k^2} \theta' + 2 \theta') = 1 \tag{1}$$

Daar ook $\theta' = \theta'(\frac{1}{k})$, moet $n=1$ zijn; dus:

$$G = V = k^2 + l^2 \tag{2}$$

en
$$\theta' = \frac{1}{2} (1 + \frac{l^2}{k^2})^{-1}$$

zodat
$$\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{k}} (1+z^2)^{-1} dz = \frac{1}{2} \text{Arctan } \frac{1}{k} \tag{3}$$

Schrijven we $R^2 = l^2 + k^2$ en $\phi = \text{Arctan } \frac{1}{k}$, dan is

$$G_{op} = \partial_{\frac{1}{2}\phi} \tag{4}$$

en

$$\theta_{op} = -\partial_{R^2} \tag{5}$$

De eigenfuncties van G_{op} worden dus

$$u = \exp(i\lambda\theta) = \exp(i\lambda\frac{1}{2}\phi)$$

met $\lambda \in \mathbb{Z}$, dat

$$u(\phi = \phi' + 2\pi) = u(\phi = \phi')$$

dus
$$\lambda = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De verzameling

$$u = \exp(im\phi), \quad m \in \{0, N\} \tag{6}$$

vormt een orthonormale basis B_1 van de funktieruimte.

Een andere orthonormale basis B_2 van de funktieruimte vormt de verzameling

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos m\phi \\ u &= \sin m\phi \end{aligned} \right\} m \in \{0, N\} \tag{7}$$

1.4. De natuurlijke coördinaten in het geval $V = k^4 + 1^4$

We bepalen n in $G = V^n$ weer door invullen in de oppervlakteregel 1.2.11.

Dat geeft:

$$nV^{n-1}\theta'(4k^2 + 4\frac{1^4}{k^2}) = 1$$

$$nk^{(n-1)}(1 + \frac{1^4}{k^4})^{n-1} 4k^2(1 + \frac{1^4}{k^4})\theta' = 1 \quad (1)$$

waaruit volgt:

$$n = \frac{1}{2} ; \quad G = V^{\frac{1}{2}} = (k^4 + 1^4)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$2(1 + \frac{1^4}{k^4})^{\frac{1}{2}} \theta' = 1$$

$$\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{k}} (1+z^4)^{-\frac{1}{2}} dz \quad \{\text{ObMa: Tabelle B; ByF: 263.50}\}$$

$$= \frac{1}{2} F(\arccos\{(1 - \frac{1^2}{k^2})(1 + \frac{1^2}{k^2})^{-1}\}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{2} F(\arccos\{(1 - \text{tg}^2\phi)(1 + \text{tg}^2\phi)^{-1}\}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{2} F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2}) \quad (3)$$

waarin $F(\psi, k)$ de eerste elliptische integraal is.

Ook hier is

$$G_{\text{op}} = \partial_{\theta} = \partial_{\frac{1}{2}F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})} \quad (4)$$

en $\theta_{\text{op}} = -\partial_G = -\partial_{(1^4 + k^4)^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$

De eigenfuncties van G_{op} worden hier dus

$$u = \exp i\lambda\theta = \exp i\frac{1}{2}\lambda F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2}).$$

Opdat $u(\phi = \phi' + 2\pi) = u(\phi = \phi')$

is $\lambda = n \frac{\pi}{K}, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Een orthonormale basis B_3 voor de funktieruimte is hier

$$u = \exp i\frac{n\pi}{4K} F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2}), \quad n \in \{0, N\} \quad (6)$$

of B_4 :

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos\left(\frac{m\pi}{4K} F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})\right) \\ u &= \sin\left(\frac{m\pi}{4K} F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})\right) \end{aligned} \right\} m \in \{0, N\} \quad (7).$$

1.5. Beschrijving van $\cos(j\phi)$ en $\sin(j\phi)$ in termen van $\cos(j\theta)$ en $\sin(j\theta)$.

Volgens ByF 908.02 is

$$cn(u) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1+q^{2m+1}} \cos\left\{(2m+1) \frac{\pi u}{2K}\right\} \quad (1)$$

waarin cn de cosinus amplitudefunctie en $q = \exp(-\pi \frac{K'}{K})$ (Jacobi's nome) is.

