

Eenige beschouwingen over de waarde der wiskunde

Citation for published version (APA):

de Bruijn, N. G. (1946). *Eenige beschouwingen over de waarde der wiskunde*. Noordhoff.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1946

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

A

VAN DEN SCHRIJVER

EENIGE BESCHOUWINGEN OVER DE WAARDE DER WISKUNDE

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING
VAN HET AMBT VAN HOOGLEERAAR
IN DE ZUIVERE EN TOEGEPASTE
WISKUNDE EN DE THEORETISCHE
MECHANICA AAN DE TECHNISCHE
HOOGESCHOOL TE DELFT, OP
DINSDAG 26 NOVEMBER 1946

DOOR

Dr. N. G. DE BRUIJN

EENIGE BESCHOUWINGEN OVER DE WAARDE DER WISKUNDE

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING
VAN HET AMBT VAN HOOGLEERAAR
IN DE ZUIVERE EN TOEGEPASTE
WISKUNDE EN DE THEORETISCHE
MECHANICA AAN DE TECHNISCHE
HOOGESCHOOL TE DELFT, OP
DINSDAG 26 NOVEMBER 1946

DOOR

Dr. N. G. DE BRUIJN

f 0.90*

*Mijne Heeren Curatoren, Professoren en Lectoren,
Dames en Heeren Privaatdocenten, Assistenten en
Studenten, en voorts Gij allen, die deze plechtigheid
met Uw tegenwoordigheid vereert,*

Zeer Geachte Toehoorders,

Voor de derde maal in dit jaar maakt een mathematicus bij het aanvaarden van het ambt van gewoon hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool gebruik van het recht of zoo men wil, onderwerpt hij zich aan de plicht, tot het uitspreken van een rede. S. C. van Veen benutte deze gelegenheid door het houden van een betoog over de voor deze Hoogeschool zoo belangrijke wisselwerking tusschen zuivere en toegepaste wiskunde. Visser liet U op duidelijke en leerzame wijze de evolutie zien van een fundamenteel wiskundig begrip: het getalbegrip. Nu wordt ten derde male Uw welwillende aandacht gevraagd voor een oratie over de wiskunde. Evenmin als mijn voorgangers zal ik U lastig vallen met een wiskundig betoog, bestaande uit het trekken van reeksen van logische conclusies uit van te voren nauwkeurig geformuleerde onderstellingen, aangezien dit onmogelijk in den vorm van een rede kan worden gegoten. Het zou van de toehoorders eischen dat zij zich bij elken stap een nauwkeurig beeld zouden vormen van de daarbij gebruikte voorafgaande stappen, en bij het denken daaraan tegelijk den volgenden stap in zich zouden kunnen opnemen. Dat van studenten op een college wèl wordt gevraagd een wiskundig betoog te volgen is ten duidelijkste een andere kwestie: daar maakt een voordracht deel uit van een volledige cursus, er wordt van een bord gebruik gemaakt om allerlei resultaten tijdelijk vast te leggen, het gehoor is homogeen wat leeftijd en vooropleiding betreft, en bovendien is er eenig contact mogelijk tusschen de beide betrokken partijen.

Ook het geven van een overzicht over de recente ontwikkeling van de een of andere tak der wiskunde is weinig geschikt voor een gelegenheid als deze. Zelfs wanneer het toegepaste wiskunde betrof zou ik niet op Uw aller belangstelling kunnen rekenen. Hetzelfde geldt in zekere mate voor historische of biografische beschouwingen. U wilt mij dus ten goede houden, dat ik in dit uur het betoog in algemeene banen houd, de wiskunde van verschillende kanten belicht en aan een, vanzelfsprekend subjectieve, waardebeoordeeling onderwerp. Daarbij zal ik allerminst streven naar originaliteit, en nog

minder naar volledigheid. Ik zal het daarbij niet uitsluitend, en ook niet in de eerste plaats hebben over het *practische nut* der mathesis, doch algemeen de wiskunde als cultuurfactor ter sprake brengen.

