De zadelpuntsmethode

V.C. '66

De Zadelpuntsmethode

door

Prof.dr. N.G. de Bruijn

Inleiding

In vele delen der zuivere en toegepaste wiskunde komt het voor dat men een expliciet gegeven uitdrukking, die een parameter t bevat, voor grote waarden van t zo goed mogelijk wil benaderen. Als de genoemde uitdrukking gegeven is door een integraal langs een kromme in het complexe vlak, dan is de belangrijkste benaderingsmethode de zadelpuntsmethode, die het eerst werd gebruikt door Riemann, en in 1909 werd herontdekt door Debije. Deze methode is in wezen een complexe versie van een oudere methode van Laplace, tenminste ná dat men een geschikte integratieweg heeft gekozen. De beste keuze van zo'n integratieweg biedt soms veel hoofdbrekens.

1. De methode van Laplace

We beschouwen een integraal over een reëel interval, waarbij de integrand $\phi(x,t)$ afhangt van een reële parameter t. Gemakshalve nemen we voor het interval de gehele reële rechte. Aannemende dat de integraal voor alle $t > 0$ convergeert, definiëren we de waarde ervan door $F(t)$:

$$F(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t)dx.$$

We beschouwen nu gevallen waarbij de grafiek van ϕ (als functie van x beschouwd) ergens een scherpe piek vertoont, die scherper wordt naarmate t groter wordt. In zulke gevallen kunnen we proberen een benadering van $F(t)$ te vinden door de volgende twee maatregelen:

(1) benader $\phi(x,t)$ in een intervalvormige omgeving van die piek door een zodanige eenvoudige functie $\psi(x,t)$ dat $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)dx$ expliciet bekend is;

(2) laat zien dat de integralen over de resterende intervallen kunnen worden verwaarloosd.

Zowel bij (1) als bij (2) dienen de verwaarlozingen klein te zijn vergeleken met de gevonden uitkomst. De bij (1) genoemde omgeving mag van t afhangen, evenals de plaats van de piek. Het komt er dus op neer, dat we functies $a(t)$, $\delta(t)$, $\psi(x,t)$ kiezen zó dat voor de volgende integralen

$$I_1(t) := \int_{a(t)-\delta(t)}^{a(t)+\delta(t)} |\phi(x,t) - \psi(x,t)|dx,$$

$$I_2(t) := \int_{a(t)+\delta(t)}^{\infty} \phi(x,t)dx \ , \quad I_3(t) := \int_{a(t)+\delta(t)}^{\infty} \psi(x,t)dx,$$

$$I_4(t) := \int_{-\infty}^{a(t)-\delta(t)} \phi(x,t)dx \ , \quad I_5(t) := \int_{-\infty}^{a(t)-\delta(t)} \psi(x,t)dx$$

geldt

$$I_j(t)/\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)dx \to 0 \quad (t \to \infty)$$

met $j = 1, \ldots, 5$. Wanneer aan deze veronderstellingen voldaan is geldt de asymptotische equivalentie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t)dx \sim \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)dx \qquad (t \to \infty),$$

waarbij volgens onze onderstelling het rechterlid expliciet bekend is.

Eigenlijk is het in het geheel niet nodig dat er sprake is van een "piek"; het speelt in het bovenstaande geen rol of $\delta(t)$ klein is. We denken echter liever wèl aan een "piek" (hetgeen vaak door transformatie is te bereiken) omdat de keus van a, δ, ψ dan gemakkelijker valt.

Doorgaans kunnen we alleen op succes rekenen met positieve functies ψ. In de praktijk is vaak ψ van de vorm $e^{-tx^2} x^k$, en daarom stipuleren we

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^k \, dx = 0 \qquad (k = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n} \, dx = t^{-n-\frac{1}{2}} \frac{(2n)!}{n! \, 2^{2n}} \pi^{\frac{1}{2}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

In het geval dat er bij de definitie van $F(t)$ sprake is van integratie over bijv. $(0,\infty)$ in plaats van $(-\infty,\infty)$, hebben we meestal te maken met integralen van het type

$$\int_{0}^{\infty} e^{-tx} x^k \, dx = t^{-k-1} \, k! \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

In het voorafgaande hebben we ons met een eenvoudige asymptotische equivalentie tevreden gesteld. Het is echter meestal niet moeilijk de ψ zó nauw bij ϕ aan te sluiten dat we tot veel sterker uitspraken kunnen komen. Meestal kunnen we bereiken dat op deze wijze voor $F(t)$ een asymptotische reeks wordt afgeleid.