Gebruik:

$$u = F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2}) \quad (2)$$

dan is $2\phi = amu$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $q = \exp(-\pi)$,

$$cn(u) = \cos 2\phi \quad \text{en} \quad sn(u) = \sin 2\phi \quad (3)$$

noteer
$$a_m = \frac{2\pi}{kK} \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1+q^{2m+1}} \quad \text{en} \quad \theta = \frac{\pi u}{4K} \quad (4)$$

dan wordt (1):

$$\cos 2\phi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\{(4m+2)\theta\} \quad (5)$$

Evenzo is m.b.v. ByF 908.01:

$$sn(u) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1-q^{2m+1}} \sin\left\{(2m+1) \frac{\pi u}{2K}\right\} \quad (6)$$

$$\sin 2\phi = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin\{(4m+2)\theta\} \quad (7)$$

waarin
$$b_m = \frac{2\pi}{kK} \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1-q^{2m+1}} \quad (8)$$

Met machten en produkten van $\cos 2\phi$ en $\sin 2\phi$ is elke functie $\sin(2m\phi)$ en $\cos(2m\phi)$, $m \in \mathbf{N}$, op éénduidige wijze vast te leggen. Uitwerken van machten en produkten van de reeksen in (5) en (7) geeft nieuwe reeksen in $\cos(2n\theta)$ en $\sin((4n+2)\theta)$, $n \in \mathbf{N}$.

N.B. Gebruik van de reeksen:

$$\sin\phi = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{m \sin(2m\phi)}{m^2 - \frac{1}{4}}$$

en

$$\cos\phi = \frac{2}{\pi} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\frac{1}{2} \cos 2m\phi}{m^2 - \frac{1}{4}} \right) \quad \{\text{WW.Chapter } \underline{1X} \text{ example 9.}\}$$

of van de formules

$$\sin\phi = \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\phi = \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi \right)^{\frac{1}{2}}$$

en de reeksontwikkeling

$$(1 + q)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{1/2}{n}}{n!} q^n \quad \{ \text{AS 3.6.9} \}$$

leidt niet tot beschrijving van $\cos(j\phi)$ in termen van $\cos(k\theta)$ en $\sin(l\theta)$ omdat voor de reeksen uit {WW} het convergentiegebied niet van 0 tot 2π loopt en omdat in de formules het teken niet ondubbelzinnig vastgelegd kan worden voor datzelfde gebied.

1.6. De fourierreeks van $v = \cos m\theta = \cos \frac{m\pi}{4K} F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

De sinustermen van de fourierreeks van bovenstaande v zijn nul op grond van symmetrie. Het is alleen voor $m = 4j$ ($j \in \mathbb{N}$) gelukt de cosinustermen c_n van de reeks van v te bepalen.

$$c_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4n\phi) \cos\left(\frac{j\pi}{K} F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})\right) d\phi \quad (1)$$

$$c_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\phi) \cos\left(\frac{j\pi}{K} F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})\right) d\phi \quad (2)$$

met $2\phi = amu$; $u = F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})$; $\phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow F \Big|_0^{2K} \rightarrow \frac{\pi u}{K} \Big|_0^{2\pi}$ (3)

en $\frac{d^3}{du^3}(amu) = -k^2 dnu \cos(4\phi)$ (zie appendix 3.2) (4)

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{k^2} \frac{d^3}{du^3}(amu) \cos\left(j\frac{\pi u}{K}\right) (dnu)^{-1} d\phi \\ &= \frac{4K}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{-1}{k^2} \cdot \frac{d^3}{du^3}(amu) \cos\left(j\frac{\pi u}{K}\right) d\left(\frac{\pi u}{K}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

De reeksontwikkeling voor $\frac{d^3}{du^3}amu$ is (zie appendix 3.2)

$$\frac{d^3}{du^3}amu = -2 \frac{\pi^3}{K^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 q^n}{(1+q^{2n})} \cos\left(n \frac{\pi u}{K}\right).$$