Een aantal jaren geleden werd in een toenmaals nog bevriende staat de slagzin gelanceerd: „Wenn ich das Wort Kultur höre, greife ich schon nach dem Revolver“. Er is een tijd geweest dat vele technici een dergelijke houding aannamen, hoewel vreedzamer instrumenten zooals rekenlinealen en ampèremeters daarbij de plaats van de revolver innamen. Er zijn allerlei teekenen die er op wijzen, dat heden ten dage een andere houding tegenover cultuur wordt aangenomen, zoodat ik het waag in Uw midden de woorden wiskunde en cultuur met elkaar in verband te brengen.

Wanneer Huizinga in zijn bekende boek „De schaduwen van morgen“ de ernstigste kwalen van dezen tijd aanwijst, brengt hij in het bijzonder de volgende vier naar voren: de algemeene verzwakking van het oordeel, de daling van de critische behoefte, de verzaking van het kennisideaal en het verval der moreele normen. Hoewel het van een diepgaande onnoozelheid zou getuigen, wanneer iemand hier de beoefening der wiskunde als panacee aanbeval, wil ik niet nalaten er op te wijzen dat zij nochtans tegenover enkele dezer kwalen een positieve geaardheid kan opleveren en dat het daarom niet volslagen onzinnig is de mathesis met het groote woord cultuurfactor te bestempelen. Afgezien hiervan is dit woord reeds gerechtvaardigd op grond van het feit dat de wiskunde in voortdurende wisselwerking staat met wetenschap en techniek, die althans voor het uiterlijke aanzien van de wereld van vandaag voor een groot gedeelte verantwoordelijk zijn. De wiskunde kan, althans gedeeltelijk, worden *toegepast*. Hieraan denken wij, wanneer we over haar *practische nut* spreken.

Ik noem nog drie andere positieve waarden op grond waarvan zij aanspraak maakt op een eereplaats in onze cultuur: zij kan de bevrediging beteekenen van den drang naar onbetwistbare kennis, zij bezit duidelijk aanwijsbare schoonheidselementen, en zij is een belangrijk hulpmiddel bij de opvoeding der menschheid wat het aanleeren van doelmatige denkgewoonten betreft. Afgezien van deze laatste, de *vormende waarde*, zijn dit ook de waarden, die aangeven waarom men zich met wiskunde bezighoudt; de vormende waarde is een van de belangrijkste beweegredenen om wiskunde aan anderen te onderwijzen. Terloops dien ik op te merken, dat de belangrijkste beweegreden waarom men zich met wiskunde in den een of anderen vorm bemoeit, in vele gevallen eenvoudig bestaat uit het feit, dat men er als verplicht leervak op een school mee te maken heeft.

Wanneer echter de eerder genoemde motieven hier op den duur geen rol bij gaan spelen kan men moeilijk spreken van met vrucht doorloopen onderwijs.

Laten wij beginnen met een korte beschouwing over de eerstgenoemde waarde, den drang naar onbetwistbare kennis.

Huizinga noemt de verzaking van het kennisideaal een ernstige kwaal van dezen tijd. Wie het niet meer noodig acht dingen te weten, die niet beslist uit utiliteitsoverwegingen geweten *moeten* worden, is geestelijk dood. Het proces van het zich afvragen en willen weten is een van de meest fundamenteele levensverrichtingen van den mensch. Dit kennisideaal is een teere plant, die zorgvuldig onderhoud vraagt.

De drang naar *nuttige* kennis is niet in de eerste plaats drang naar kennis, maar naar nut. De drang naar *onbetwistbare* kennis daarentegen is de zuiverste vorm van den drang naar kennis om de kennis zelve.