Voorbeeld 1

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1 + x^2}} \quad .$$

De piek ligt hier bij $x = 0$; zowel de positie als de hoogte van de piek is onafhankelijk van t. De breedte van de piek is van de orde $t^{-\frac{1}{2}}$. Het ligt nu voor de hand om $\psi(x,t) = e^{-tx^2}$ te kiezen. Natuurlijk nemen we $a(t) = 0$; $\delta(t)$ moet flink wat groter zijn dan $t^{-\frac{1}{2}}$ omdat anders de I_2 t.e.m. I_5 niet verwaarloosbaar zijn, maar flink wat kleiner dan 1 om er zeker van te zijn dat I_1 niet te groot uitvalt. Aan beide eisen tegelijk voldoet $\delta(t) = t^{-1/3}$ ruimschoots, en deze waarde houden we aan.

(We zouden echter in het hierna volgende evengoed succes hebben met een constante $\delta(t)$, bijv. $\delta(t) = 1$).

Daar $1 - (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}e^x$ voor $|x| < 1$ kleiner is dan $C|x|$ met een zekere constante $C > 0$, is, als $t > 1$,

$$I_1(t) < C \int_{-\delta(t)}^{\delta(t)} |x|e^{-tx^2}\, dx < 2C \int_0^\infty xe^{-tx^2}\, dx = Ct^{-1}.$$

Vergelijken we dit met $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\, dx = t^{-\frac{1}{2}}\ \pi^{\frac{1}{2}}$ dan zien we dat $I_1(t)$ inderdaad relatief klein is. Om in te zien dat hetzelfde voor I_2 t.e.m. I_5 geldt, kunnen we ons beperken tot I_3. We majoreren eerst:

$$I_3(t) < \int_{\delta(t)}^{\infty} e^{-tx^2}\ e^x\, dx.$$

De functie $tx^2 - x$ stijgt vanaf $x = \frac{1}{2}t^{-1}$. Als $t > 1$, dan is

$$\frac{\partial}{\partial x}(tx^2 - x) = 2tx - 1 \geq 2t^{2/3} - 1 \geq 1$$

op het interval $\delta(t) \leq x < \infty$. Derhalve

$$\int_{\delta(t)}^{\infty} e^{-tx^2+x}\, dx \leq \int_{\delta(t)}^{\infty} e^{-t(\delta(t))^2+\delta(t)} \cdot e^{-(x-\delta(t))}dx =$$

$$= e^{-t(\delta(t))^2+\delta(t)}.$$

Met $\delta(t) = t^{-1/3}$ is dit inderdaad zeer klein. Daarna is aangetoond dat

$$F(t) \sim t^{-\frac{1}{2}}\ \pi^{\frac{1}{2}} \quad (t \to \infty).$$

We zullen vervolgens proberen dit resultaat te verscherpen. We ontwikkelen voor $|x| < 1$ in een machtreeks

$$e^x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k.$$

We fixeren een natuurlijk getal N. Daarbij bestaat een constante C_N zó dat voor $|x| < \frac{1}{2}$

$$\left| e^{x}(1 + x^{2})^{-\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{2N-1} a_k\, x^k \right| \leq C_N\, x^{2N}.$$

We kiezen nu

$$\psi(x,t) = e^{-tx^2} \sum_{k=0}^{2N-1} a_k\, x^k.$$

Met deze keuze is

$$I_1(t) \leq C_N \int_{-\delta(t)}^{\delta(t)} e^{-tx^2}\, x^{2N}\, dx \leq C_N \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\, x^{2N}\, dx \leq$$

$$\leq C_N^{*}\, t^{-N-\frac{1}{2}}.$$

De I_2 t.e.m. I_4 zijn nog steeds zeer klein, en gaan in elk geval veel harder naar nul dan $t^{-N-\frac{1}{2}}$. We zullen de moeite van expliciete schatting niet nemen (die moeite is niet groot, want $\psi(x,t)$ kan worden gemajoreerd door $C_N^{**}\, e^{-tx^2 + 2|x|}$, en dit is op dezelfde wijze te behandelen als hierboven met e^{-tx^2+x} is gebeurd).

Aangezien

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)dx = \sum_{n=0}^{N-1} a_{2n}\, t^{-n-\frac{1}{2}}\, \frac{(2n)!}{n!\; 2^{2n}}\, \pi^{\frac{1}{2}}$$

is hiermee bewezen dat voor $F(t)$ de volgende asymptotische reeksontwikkeling geldt:

$$F(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, t^{-n-\frac{1}{2}}\, \frac{(2n)!}{n!\; 2^{2n}}\, \pi^{\frac{1}{2}} \quad (t \to \infty).$$

<u>Voorbeeld 2</u>

Laat de functies g en h reëel,twee maal continu differentieerbaar zijn voor $-1 \leq x \leq 1$. Neem aan dat het absolute maximum van h in $x = 0$ bereikt wordt, in de sterke zin dat $h(x) < h(0)$ voor alle x in dat interval met uitzondering van $x = 0$. Neem aan dat $h''(0) < 0$, $g(0) > 0$.

Laat

$$F(t) := \int_{-1}^{1} e^{th(x)}\, g(x)\, dx.$$

Gevraagd wordt het asymptotische gedrag van $F(t)$ voor $t \to \infty$.