Ingevuld in (5):

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{8\pi}{k^2 K^2} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 q^n}{(1+q^{2n})} \cos\left(n \frac{\pi u}{K}\right) \cos\left(j \frac{\pi u}{K}\right) d\left(\frac{\pi u}{K}\right) \\ &= 8 \frac{\pi^2}{k^2 K^2} \frac{j^2 q^j}{(1+q^{2j})}. \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{4K}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(8\phi) \cos\left(j\frac{\pi u}{K}\right) dnu \, d\left(\frac{\pi u}{K}\right)$$

$\cos(8\phi)$ kan uitgedrukt worden in $\frac{d^3}{du^3}amu$ en $\frac{d^5}{du^5}amu$ en dat weer in een sommatie over $\cos\left(n \frac{\pi u}{K}\right)$ (zie appendix)

zodat:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{4K}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\pi^5}{3k^4 K^5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2q^n n^4}{(1+q^{2n})} \cos\left(n \frac{\pi u}{K}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2k^2-4)\pi^3}{3k^4 K^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2q^n n^2}{1+q^{2n}} \cos\left(n \frac{\pi u}{K}\right) \right) \right\} \cos\left(j \frac{\pi u}{K}\right) d\left(\frac{\pi u}{K}\right) \\ &= \left(\frac{8\pi^4 j^4}{3k^4 K^5} + \frac{16k^2 \pi^2 - 32\pi^2}{3k^4 K^2} \right) \frac{q^j}{1+q^{2j}}. \end{aligned}$$

Op analoge wijze zijn ook alle andere cosinustermen van v voor $m=4j$ te vinden.

2 DE VERGELIJKING $x f'''(x) = -\alpha f(x)$

2.1. Inleiding

Doordat aanvankelijk verondersteld werd dat de vergelijking

$$x f'''(x) = -\alpha f(x) \quad (1)$$

in relatie stond met de problemen uit het voorgaande hoofdstuk, was een deel van het afstudeerwerk aan de oplossing van deze vergelijking gewijd. De veronderstelling bleek onjuist, reden waarom dit deel van het werk gestopt werd. De resultaten die op dat moment verkregen waren worden toch opgenomen in dit verslag omdat er een aantal Laplace- en Besseltransformaties gevonden werden, die, voor zover bekend, niet in desbetreffende handboeken zijn opgenomen. (zie b.v. {ObBa; Ob}).

In dit hoofdstuk wordt (1) opgelost door machtrekssubstitutie (2.2) en door Laplacetransformatie (2.3). Door de randvoorwaarden te bekijken kunnen de oplossingen uit beide methoden aan elkaar gelijk gesteld worden, zodat een aantal Laplacetransformaties wordt gevonden.

Inverse Laplacetransformatie (2.5) geeft een bekende functie als oplossing van (1), waaruit Laplace- en Besseltransformaties volgen.

In de appendix (3.3) wordt onder meer een overzicht van de resultaten in tabelvorm gegeven. Fysische problemen waarin (1) ter sprake komt worden beschreven in {Za}, {La} en {To}.

2.2 Oplossen door machtrekssubstitutie

Proberen we de oplossing van (1) te vinden door substitutie van de machtreeks

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

dan vinden we voor alle $n > 0$:

$$a_{n+2} = \frac{-\alpha a_n}{(n+2)(n+1)(n)} \quad (3)$$

zodat we twee onafhankelijke oplossingen van (1) verkrijgen: een oneven machtreeks M_0 (de oneven Moorenfunctie), die bepaald wordt door a_1 en

een even machtreeks M_e (de even Moorenfunktie), die bepaald wordt door a_2 .
Nemen we voor $a_1 = 1$ en $a_2 = -\alpha$ dan resulteert:

$$M_o = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m x^{2m+1}}{(2m+3)(2m+2)(2m+1)(2m+1)(2m)\dots 1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m 2^m m! x^{2m+1}}{(2m+3)! (2m+1)!} \quad (4)$$

$$M_e = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m x^{2m}}{(2m+2)(2m+1)(2m)(2m)(2m-1)\dots 2}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m x^{2m}}{(2m+2)! 2^m m!} \quad (5)$$