Of wiskunde onbetwistbare kennis kan vertegenwoordigen, is natuurlijk niet direct met een volmondig „ja” te beantwoorden. De termen „wiskunde”, „onbetwistbaar” en „kennis” zouden eerst zeer nauwkeurig moeten worden omschreven en daarna zouden we de vraag misschien kunnen reduceeren tot een psychologisch probleem, of misschien tot een schijnprobleem. Wèl kunnen we twee dingen constateeren: de *drang* naar onbetwistbare kennis komt bij de beoefening der wiskunde tot uiting, en in de tweede plaats: als er in eenige wetenschap eenig onbetwistbaar feit bestaat, dan is dat in de wiskunde. Geen uitspraak op fysisch, biologisch of historisch terrein kan worden gelanceerd met de zekerheid die we hebben bij de uitspraak van de bewering „twee maal zes is drie maal vier”. Of dit laatste nu een ervaringsfeit is dan wel een bewezen eigenschap of een taalregel, laat ik hier in het midden. Een feit is echter, dat er alleen maar aan getwijfeld kan worden door lieden die bij wijze van tijdverdrijf aan alles twijfelen.

Huizinga constateert dat het kennisideaal niet meer in tel is, en betreurt dit. Hij schrijft het hoofdzakelijk toe aan overlading: sinds enkele eeuwen is het niet meer mogelijk ook maar een globaal overzicht te hebben van alle dingen, die de moeite van het bestudeeren waard zijn. Deze wetenschappelijke rijstebrijberg werkt verlamvend op de geestelijke eetlust. Op den duur geven degenen die zich door den berg heeneten met het doel, om aan den anderen kant, in het

Luilekkerland der absolute kennis, te komen den moed op, en hun taak wordt overgenomen door lieden die tegenover dat Luilekkerland betrekkelijk onverschillig staan, doch alleen maar doorgaan, omdat ze erg veel van rijst houden.

Ik geloof niet dat een dergelijke verschuiving van motieven ernstige gevolgen heeft. Het eenige gevaar is de hypothetische mogelijkheid, dat men vroeg of laat op een rijstader stuit van een kwaliteit, die niemand meer apprecieert. In dat geval zou men de exploitatie van den berg nòg niet behoeven te staken, aangezien er altijd nog idealisten zijn die zich over zoo'n karweitje willen ontfemen. Het accent verschuift van den kennisdrang naar andere motieven: het aesthetische motief, het utiliteits- en het spelmotief. Ook in de wiskunde is een dergelijke verschuiving waar te nemen, doch uit de omstandigheid, dat de belangstelling voor grondslagenonderzoek in de wiskunde heden ten dage hoogtij viert, en dat daaraan door de allerbeste mathematici wordt gewerkt, dienen we te concludeeren dat het eerste motief, de drang naar onbetwistbare kennis, er nog steeds een zeer belangrijke plaats inneemt.

Laten wij nu de schoonheidselementen van de wiskunde eens in oogenschouw nemen. Na de opmerking gemaakt te hebben, dat deze een kwestie van smaak betreffen en dat over smaak niet valt te twisten, kunnen we probeeren, eenigszins objectief verschillende vrij algemeen erkende schoonheidskenmerken in de wiskunde aan te wijzen. Ik wil niet betoogen dat alle wiskunde al deze kenmerken vertoont, want er bestaat zowel mooie als leelijke wiskunde, evenals er mooie en leelijke schilderijen zijn. Niemand kan een objectieve scheidingslijn tusschen de mooie en de leelijke trekken, maar dat neemt niet weg dat schilderkunst aesthetische waarde bezit. Een schoonheidskenmerk is bijvoorbeeld *kracht*. Evenals men een locomotief mooi kan vinden, omdat zij sterk is en zij zulks in haar vormen duidelijk uit laat komen, kan men in de wiskunde een bewijs, een stelling, een methode of een theorie mooi vinden wegens haar kracht. Ik denk bijvoorbeeld aan de door *Leibniz* en *Newton* gegrondveste infinitesimaalrekening, die plotseling ongekeerde perspectieven opende. Met buitengewoon eenvoudige middelen was een methode geschapen, die het mogelijk maakte om door te dringen in vele gebieden, die voordien ontoegankelijk waren geweest. Zoo stelde de infinitesimaalrekening *Newton* in staat om uit een eenvoudige gravitatiehypothese de wetten van *Kepler* betreffende de banen der planeten af te leiden en zich van allerlei afwijkingen

rekenschap te geven. Het werd mogelijk problemen in de mechanica en physica door differentiaalvergelijkingen te beschrijven en deze in vele gevallen op te lossen. Men kan gerust zeggen dat zonder deze mathematische methode de techniek en de meeste exacte wetenschappen nu nog in een uiterst primitief stadium zouden staan.