Laat ε een getal zijn met $0 < \varepsilon < -h''(0)$. Dan kunnen we op grond van de gegevens over g en h een getal δ vinden met $0 < \delta < 1$, zó dat voor $-\delta \leq x \leq \delta$ geldt

$$g(0)(1 - \varepsilon) \leq g(x) \leq g(0)(1 + \varepsilon),$$

$$h(0) + \tfrac{1}{2}(h''(0) - \varepsilon)x^2 \leq h(x) \leq h(0) + \tfrac{1}{2}(h''(0) + \varepsilon)x^2.$$

(De laatste regel houdt verband met de Taylorformule $h(x) = h(0) + xh'(0) + \tfrac{1}{2}x^2h''(\theta x)$ met een θ in $0 < \theta < 1$; bedenk dat $h'(0) = 0$ omdat anders het punt 0 geen maximum kan opleveren.) Men kan nu naar boven schatten

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)}\, g(x)\, dx \leq g(0)(1 + \varepsilon)\, e^{th(0)} \int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{1}{2}t(h''(0)+\varepsilon)x^2} dx,$$

en iets analoogs naar beneden.

Het is niet moeilijk te bewijzen dat er positieve constanten C en η bestaan zó dat

$$\left|\int_{\delta}^{1} e^{th(x)} g(x)\, dx\right| \leq C\, e^{th(0)}\, e^{-\eta t},$$

$$g(0)(1 + \varepsilon)e^{th(0)} \int_{\delta}^{\infty} e^{\frac{1}{2}t(h''(0)+\varepsilon)x^2} dx \leq C\, e^{th(0)} e^{-\eta t}$$

voor alle $t > 0$, en evenzo voor $\int_{-1}^{-\delta}$ resp. $\int_{-\infty}^{-\delta}$. Bijgevolg is

$$F(t) \leq g(0)(1 + \varepsilon)e^{th(0)}(2\pi)^{\frac{1}{2}}(-h''(0) + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} + 4Ce^{th(0)-\eta t}.$$

Aangezien we een analoge ongelijkheid naar beneden hebben, en aangezien ε willekeurig was, is hieruit als eindresultaat af te leiden

$$F(t) \sim g(0)e^{th(0)}\, (2\pi)^{\frac{1}{2}}(-h''(0))^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} \qquad (t \to \infty).$$

Voorbeeld 3

We nemen dezelfde integrand als in het vorige voorbeeld, maar nu veronderstellen we dat het maximum van h op de rand van het integratie-interval ligt. De onderstellingen zijn: g en h reëel en continu differentieerbaar voor $0 \leq x \leq 1$, $g(0) > 0$, $h'(0) < 0$. Op een wijze die analoog is aan die van het vorige vraagstuk leidt men af dat voor $t \to \infty$

$$\int_0^1 e^{th(x)} g(x)\, dx \sim e^{th(0)} (-th'(0))^{-1} g(0).$$

Voorbeeld 4

We beschouwen de gammafunctie, gedefinieerd door de integraal van Euler:

$$\Gamma(t+1) := \int_0^\infty e^{-v} v^t \, dv,$$

en we vragen naar het asymptotisch gedrag voor $t \to \infty$.

De integrand heeft zijn maximum voor $v = t$. Daarom transformeren we door als nieuwe integratievariabele te nemen de x, bepaald door $v = t(1 + x)$. Dan komt er

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} t^{t+1} \int_{-1}^\infty \{e^{-x}(1+x)\}^t \, dx.$$

De bijdrage van het interval $1 \leq x < \infty$ is exponentiëel klein in vergelijking met die van het interval $-1 \leq x \leq 1$. Wat het laatstegenoemde interval betreft zijn we in voorbeeld 2 terecht gekomen, met $h(x) = -x + \log(1+x)$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = -1$, $g(x) = 1$. (Eerlijk gezegd mogen we niet tot $x = -1$ toe gaan, omdat daar h niet continu is. Dit euvel is te verhelpen door bijv. bij $x = -\frac{1}{2}$ af te knippen en op te merken dat de bijdrage van het interval $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ weer relatief exponentiëel klein is.) Volgens het resultaat van voorbeeld 2 vinden we de formule van Stirling:

$$\Gamma(t+1) \sim e^{-t}\, t^{t+\frac{1}{2}}\, (2\pi)^{\frac{1}{2}} \qquad (t \to \infty).$$

Er zijn verschillende mogelijkheden om dit resultaat te verscherpen tot een asymptotische reeksontwikkeling van het type

$$\Gamma(t+1) \approx e^{-t}\, t^{t+\frac{1}{2}}\, (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, (c_0 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots).$$