Een derde onafhankelijke oplossing die we de logaritmische Moorenfunktie M_1 noemen vinden we door substitutie van de machtreeks:

$$f(x) = M_e \log x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (6)$$

waarbij we dan vinden: $b_0 = 2$ en (als we b_1 en b_2 gelijk aan nul nemen):

$$b_{n+2} = - \frac{\alpha b_n + \{(n+2)n + (n+1)n + (n+2)(n+1)\} a_{n+2}}{(n+2)(n+1)(n)} \quad \begin{matrix} n \geq 2 \\ n \text{ even} \end{matrix} \quad (7)$$

Door volledige inductie is dan te bewijzen dat

$$b_{n+2} = - a_{n+2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n+2} \right) \quad \begin{matrix} n \geq 2 \\ n \text{ even} \end{matrix} \quad (8)$$

dus:

$$M_1 = 2 - \frac{x^2}{4 \cdot 3 \cdot 2} \log x$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m x^{2m} (\log x - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2m})}{(2m+2)! 2^m m!} \quad (9)$$

Met behulp van de reeksontwikkelingen (4), (5) en (9) zijn bijgaande tabellen berekend. (zie 2.6.)

Opgemerkt mag worden dat voor $x = 0$ geldt:

$$M_0(0) = 0$$

$$M_e(0) = 0$$

$$M_1(0) = 2$$

$$\frac{dM_0}{dx}(0) = 1$$

$$\frac{dM_e}{dx}(0) = 0$$

$$\frac{dM_1}{dx}(0) = 0$$

(10)

2.3. Oplossen door Laplacetransformatie

Transformeren van

$$tf'''(t) = -\alpha f(t) \quad (1)$$

geeft (zie ook de formules in de appendix):

$$-\frac{d}{dp}(p^3 g(p)) + 2pf(0) + f'(0) = -\alpha g(p) \quad (2)$$

waarin $g(p)$ de éézijdige Laplacegetransformeerde van $f(t)$ is.

Door $f(0)$ en $f'(0)$ te kiezen, vinden we drie verschillende oplossingen,

die we g_0 , g_e , en g_1 noemen, vooruitlopend op par. 2.4.

Neem $f(0) = f'(0) = 0$ dan gaat (2) over in

$$\frac{d}{dp}(p^3 g_e) = \alpha g_e \quad (3)$$

Uitgewerkt:

$$\int \left(\frac{\alpha}{p^3} - \frac{3}{p} \right) dp = \int \frac{1}{g_e} dg$$

$$g_e = \frac{1}{p^3} \exp\left(\frac{-\alpha}{2p^2}\right) \quad (4)$$

We proberen g_0 en g_1 te vinden door te veronderstellen:

$$g = g_e g_2 \quad (5)$$

Voor $f(0)$ en $f'(0)$ wordt korthedshalve A resp. B gesubstitueerd.

(5) invullen in (2) levert:

$$-\frac{d}{dp}(p^3 g_e g_2) + 2pA + B = -\alpha g_e g_2$$

$$-g_2 \frac{d}{dp}(p^3 g_e) - p^3 g_e \frac{d}{dp}(g_2) + 2pA + B = -\alpha g_e g_2$$

wat wegens (3) vereenvoudigt tot:

$$2pA + B = p^3 g_e \cdot \frac{d}{dp} g_2.$$

(4) invullen levert:

$$g_2 = \int (2pA + B) \exp \frac{\alpha}{2p} z dp \quad (6)$$

A = 0 resp. B = 0 levert g_0 en g_1 :

$$\begin{aligned} g_e^{-1} g_0 &= \int \exp\left(-\frac{\alpha}{2p}\right) dp && \{u:=p^{-1}\} \\ &= \int \exp\left(\frac{\alpha}{2}u^2\right) u^{-2} du = && \{k^2 := -\frac{\alpha}{2}u^2\} \\ &= -i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \int \exp(-k^2) k^{-2} dk && \{\text{GHI:313,5a}\} \\ &= i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left\{ \exp(-k^2) \cdot k^{-1} + 2 \int \exp(-k^2) dk \right\} && \{\text{GHI:313,1;AS.:7.1.1.}\} \\ &= p \exp\left(-\frac{\alpha}{2p}\right) + i\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \operatorname{erf}\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}p^{-1}\right). \end{aligned}$$