Maar het voorbeeld der infinitesimaalrekening is een slecht gekozen voorbeeld van kracht. Hier is niet alleen de *kracht* groot, maar ook het *practisch nut*, en het is niet gemakkelijk uit te maken welke eigenschap men nu het meest bewondert. Kracht behoeft echter niet altijd direct met praktisch nut samen te gaan. Zoo kan men een onstuimige waterval bewonderen om de kracht, die erin tot uitdrukking komt, zonder direct te denken aan het omzetten van deze kracht in kWh's. Ik zou U wel wiskundige voorbeelden van kracht zonder praktisch nut kunnen geven, maar laat dit achterwege. Om diegenen te bevredigen, die kracht alleen wegens het nut kunnen apprecieeren, zou ik immers een voorbeeld moeten kiezen, waarbij de nutteloosheid duidelijk naar voren springt. Zoo'n voorbeeld zou echter gemakkelijk voedsel kunnen geven aan het misverstand dat vele mathematici opzettelijk zouden streven naar kracht zonder nut, en dus nutteloosheid en ontoepasbaarheid tot schoonheidscriteria zouden hebben verheven.

Een ander schoonheidskenmerk is *eenvoud*. Lang niet alle wiskunde is eenvoudig, doch overal waar eenvoud mogelijk is wordt deze om aesthetische redenen geprefereerd. Waar van een stelling meer bewijzen mogelijk zijn, zal aan het eenvoudigste meestal de voorkeur worden gegeven. Overal waar een simpele redeneering een wild gereken vervangt, zal zulks iedereen bekoren.

Ook resultaten kunnen eenvoudig zijn. Men vindt de stelling van Pythagoras mooi, omdat zij een eenvoudig verband legt tusschen de hypothenusa en de rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek: $c^2 = a^2 + b^2$. Als er voor c een ingewikkelde formule was uitgekomen met wortelvormen en logaritmen er in, zou de schoonheidswaarde aanmerkelijk zijn gedaald.

Natuurlijk hangt de waardeering van den eenvoud van een resultaat nog af van de waarde van het resultaat. De formule voor $(a + b)^2$ is eenvoudig, en ook heel goed bruikbaar. Maar iemand die de bedoeling van de opgave eenmaal heeft begrepen, zal het resultaat $a^2 + 2ab + b^2$ onmiddellijk opschrijven en er zich ternauwernood over verwonderen. Wil een resultaat dus door eenvoud bekoren, dan moet het tegelijk kunnen verrassen, het moet onverwacht zijn en niet triviaal. De stelling van Pythagoras is niet triviaal, maar drukt een belangrijke ontdekking uit. De eenvoud ervan draagt

bij tot het belang en de toepasbaarheid. Doordat de stelling eenvoudig is, is zij gemakkelijk te onthouden en te hanteeren. Men kan daarom geneigd zijn ook de waarde van den eenvoud geheel aan toepasbaarheid toe te schrijven en niet meer over schoonheid te spreken. Laat ik nu niet in de fout vervallen, over aethetica te gaan argumenteeren, doch U als voorbeeld een wonderlijk eenvoudige ontdekking van Fermat noemen.