We schetsen hier één van die mogelijkheden. We definiëren de variabele z door

$$z = x(-2h(x)/x^2)^{\frac{1}{2}},$$

hetgeen betekent dat z de vorm heeft van een machtreeks

$$z = x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots .$$

Er is een $\delta > 0$ zó dat (volgens de z.g. omkeerformule van Lagrange) voor $|z| < \delta$ de x als machtreeks in z kan worden opgelost:

$$x = z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \ldots .$$

Nu zijn er getallen p en q aan te geven ($p < 0 < q$) zó dat

$$\int_p^q (e^{-x}(1+x))^t dx = \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{\frac{1}{2}\delta} e^{-\frac{1}{2}z^2 t} \frac{dx}{dz}\, dz.$$

Hierin is $\frac{dx}{dz}$ weer een machtreeks, nl. $1 + 2d_2 z + 3d_3 z^2 + \ldots$. Met de in voorbeeld 1 aangegeven methode komen we nu tot een asymptotische ontwikkeling voor de gammafunctie. We treden niet in details.

<u>Voorbeeld 5</u>

Men vraagt het asymptotische gedrag van

$$F(t) := \int_{-1}^{1} e^{-x^2 t - x^4 t^4}\, dx$$

als $t \to \infty$.

Het is de term x^4t^4 die in eerste instantie de vorm van de piek bepaalt. Als x opklimt van 0 tot bijv. $6t^{-1}$, loopt x^4t^4 van 0 tot 6^4, maar x^2t slechts van 0 tot $6^2\ t^{-1}$. We zouden dus $\delta(t) = t^{-3/4}$ kunnen nemen en in het interval $-\delta(t) \leq x \leq \delta(t)$ de integrand door $e^{-x^4t^4}$ kunnen approximeren. Men komt dan tot de conclusie dat

$$F(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4t^4}\,dx = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{4})t^{-1} \quad (t \to \infty).$$

In het onderhavige geval kan men langs eenvoudige weg een veel sterker resultaat krijgen. Op een exponentieel kleine fout na is $F(t)$ gelijk aan

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2t-x^4t^4}\,dx,$$

en deze integraal is voor alle $t > 0$ te berekenen door

$$e^{-x^4t^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2t)^n}{n!}$$

term voor term te integreren. Dit volgt bijvoorbeeld uit het feit dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4t^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2t)^n}{n!}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4t^4+x^2t}\,dx < \infty$$

(gemajoreerde convergentie volgens Lebesgue). Dus voor alle $t > 0$

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, e^{-x^4t^4}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{-n-1}\, \Gamma(\tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{4}).$$

Dit is een voor alle $t > 0$ convergente reeksontwikkeling voor $G(t)$, en derhalve een asymptotische reeksontwikkeling voor $F(t)$.

2. De Zadelpuntsmethode

We beschouwen nu niet meer een integraal over een reëel interval, maar langs een kromme in het complexe vlak. Gemakshalve beperken we ons tot een kromme K die loopt van het in het eindige gelegen punt a naar het in het eindige gelegen punt b. De integrand ϕ hangt weer van de reële parameter t af. We nemen aan dat deze voor elke t analytisch is in een omgeving van K, hetgeen ons de vrijheid geeft de stelling van Cauchy toe te passen. We verlangen voor grote waarden van t een bruikbare benadering van

$$F(t) := \int_K \phi(z,t)\,dz. \tag{2.1}$$

Met de zadelpuntsmethode behandelt men dit probleem als volgt: vervang K door een andere integratieweg van a naar b, zó dat op die nieuwe weg met succes de methode van Laplace kan worden toegepast. In vele gevallen betekent dit dat de weg over z.g. zadelpunten moet worden geleid, waarover straks meer.

We stellen ons eerst op het standpunt dat we voorlopig tevreden zijn met een zo efficiënt mogelijke schatting van $|F(t)|$ (en dat is in vele gevallen het enige dat men nodig heeft, resp. het beste dat men kan bereiken). In dit verband stellen we ons in eerste instantie tevreden met de schatting

$$\left|\int_C \phi(z,t)dz\right| \leq l_C \max_{z\in C} |\phi(z,t)|. \tag{2.2}$$

Voor C nemen we een <u>toegelaten</u> weg, d.i. een weg van a naar b die bij vaste t uit K ontstaan kan door continue deformatie binnen het analyticiteitsgebied van $\phi(z,t)$. In de gevallen die we op het oog hebben speelt l_C niet zo'n belangrijke rol. Zo komen we ertoe het volgende <u>minimax-probleem</u> te stellen:

Bepaal onder alle toegelaten C's degene waarvoor $\max_{z\in C} |\phi(z,t)|$ zo klein mogelijk is. Deze waarde is dan

$$\min_C \max_{z\in C} |\phi(z,t)|. \tag{2.3}$$

Deze best mogelijke C kan van t afhangen.

Dat l_C meestal minder belangrijk is komt doordat we ons bezighouden met functies ϕ die sterk geaccidenteerd verlopen: op sommige plaatsen zeer groot en op plaatsen daar dichtbij reeds zeer klein. Daarom zal een kleine variatie van C een grote invloed hebben op $\max_{z\in C} |\phi(z,t)|$, maar l_C nauwelijks wijzigen.