zodat:

$$g_0 = \frac{1}{p^2} + \frac{i}{p^3} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2p}\right) \operatorname{erf}\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}p^{-1}\right) \quad (7)$$

of met {AS:7.1.21.}:

$$g_0 = \frac{1}{p^2} - \frac{\alpha}{p^4} M\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{\alpha}{2p^2}\right), \quad (8)$$

waarin $M(a,b,z)$ de Kummerfunctie is.

$$\begin{aligned} g_e^{-1} g_1 &= \int 2p \exp\left(-\frac{\alpha}{2p}\right) dp = && \{w:=p^{-2}\} \\ &= \int -w^2 \exp\left(\frac{\alpha}{2}w\right) dw = && \{\text{GHI:312,2a}\} \\ &= \frac{1}{w} \exp\left(\frac{\alpha}{2}w\right) - \frac{\alpha}{2} \int \frac{1}{w} \exp\left(\frac{\alpha}{2}w\right) dw && \{\text{GHI:312,2a; AS.: 5.1.2.}\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{w} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}w\right) - \frac{\alpha}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{\alpha}{2}w\right)$$

$$= p^2 \exp\left(\frac{\alpha}{2}p^{-2}\right) - \frac{\alpha}{2} \operatorname{Ei}\left(\frac{\alpha}{2}p^{-2}\right).$$

zodat:

$$g_1 = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2p^3} \exp\left(\frac{-\alpha}{2p^2}\right) \operatorname{Ei}\left(\frac{-\alpha}{2p^2}\right) \quad (9)$$

waarin $\operatorname{Ei}(z)$ de exponential integraal is.

2.4 Gelijkstellen

De integralen in 2.3. zijn bepaald op constanten na. Er is niet uitvoerig studie gemaakt van de convergentie van de integralen. Door $f(0), f'(0)$ en $M(0), M'(0)$ te beschouwen kunnen we concluderen dat de eenzijdige Laplacegetransformeerden van M_o, M_e, M_1 respectievelijk $c_o g_o, c_e g_e$ en $c_1 g_1$ zijn, waarin de c 's nog te bepalen zijn.

2.5. Inverse Laplacetransformatie

Wordt getracht 2.3.1 voor complexe x op te lossen door te beginnen met inverse Laplacetransformatie dan vindt men via vergelijking 2.3.3. en haar oplossing 2.3.4. één oplossing:

$$I(z, \alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-uz) \cdot u^{-3} \exp\left(-\frac{-\alpha}{2u^2}\right) du. \quad (1)$$

Deze integraal voor $\alpha=2$ noemt Abramowitz $f_1(x)$. Voor $f_1(x)$ geeft hij een machtreeksontwikkeling {AS 27.5}.

Substitutie $u = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} t$ levert: $I(z, \alpha) = \frac{\alpha}{2} f_1\left(z \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right) \quad (2)$

Door andere substituties vinden we andere integraaluitdrukkingen.

$$I(z, \alpha) = \int_0^{\infty} t^{-3} \exp\left(-\frac{\alpha}{2t^2} - zt\right) dt = \quad \{\text{partieel integreren}\}$$

$$= \frac{z^{\frac{2\alpha}{\alpha}}}{\alpha} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{2t^2} - zt\right) dt$$

$$= \frac{z}{\alpha} \int_z^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{\alpha}{2t^2}\right) \right\} \quad (3)$$

$$\quad \quad \quad \{ u := t^{-1} \}$$

$$= \frac{z}{\alpha} \int_0^{\infty} u^{-2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}u^2 - \frac{z}{u}\right) du \quad \{\text{ObBa 1.1.14, 1.5.27}\}$$

$$= \frac{z}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2\alpha}}{u} \exp\left(-\frac{z^2}{4u^2}\right) K_1(u\sqrt{2\alpha}) du \quad (4)$$