Beschouwen we eens die ondeelbare getallen die viervouden plus een zijn: 5, 13, 17, 29, 37, 41, . . . enz. De bedoelde stelling luidt nu, dat elk dezer getallen als som van twee kwadraten kan worden geschreven: $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 2^2 + 5^2$ enz. Ze kunnen bovendien slechts op één manier als som van twee kwadraten worden geschreven. Deze stelling is verrassend, want zij legt verband tusschen twee zeer ongelijksoortige eigenschappen: ondeelbaarheid en splitsbaarheid in kwadraten. Zij is niet triviaal. Integendeel, wie deze stelling bewijzen kan, geeft blijk van een behoorlijke wiskundige begaafdheid. Het geven van een bewijs moge niet gemakkelijk zijn, het resultaat is in elk geval zeer eenvoudig en zal ook bewonderaars vinden onder degenen die nimmer wiskunde in eenigen vorm tot zich hebben genomen. Gemakkelijke toepasbaarheid is hier geen motief voor de waardeering van den eenvoud, want iemand die de stelling van Fermat voor het eerst hoort, weet niet waaròp en waaròm hij haar toe zou moeten passen. Dit leidt mij er toe, den eenvoud van deze stelling een aethetische waarde te noemen.

Men spreekt in de wiskunde ook van *élégance*. Dit begrip is moeilijk in woorden uit te drukken, maar iedereen kan de bedoeling aanvoelen. Het is bijvoorbeeld elegant om formules die symmetrisch zijn in een aantal variabelen, zóó te bewijzen, dat bij elken stap van het bewijs die symmetrie behouden blijft. In het algemeen is dan de behandeling „soepeler” dan wanneer de symmetrie verloren gaat. In de analytische meetkunde is het rekenen met homogene coördinaten meestal eleganter dan met inhomogene, ofschoon een beginneling de laatste gemakkelijker vindt. Verder is het leelijk, als in een bewijs tweemaal ongeveer dezelfde beschouwing optreedt, en het is elegant om met behulp van den een of anderen kunstgreep deze twee „onder één hoedje te vangen”. Het is niet elegant om op musschen te schieten met een kanon, of visch te vangen met handgranaten. Zoo wordt het ook niet elegant geacht om met partieel differentieeren los te trekken op een sommetje dat met doodgewone algebra gemakkelijk kan worden opgelost.

Een vierde schoonheidskenmerk dat ik U wil noemen, is *harmonie*.

Er is sprake van harmonie, wanneer in een wiskundig bewijs, of in een theorie, een aantal argumenten of methoden van verschillenden aard elkaar aanvullen en door de goede samenwerking tot een resultaat komen. Sommige deelen der wiskunde wekken de gedachte aan een groot orkest. Ik denk bijvoorbeeld aan de theorie der elliptische functies waar onder andere de integraalrekening, oneindige reeksen en producten, de functietheorie van Cauchy, van Riemann en van Weierstrass ieder op hun beurt en soms gezamenlijk een steentje bijdragen. Wat dit betreft was Felix Klein een begaafd componist en dirigent. In zijn werken laat hij zoo goed als alle onderdeelen van de toen bekende wiskunde samenvloeiën tot één machtige symphonie. Deze onderdeelen behouden daarbij elk hun zelfstandige waarde, maar grijpen overal in elkaar, vullen elkaar aan, steunen elkaar, en bereiken gezamenlijk nieuwe, mooie en grootsche resultaten. De aesthetische waarde van het werk van Klein ligt grootendeels in het *symphonische* karakter ervan. Een typisch voorbeeld is zijn boek over de hypergeometrische functies, waarin hij de theorie vanuit drie gezichtspunten: de hypergeometrische reeksen, de hypergeometrische integralen en de hypergeometrische differentiaalvergelijking ontwikkelt, overal hun onderlinge samenhang aantoot en deze bekroont door de van Riemann afkomstige functietheoretische behandeling. Daarna bestudeert hij de door het quotient van twee hypergeometrische functies opgeleverde conforme afbeelding, onder allerlei algebraïsche, meetkundige en functietheoretische gezichtspunten.

Een ander schoonheidselement, dat in de wiskunde een belangrijke plaats bekleedt, is *orde*. Het doet aesthetisch aan, in den een of anderen warboel orde te scheppen, bijvoorbeeld door een geschikte classificatie. Doch hier is het gemak dat men heeft door denkbaarheid uit te sparen meestal zóó groot, dat het aesthetische motief bijna niet wordt opgemerkt.