We houden ons voorlopig uitsluitend bezig met het minimaxprobleem. We houden t vast, en stellen $z = x + iy$, $w = w(x,y) = |\phi(x+iy,t)|$. Het minimaxprobleem is nu het probleem van de bergbeklimmer die van plaats a naar plaats b moet wandelen over een geaccidenteerd terrein (waarvan de hoogte boven een horizontaal vlak door $w(x,y)$ is gegeven, als x en y coördinaten in dat horizontale vlak zijn). Hij heeft geen bezwaar tegen lange afstanden, alleen tegen grote hoogte. Zijn doel is slechts een weg C te kiezen waarvan het hoogste punt zo laag mogelijk ligt. Met de afkorting

$$M_C := \max_{z\in C} w(x,y) \tag{2.4}$$

is het probleem: zoek onder alle wegen die van a naar b leiden een weg met minimale M_C. Het is weliswaar niet altijd zeker dat er zo'n minimum bestaat, maar vaak zal ons pogen succes opleveren.

Wat zal onze bergbeklimmer doen? Eerst kijkt hij of hij toevallig een weg D ziet waarvan a of b het hoogste punt is. Voor zo'n weg is M_D gelijk aan de hoogte van a of b, en dit laagterecord kan beslist niet verbeterd worden.

Als hij zo'n weg niet ziet begint hij een lijstje te maken van alle passen in de buurt, en gaat wegen van a naar b nemen die over één of meer van deze passen lopen. Heeft hij eenmaal een weg gevonden die redelijk gunstig lijkt, dan is het allerminst eenvoudig aan te tonen dat het laagterecord daarmee bereikt is. Het zou bijvoorbeeld kunnen gebeuren door een gesloten weg om het punt a aan te geven waarvan het laagste punt samenvalt met het hoogste punt van de weg van a naar b.

De voorliefde voor passen is als volgt gemotiveerd. Als we eenmaal een weg hebben die M_C minimalizeert, als die weg slechts één hoogste punt heeft, en als dat hoogste punt hoger ligt dan begin- en eindpunt, dan is dat hoogste punt een pas. Was dit nl. niet het geval, dan zou door kleine variaties van de weg het laagterecord kunnen worden verbeterd.

De passen zijn punten waar het raakvlak horizontaal loopt, terwijl in elke omgeving van de pas zowel hogere als lagere punten liggen. In de eenvoudigste situatie betekent dit een zadelpunt van het oppervlak $w(x,y)$.

In de gevallen die ons interesseren is w de absolute waarde van een analytische functie, en dat heeft tot gevolg dat w geen vrije maxima heeft (afgezien van het triviale geval dat w een constante is). Dit stelt ons in staat ons langs eenvoudige weg zekerheid te verschaffen over de vraag of het minimax reeds bereikt is:

Laat C een toegelaten weg zijn van a naar b, die loopt over de pas p, neem aan

(1) geen punt van C is hoger dan p,

(2) C loopt over de pas p heen, d.w.z. in elke omgeving van p zijn zowel links als rechts van C punten te vinden die hoger liggen dan p.

Onder deze omstandigheden lost C het minimaxprobleem op: de hoogte van p is het gezochte minimax. Neem nl. eens aan dat er een weg D is van a naar b, met $M_D < M_C$. Als we uit het platte vlak de krommen C en D weglaten, blijft een open verzameling over. Men kan laten zien dat één van de open componenten daarvan begrensd is en p tot randpunt heeft. De gehele rand van die component is een deel van de vereniging $C \cup D$. Daar w geen vrije maxima heeft zal nergens binnen die component de hoogte boven M_C liggen. Dit komt nu in strijd met onze onderstelling (2).

Op topologische details gaan we hier niet verder in. Het is trouwens duidelijk dat de uitdrukkingen "links van C", "rechts van C" nadere formulering behoeven. Veel zorgen over nauwkeurige bewijzen behoeven we ons overigens niet te maken, omdat het gestelde minimaxprobleem slechts tot de heuristiek van de zadelpuntsmethode behoort.

Nadat het minimaxprobleem is opgelost kan men proberen nog eens op (2.2) terug te komen. Er zijn vele wegen die de minimale M_C opleveren, en hun respectievelijke l_C's verschillen onderling weinig. Maar als we schatten

$$\left|\int_C \phi(z,t)dz\right| \leq \int_C |\phi(z,t)| \cdot |dz|, \qquad (2.5)$$

dan zien we dat het voordeel biedt om een weg te kiezen die van zijn hoogste punt zo steil mogelijk afdaalt (<u>steepest descent</u>), om het deel van de kromme waar $|\phi|$ nog in de buurt van M_C ligt een zo klein mogelijke lengte te geven.