{t:=u²}

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t - \frac{z}{\sqrt{t}}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\frac{\alpha}{2}} \left\{ \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{t}}\right) \right\} \quad (5)$$

{ObBa 1.1.16, 1.5.41}

$$= \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} x \exp\left(\frac{x^4}{2\alpha}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{x^2}{\sqrt{2\alpha}}\right) x \cdot 2\sqrt{z} \mathcal{J}_1(x \cdot 2\sqrt{z}) dx \quad (6)$$

(3) en (5) zijn Laplacetransformaties: (3) met z en (5) met $\frac{\alpha}{2}$ als transformatie variabele; (4) en (6) zijn Besseltransformaties: (4) een K-transformatie met $\sqrt{2\alpha}$ als variabele en (6) een Hankeltransformatie met $2\sqrt{z}$ als variabele.

2.6. Tabel van de Moorenfuncties voor enkele reële waarden van x.

x	M_0	M_e	M_1
0	0	0	+ 2,000
0,1	+ 0,09983	- 0,009996	+ 2,023
0,2	+ 0,1987	- 0,03993	+ 2,064
0,3	+ 0,2955	- 0,08966	+ 2,108
0,4	+ 0,3894	- 0,1589	+ 2,145
0,5	+ 0,4793	- 0,2474	+ 2,169
0,6	+ 0,5642	- 0,3546	+ 2,175
0,8	+ 0,7156	- 0,6230	+ 2,121
1	+ 0,8361	- 0,9587	+ 1,956
2	+ 0,7539	- 3,356	- 1,011
3	- 0,8534	- 5,871	- 7,691
4	- 4,032	- 6,689	- 16,55
5	- 8,136	- 3,994	- 24,24
6	- 11,85	+ 3,451	- 26,27
8	- 10,75	+ 31,51	+ 3,981
10	+ 12,58	+ 59,50	+ 89,86
12	+ 58,53	+ 47,76	+ 193,5
14	+102,6	- 43,41	+ 214,5
16	+ 95,93	-217,8	+ 26,98
18	- 14,78	-408,3	- 437,5
20	-250,3	-470,1	-1089

3. A P P E N D I X

3.1. De fourierreeks van $\cos^n \alpha$

Zonder fourieranalyse is op eenvoudige wijze een even eenvoudig algoritme te maken om $\cos^n \alpha$ uit te drukken in een sommatie over $\cos(m\alpha)$:

$$\cos^n \alpha = 2^{1-n} \sum_{m=0}^n a_{m,n} \cos(m\alpha)$$

$$a_{0,1} = 0 \quad a_{1,1} = 1 \quad a_{-1,m} = 0$$

$$a_{m,n} = a_{m+1,n-1} + a_{m-1,n-1} \quad (m = 0, 2, 3, 4, \dots)$$

$$a_{1,n} = a_{2,n-1} + 2a_{0,n-1}$$

Bewijs:

$$\cos^1 \alpha = \cos(1\alpha)$$

$$\cos^{n+1} \alpha = \cos^n \alpha \cos \alpha = 2^{1-n} \sum_{m=0}^n a_{m,n} \cos(m\alpha) \cos \alpha$$

$$= 2^{-n} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} \cos(j\alpha)$$

met $a_{j,n+1} = a_{j-1,n} + a_{j+1,n} \quad (j \geq 2)$

$$a_{1,n+1} = a_{2,n} + 2a_{0,n}$$

$$a_{0,n+1} = a_{1,n}$$

Q.E.D.

zo is:

$$\cos \alpha = \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) + 1)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos(3\alpha) + 3 \cos \alpha)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos(4\alpha) + 4\cos(2\alpha) + 3)$$

$$\cos^5 \alpha = \frac{1}{16} (\cos(5\alpha) + 5 \cos(3\alpha) + 10 \cos \alpha)$$

$$\cos^6 \alpha = \frac{1}{32} (\cos(6\alpha) + 6 \cos(4\alpha) + 15 \cos(2\alpha) + 10)$$

$$\cos^7 \alpha = \frac{1}{64} (\cos(7\alpha) + 7 \cos(5\alpha) + 21 \cos(3\alpha) + 35 \cos \alpha)$$

$$\cos^8 \alpha = \frac{1}{128} (\cos(8\alpha) + 8 \cos(6\alpha) + 28 \cos(4\alpha) + 56 \cos(2\alpha) + 35)$$

etc.