In verband met de schoonheidselementen in de wiskunde zou men nog de volgende vraag naar voren kunnen brengen: Is die schoonheid een eigenschap van de manier waarop de mathesis wordt beschreven of is het de schoonheid van de wiskunde zèlf? Bij het stellen van deze vraag ziet men de wiskunde als een schilderij waarop een natuurtafereel is afgebeeld en vraagt men of de schoonheid berust op de verf dan wel op de natuur. Dit brengt ons op de vraag: bestaat er wel, zooals de natuur bij het schilderij, een wiskundige realiteit, die door de wiskundigen steeds verder wordt ontdekt en in kaart wordt gebracht? Bestaat de wiskunde op zichzelf, buiten den menschelijken geest om?

Deze vragen staan op een primitief niveau en worden door den modernen mensch naar den rommelhoek der schijnproblemen verwezen. Wat zouden we onder wiskunde anders kunnen verstaan dan de som van alle menschelijke mathematische activiteit? Niettemin kunnen dergelijke primitieve onderscheidingen heel goed van invloed zijn bij aesthetische waardeeringen. Bij sommige wiskundige theorieën kan men van oordeel zijn, dat Gauss of Riemann of wie het geweest moge zijn, iets mooi in elkaar heeft gezet en elegant heeft behandeld, scherp geformuleerd en economisch bezeugen, doch in andere gevallen kan men meer neigen tot de opvatting, dat het de wiskunde zèlf is, waaraan de aesthetische waarde toekomt, onafhankelijk van wat menschen er aan hebben gedaan. Dezen indruk krijgt men vooral daar waar met een vrij eenvoudig principe plotseling een groot en mooi gebied wordt geopend, en ook daar, waar men van een stelling of formule steeds meer frappante analogieën vindt, zonder dat men den algemeenen achtergrond daarvan kan ontdekken. We hebben dan het gevoel, dat de wiskunde veel mooier is dan het gedeelte, dat wij er tot nu toe van ontdekt hebben. Of de wiskunde buiten ons om nog wel bestaat, vragen we ons daarbij niet af. We *gelooven* eenvoudig dat ze bestaat.

In de wiskunde kent men ook nog elementen, die geen schoonheidselementen genoemd mogen worden, maar die niettemin tot het genoegen van den mensch kunnen bijdragen. Ik bedoel hier de genoegens die het wiskundig bezigzijn kan opleveren en die men *spel-elementen* zou kunnen noemen. Het zijn genoegens die men bij iedere wetenschapsbeoefening aantreft, zooals: het op avontuur uitgaan in een onbekend gebied en het terugkijken als er iets geheel voltooid is. De belangrijkste genoegens zijn echter: het *zich verwonderen* en het *hebben van een goeden inval*.

Gelukkig is de mensch die zich nog ergens over verwonderen kan: wie dat niet kan, heeft een saai leven. Gelukkig is bovenal de mensch, die zich over *kleine* dingen kan verwonderen, want wie als objecten voor zijn verwondering steeds grootere en grovere dingen noodig heeft, vervalt gemakkelijk in sensatiezucht.

Niet minder geluk dan de momenten van verwondering verschaffen de goede invallen. Het menschelijke denkvermogen is een log en traag apparaat. Doorgaans beweegt het zich machinaal en fantasieloos, desnoods wel ordelijk en ijverig, maar toch over platgetreden paden, zoodat het niets nieuws bereikt. Maar soms maakt het plotseling een grooten sprong en komt dan tot iets goeds. Het is alsof men zich in een van buiten afgegrensde kamer bevindt

en na lang zoeken bij wijze van toeval op de traditioneele veer drukt die de geheime deur in beweging brengt. Deze momenten, waarop we *Eureka* roepen, behooren tot de beste van ons leven.