Om de richtingen van de steilste afdaling vast te stellen is het prettiger om uit te gaan van ψ, als

$$\phi(z,t) = e^{\psi(z,t)}, \qquad (2.6)$$

en voorlopig schrijven we $\psi(z)$ i.p.v. $\psi(z,t)$. Daar

$$|\phi(z,t)| = e^{\mathrm{Re}\ \psi(z)}, \qquad (2.7)$$

gaat onze interesse verder uit naar het door Re $\psi(x+iy)$ beschreven berglandschap. In de zadelpunten is

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Re}\ \psi(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{Re}\ \psi(x+iy) = 0. \qquad (2.8)$$

We merken op dat

$$\psi'(x+iy) = \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Re}\ \psi(x+iy) - i\frac{\partial}{\partial y} \mathrm{Re}\ \psi(x+iy), \qquad (2.9)$$

zodat (2.8) gelijkwaardig is met $\psi'(x+iy) = 0$.

Laat (x_1,y_1) een zadelpunt zijn, zodat $\psi'(x_1+iy_1) = 0$. We onderstellen dat $\psi''(x_1+iy_1) \neq 0$. Voor punten z in een zekere omgeving van het zadelpunt kunnen we ψ in een machtreeks ontwikkelen:

$$\psi(x+iy) = \psi(x_1+iy_1) + \frac{\zeta^2}{2!}\psi''(x_1+iy_1) + \frac{\zeta^3}{3!}\psi'''(x_1+iy_1) + \ldots \qquad (2.10)$$

waarbij $\zeta = x + iy - (x_1 + iy_1)$.

Ten aanzien van de vraag naar de steilste afdaling laten we ons slechts in met de benadering

$$\psi(x_1 + iy_1) + \frac{\zeta^2}{2!}\,\psi''(x_1 + iy_1). \qquad (2.11)$$

Nemen we $\zeta = re^{i\theta}$, $r > 0$, dan is het reële deel van (2.11)

$$\mathrm{Re}\,\psi(x_1+iy_1) + \tfrac{1}{2}\,r^2\,\mathrm{Re}\{e^{2i\theta}\,\psi''(x_1+iy_1)\}. \qquad (2.12)$$

Er zijn modulo 2π twee waarden voor θ waarbij $e^{2i\theta}\,\psi''(x_1+iy_1)$ negatief reëel wordt; als alleen θ variëert zijn dit de minima van $\mathrm{Re}\{e^{2i\theta}\psi''(x_1+iy_1)\}$. Dit beschrijft de richtingen van de steepest descent. De zo gevonden twee in elkaars verlengde liggende halfrechten door het zadelpunt vormen samen wat we noemen de as van het zadelpunt.

Vervolgens bekijken we de situatie waarbij het hoogste punt van de weg in het beginpunt x_0+iy_0 ligt. Nu gebruiken we, analoog aan (2.10)

$$\psi(x+iy) = \psi(x_0+iy_0) + \zeta\,\psi'(x_0+iy_0) + \ldots \qquad (2.13)$$

en nu bekijken we slechts (in de onderstelling dat $\psi'(x_0+iy_0) \neq 0$)

$$\psi(x_0+iy_0) + \zeta\,\psi'(x_0+iy_0). \qquad (2.14)$$

Met $\zeta = re^{i\theta}$, $r > 0$, wordt de steepest descent nu aangegeven door de θ waarvoor $e^{i\theta}\,\psi'(x_0+iy_0)$ negatief reëel is; deze θ is mod 2π eenduidig bepaald, zodat er slechts één halfrechte door het beginpunt staat aangegeven.

Als we in plaats van het beginpunt met het eindpunt te maken hebben, gaan we op dezelfde wijze te werk.

Nadat men eenmaal de integratieweg gekozen heeft volgens de hierboven uiteengezette principes, kan men de integratieweg met een reële parameter beschrijven. Er komt dan een integraal over een reëel interval tevoorschijn waarbij men kan hopen dat er bij stijgende t een voldoende mate van "piekvorming" optreedt om de bij de methode van Laplace beschreven weg te volgen.

We vestigen er de aandacht op dat het niet nodig is om de integratieweg *precies* het minimaxprobleem te laten oplossen, niet nodig om *precies* over een zadelpunt heen te gaan en niet nodig om *precies* de steepest descent te volgen. Ook bij kleine afwijkingen van de ideale situatie is het nog wel mogelijk met de methode van Laplace succes te hebben. Dit betekent dat men veelal kan werken met een rekenapparaat dat aanzienlijk eenvoudiger is dan het "ideale". Zulks is reeds het geval in het volgende voorbeeld 6, dat voor alle andere toepassingen van de zadelpuntsmethode model kan staan.

Voorbeeld 6

In analogie met voorbeeld 2 nemen we

$$F(t) := \int_a^b e^{th(z)} g(z)\, dz, \tag{2.15}$$

waarbij g en h analytische functies zijn in een enkelvoudig samenhangend gebied dat de punten a en b bevat. In plaats van $e^{th(z)}g(z)$ bekijken we slechts de eenvoudiger functie $e^{th(z)}$, want voor grote t heeft g(z) betrekkelijk weinig invloed. We bestuderen derhalve het door Re h(z) bepaalde berglandschap.