3.2. Enkele eigenschappen van de amplitudefunctie

De fourierreeks van amu is bekend {ByF:908.00}:

$$\text{amu} = \frac{\pi u}{2K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n}{n(1+q^{2n})} \sin\left(\pi n \frac{u}{K}\right).$$

amu is voor reële u een continue funktie, zodat ook de reeksontwikkelingen, die ontstaan door termgewijze differentiatie, convergeren.

$$\frac{d}{du} \text{amu} = \frac{\pi}{2K} + \frac{\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n}{(1+q^{2n})} \cos\left(\pi n \frac{u}{K}\right)$$

$$\text{am}^{(2m)} u = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{2m} (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n n^{2m-1}}{(1+q^{2n})} \sin\left(\pi n \frac{u}{K}\right)$$

$$\text{am}^{(2m+1)} u = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{2m+1} (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n n^{2m}}{(1+q^{2n})} \cos\left(\pi n \frac{u}{K}\right)$$

Hieronder gebruiken we even de volgende notatie:

$$s := \text{snu}; \quad c := \text{cnu}; \quad d := \text{dnu}; \quad a := \text{amu} = \psi; \quad ' := \frac{d}{du}.$$

Bij constante k geldt {ByF:731}:

$$a' = d; \quad c' = -sd; \quad s' = cd; \quad d' = -k^2 sc.$$

Verder geldt:

$$d^2 + k^2 s^2 = 1; \quad s^2 + c^2 = 1; \quad s = \sin\psi; \quad c = \cos\psi.$$

Herhaalde differentiatie van amu naar u levert:

$$a' = d$$

$$a'' = d' = -k sc$$

$$a''' = d(-k^2)(c^2 - s^2) = d(-k^2)(2c^2 - 1) = d(-k^2) \cos(2\psi).$$

$$a^{(4)} = k^4 sc(c^2 - s^2) + 4k^2 d^2 cs$$

$$\begin{aligned} a^{(5)} &= d(-4k^2 + 5k^4 + 8k^2 c^2 - 28k^4 c^2 + 24k^4 c^4) = \\ &= d(-2k^4 + 4k^2) \cos(2\psi) + d(3k^4) \cos(4\psi) \end{aligned}$$

etc.

$$\text{zodat } \cos 2\psi = \frac{-a^{(3)}}{dk^2} \quad (3)$$

$$\cos 4\psi = \frac{a^{(5)}}{3dk^4} + \left(\frac{2k^4-4k^2}{3k^4}\right) \left(\frac{-a^{(3)}}{dk^2}\right),$$

etc.

Op deze wijze is elke $dn(u)\cos(2j\psi)$ uit te drukken in een reeks van (oneven) afgeleiden van am_u .

3.3. Formules: Bessel- en Laplacetransformaties

Hieronder volgt een overzicht over de belangrijkste in hoofdstuk 2 gebruikte en nieuw gevonden formules.

De nummering uit {Ob} en {ObBa} is aangehouden.

3.3.1. Bessel transformaties {Ob}

nummer:

$$1.1.0. \quad f(x) \qquad g(y, \nu) = \int_0^{\infty} f(x) (xy)^{\frac{1}{2}} J_{\nu}(xy) dx$$

$$1.1.1. \quad \int_0^{\infty} g(y) (xy)^{\frac{1}{2}} J_{\nu}(xy) dy \qquad g(y)$$

$$- \quad x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4x}\right) \{J_{\nu} \equiv K_1\} \qquad y^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} z^{-1} 2^{-\frac{1}{2}} I(z, y)$$

$$- \quad x^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^4}{2\alpha}\right) \operatorname{erfc} \frac{x^2}{\sqrt{2\alpha}} \{J_{\nu} \equiv J_1\} \qquad \alpha^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} I(y, \alpha)$$

3.3.2. Laplace transformaties {ObBa}

nummer:

$$1.1.1. \quad f(t) \qquad \mathcal{L}_p(f(t))$$

$$1.1.1. \quad f(t) \qquad g(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$1.1.2. \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c-1\infty}^{c+1\infty} e^{ut} g(u) du \qquad g(p)$$

$$1.1.25. \quad t^m f^{(n)}(t), m < n; m, n = 0, 1, 2, \dots \qquad \left(-\frac{d}{dp}\right)^m \{p^n g(p)\} + (-1)^{m-1} \left\{ \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} p^{n-m-1} f(0) \right. \\ \left. + \frac{(n-2)!}{(n-m-2)!} p^{n-m-2} f'(0) + \dots + m! f^{(m-n-1)}(0) \right\}$$

$$1.1.14. \quad f(t^2) \qquad \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} p^2 / u^2) g(u^2) du$$

$$1.5.27 \quad \exp(-a/t) \qquad \{Re a > 0\} \qquad 2(a/p)^{\frac{1}{2}} K_1 \{2(ap)^{\frac{1}{2}}\} \qquad \{Re p > 0\}$$

$$- \quad t^{-3} \exp\left(-\frac{\alpha}{2t}\right) \qquad I(p, \alpha) = \frac{\alpha}{2} f_1 \left(p \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)$$

- $\exp(-\frac{\alpha}{2t^2})$

$$\frac{\alpha}{p} I(p, \alpha) = \frac{\alpha^2}{2p} f_1(p\sqrt{\frac{2}{\alpha}})$$

- $c_o M_o(t)$

$$p^{-2} - \alpha p^{-4} M(1, \frac{3}{2}, -\frac{\alpha}{2p^2})$$

- $c_e M_e(t)$

$$p^{-3} \exp(-\frac{\alpha}{2p^2})$$

- $c_l M_l(t)$

$$p^{-1} - \frac{\alpha}{2p^2} \exp(-\frac{\alpha}{2p^2}) \text{Ei}(\frac{\alpha}{2p^2})$$

- $\exp(-\frac{z}{\sqrt{t}})$

$$2I(z, 2p) = 2pf_1(z\sqrt{\frac{1}{p}})$$

Literatuur

- {AS} M.Abramowitz and I.A.Stegun: Handbook of Mathematical Functions.
Dover, 1972.
- {ByF} P.F.Byrd and M.D.Friedman: Handbook of Elliptic Integrals for
Engineers and Scientists.
Springer-Verlag, 1971.
- {GH} W.Gröbner und N.Hofreiter: Integraltafel.
I Teil: Unbestimmte Integrale.
II Teil: Bestimmte Integrale.
Springer-Verlag, 1975 resp. 1961.
- {GR} I.S.GradshTEyn and I.M.Ryzhik: Table of integrals, series and
products.
Academic Press, 1965.
- {Han} H.Hancock: Elliptic Integrals.
Dover, 1958.
- {Ob} F.Oberhettinger: Tables of Bessel Transforms.
Springer-Verlag, 1972.
- {ObBa} F.Oberhettinger and L.Badii: Tables of Laplace Transforms.
Springer-Verlag, 1973.
- {ObMa} F.Oberhettinger und W.Magnus: Anwendung der Elliptischen
Funktionen in Physik und Technik.
Springer-Verlag, 1949.
- {WW} E.T.Whittaker and G.N.Watson: A Course of Modern Analysis.
Cambridge University Press, 1962.
- {VaB} P.vd.Varst, naar het college van L.J.F. Broer:
Bewegingsvergelijkingen, variatieprincipes en behoudswetten.
T.H. Eindhoven, 1976.

- {Za} C.T.Zahn: Absorbtion coefficients for thermal neutrons.
Phys. Rev. 52, 67 - 71 (1937).
- {La} O.Laporte: Absorbtion coefficients for thermal neutrons.
Phys. Rev. 52, 72 - 74 (1937).
- {To} H.C.Torrey: Notes on intensities of radio frequency spectra.
Phys. Rev. 59, 293 (1941).