Laat z_1 een zadelpunt van h zijn, d.w.z. $h'(z_1) = 0$, en onderstel $h''(z_1) = 0$. Laat verder a_1 en b_1 punten zijn ter weerszijden van z_1 op de as van het zadelpunt gelegen, en zó dicht bij z_1 dat voor alle punten van het rechtlijnige segment $[a_1, b_1]$ geldt $\mathrm{Re}\, h(z) < \mathrm{Re}\, h(z_1)$ met uitzondering van $z = z_1$. Dan is

$$F_1(t) := \int_{a_1}^{b_1} e^{th(z)} g(z)\, dz \tag{2.16}$$

met de methode van Laplace te behandelen. Laat θ de richting van a_1 naar b_1 aangeven:

$$a_1 = z_1 - \lambda e^{i\theta}, \quad b_1 = z_2 + \mu e^{i\theta}$$

met $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

Met $z = z_1 + ue^{i\theta}$ vinden we

$$F_1(t) = e^{i\theta} \int_{-\lambda}^{\mu} e^{th(z_1+ue^{i\theta})} g(z_1+ue^{i\theta})du. \qquad (2.17)$$

We schrijven dit even als

$$e^{i\theta} \int_{-\lambda}^{\mu} e^{tf(u)} k(u)\, du, \qquad (2.18)$$

en merken op dat

$$f''(0) = e^{2i\theta} h''(z_1) \qquad (2.19)$$

negatief reëel is, aangezien θ de asrichting aangeeft. We zijn nu nagenoeg in de situatie van voorbeeld 2; het feit dat f en k hier niet reëel zijn is geen ernstig bezwaar. Met betrekkelijk weinig moeite vindt men zo

$$F_1(t) \sim e^{i\theta} g(z_1)\, e^{th(z_1)} (2\pi)^{\frac{1}{2}} (-e^{-2i\theta} h''(z_1))^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.20)$$

als $t \to \infty$, in de onderstelling dat $g(z_1) \neq 0$.

We keren terug naar onze oorspronkelijke eindpunten a en b. Het volgende is duidelijk: als het lukt om a met a_1 en b met b_1 te verbinden zó dat op die verbindingsstukken $\text{Re } h(z) < \text{Re } h(z_1)$, dan zijn de bijdragen van die stukken exponentieel klein in vergelijking met $F_1(t)$, zodat het rechterlid van (2.20) ook het asymptotische gedrag van $F(t)$ aangeeft.

Men kan dit resultaat verscherpen tot een asymptotische reeksontwikkeling voor $F(t)$, bijv. door de in voorbeeld 4 geschetste methode te gebruiken.

We bekijken vervolgens het geval dat we voor de integraal (2.15) een integratieweg hebben gevonden waarop voor elke $z \neq a$ geldt $\text{Re } h(z) < \text{Re } h(a)$. We veronderstellen (evenals bij (2.14)) dat $h'(a) \neq 0$. Laat θ voldoen aan $e^{i\theta} h'(a) < 0$. We nemen nu een a_1 van de vorm $a + \lambda e^{i\theta} a_1$ met $\lambda > 0$, en wel zodanig dat op de verbindingslijn van a met a_1 overal (behalve in a zèlf) geldt $\text{Re } h(z) < \text{Re } h(a)$.

We kunnen nu $z = a + ue^{i\theta}$ stellen en u van 0 tot λ laten lopen. In de onderstelling dat $g(a) \neq 0$ kunnen we ons bij voorbeeld 3 aansluiten en vinden

$$F(t) \sim e^{th(a)}(-th'(a))^{-1}\, g(a) \qquad (t \to \infty). \tag{2.21}$$

Voorbeeld 7

We bekijken weer de gammafunctie, maar gaan nu uit van de formule

$$\frac{1}{\Gamma(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^w}{w^t}\, dw \qquad (t > 0).$$

Met behulp van de substitutie $w = tz$ vinden we

$$\frac{1}{\Gamma(t)} = \frac{t^{-t+1}}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{(z-\log z)t}\, dz.$$

We noemen (in overeenstemming met (2.15)) $z - \log z = h(z)$. Daar $h'(z) = 1 - z^{-1}$, ligt er een zadelpunt in het punt 1. Verder is $h''(1) = 1$. De as van het zadelpunt is de vertikale lijn door het punt 1. Het ligt voor de hand te proberen of we deze lijn niet in zijn geheel als integratieweg kunnen gebruiken. In het punt $z = 1+iy$ (y reëel) is

$$\operatorname{Re} h(z) = 1 - \operatorname{Re}\log(1+iy) = 1 - \tfrac{1}{2}\log(1+y^2)$$

zodat het zadelpunt het hoogste punt van de weg is.

Voor elke $\lambda > 0$ geldt dat

$$\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t\log(1+y^2)}\, dy$$

exponentieel klein is, want voor $t > 4$ is het kleiner dan

$$e^{-\frac{1}{4}t\log(1+\lambda^2)}\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}t\log(1+y^2)} dy < e^{-\frac{1}{4}t\log(1+\lambda^2)}\int_0^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}\,.$$

We kunnen ons nu verder tot het interval $-\lambda \leq y \leq \lambda$ beperken. Aangezien voor $|y| < 1$

$$1 + iy - \log(1+iy) = 1 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} iy^3 + \ldots$$

vinden we volgens voorbeeld 2

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\{1+iy-\log(1+iy)\}t}\, dy \sim (2\pi/t)^{\frac{1}{2}}.$$

Het eindresultaat is

$$\frac{1}{\Gamma(t)} \sim t^{-t+\frac{1}{2}}\, e^t\, (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \qquad (t \to \infty).$$

We wijzen hier nog op de mogelijkheid dezelfde methode te gebruiken in het geval dat t complex is, mits $|\arg t| < \pi - \delta$.

Voorbeeld 8

Laat $v(z)$ voor alle reële z reëel en analytisch zijn. We nemen aan dat a en b reële getallen zijn, $a < b$, $v'(a) \neq 0$, $v'(b) \neq 0$, dat v' tussen a en b precies één nulpunt c heeft, en dat $v''(c) \neq 0$. We beschouwen voor $t \to \infty$

$$F(t) = \int_a^b e^{itv(x)}\, dx$$

en vragen het asymptotisch gedrag voor $t \to \infty$.

Voor een dergelijk geval (weg met constante hoogte) wordt gewoonlijk de z.g. methode der stationnaire phase aanbevolen. Het is echter gemakkelijk in te zien dat de zadelpuntsmethode evengoed succes heeft.

Zonder beperking van de algemeenheid mogen we aannemen dat $v''(c) > 0$, dus $v'(x) > 0$ voor $c < x \leq b$, $v'(x) < 0$ voor $a < x \leq c$. We beschouwen het berglandschap $w(x+iy) = \mathrm{Re}(i\, v(x+iy))$. De reële as is een weg met constante hoogte. Voor reële z is $\partial w/\partial y = -\mathrm{Im}\,(i\, v'(z)) = -v'(z)$. Gaande van a naar c hebben we dus het "ravijn" aan de rechterhand, gaande van c naar b aan de linkerhand.

Het punt c is een zadelpunt, waarvan de as een hoek van $\frac{1}{4}\pi$ met de reële as maakt, lopende van linksonder naar rechtsboven.

We kunnen een geschikte integratieweg vinden door de oorspronkelijke weg een klein beetje te vervormen: vertrekkende vanaf a lopen we even het ravijn in, lopen vervolgens evenwijdig met de reële as tot dicht bij c, hier steken we de oorspronkelijke weg over volgens de as van het zadelpunt, lopen verder weer parallel met de as, nu in het bovenhalfstuk, en kruipen tenslotte bij b weer tegen de helling op.

Onze ervaring uit de vorige voorbeelden heeft geleerd dat de bijdrage van de steepest descent bij a en b van de orde t^{-1} is, die van het zadelpunt van de orde $t^{-\frac{1}{2}}$. De bijdrage van het stuk van $c - (1+i)\lambda$ naar $c + (1+i)\lambda$ (met kleine, van t onafhankelijke λ) laat zich berekenen volgens voorbeeld 6 (zie (2.20)). Het eindresultaat is dat

$$F(t) \sim e^{\pi i/4}\, e^{itv(c)}\, (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, (tv''(c))^{-\frac{1}{2}}.$$

Wanneer we dieper graven krijgen we asymptotische reeksontwikkelingen, waarbij c termen levert van de soort

$$e^{itv(c)}\, t^{-k-\frac{1}{2}} \quad (k = 0,1,2,\ldots),$$

terwijl a termen levert van het type

$$e^{itv(a)}\, t^{-k} \quad (k = 1,2,3,\ldots);$$

bij b is de situatie natuurlijk analoog aan die bij a.

Voor verdere voorbeelden verwijzen wij naar de opgegeven literatuur.

Literatuur

N.G. de Bruijn, Asymptotic Methods in Analysis, Amsterdam-Groningen, 1958.

E.T. Copson, Asymptotic Expansions, Cambridge, 1965.

A. Erdélyi, Asymptotic Expansions, New York, 1956.

H. Jeffreys and B.S. Jeffreys, Methods of Mathematical Physics, Cambridge, 1956.

H. Jeffreys, Asymptotic Approximations, Oxford, 1962.

H.A. Lauwerier, Asymptotic Expansions, Amsterdam, 1966.

J. Barkley Rosser, Asymptotic Formulas and Series, ch. 5 in Modern Mathematics for the Engineer, 2nd series, editor E.F. Beckenbach, New York, 1961.