We zullen nu eenige beschouwingen wijden aan de *vormende waarde* der wiskunde, waaronder we verstaan den invloed dien het complex van mathematische spelregels, denk- en werkmethoden en -gewoonten heeft gehad en nog heeft op onze beschaving als geheel en op de persoonlijkheid van den individueelen beoefenaar in het bijzonder.

Wat de spelregels betreft, deze zijn de regels die bepalen wat mag en niet mag. Zij spreken zich uit over de eischen, waaraan axioma's, definities, redeneeringen en stellingen moeten voldoen wat hun logischen inhoud betreft. Het werken met de spelregels beteekent een oefening in het logisch redeneeren. De opvoedende waarde ervan wordt verhoogd door de omstandigheid, dat foutieve redeneeringen in de wiskunde veelal gemakkelijk door tegenvoorbeelden zijn te ontzenuwen. Doordat men zich er vaak genoodzaakt ziet, incorrecte redeneeringen, van zichzelf of van een ander, te restaureeren of de onherstelbaarheid er van aan te toonen, kan de beoefening der wiskunde een sterk critisch vermogen aankweeken, wat zoowel voor alle andere wetenschappen als ook voor het dagelijksch leven nuttig is.

Afgezien hiervan ligt de *cultureele* waarde van de spelregels in het feit, dat de axiomatische en logische opbouw der wiskunde een model vormt voor alle deductieve wetenschap. Niet ten onrechte doceert men tot den huidigen dag in het middelbare meetkunde-onderwijs de Elementen van Euclides, die, zij het dan ook met eenige tekortkomingen, dezen opbouw duidelijk demonstreeren. Hier ziet men een samengaan van redeneering en aanschouwing, hetgeen een didactisch waardevol element is, doch het hoofdmotief is, dat de redeneering van de aanschouwing wordt losgemaakt. Als zoodanig vormen de Elementen een cultuurmonument van hooge waarde.

Het is niet alleen de kennis der logische spelregels zèlf, die door de wiskundige activiteit wordt bevorderd. Iemand die precies weet hoe hij de eene steen op de andere moet metselen, is nog niet altijd in staat een huis te bouwen. Hij dient nog te weten welke kenmerken een huis van een vormeloozen steenklomp onderscheiden, en bovendien, hoe hij tot het resultaat „huis" moet komen. Evenzoo dient men bij het werken aan een mathematisch probleem over zekere

bewuste of onbewuste tactische methoden te beschikken om tot een oplossing te komen. Het is echter uiterst moeilijk aan te geven op welke methoden en welke kwaliteiten de wiskundige vaardigheid is gebaseerd en hoe deze methoden en kwaliteiten het beste kunnen worden aangeleerd. Het traditioneele middel om ze te leeren beheerschen is de beoefening van de wiskunde zelf; het is de taak van iederen docent, na te gaan welke stof en welke behandelingswijze zich daarvoor het beste leenen. Men zou dit ook kunnen omkeeren, nl. door aan leerlingen, die reeds eenig begrip van wiskunde hebben, afzonderlijk onderricht in tactische methoden te geven, waarbij dan wiskundige problemen alleen als voorbeelden optreden. Ik denk in dit verband aan het onlangs verschenen boekje: „How to solve it”, van den bekenden mathematicus G. Polya, waarin deze algemeene richtlijnen voor het oplossen van problemen aangeeft. Hoe moeilijk deze materie echter systematisch is te behandelen, blijkt wel uit het feit dat de schrijver een aantal methoden en beschouwingen elk van een trefwoord voorziet, en ze vervolgens alphabetisch rangschikt! Het is mij overigens niet bekend of een dergelijk onderwijs in tactiek ooit tot gunstige resultaten heeft geleid.

Al moeten we hier dan in het midden laten, welke de tactische methoden en voor de beoefening der mathesis nuttige gewoonten *precies* zijn, het is niet aan twijfel onderhevig, dat vele dezer methoden en gewoonten door oefening kunnen worden aangeleerd, en dat ze ook buiten de wiskunde van nut kunnen zijn. Ik denk bijvoorbeeld aan orde, netheid, systematiek, weglaten van niet ter zake doende bijkomstigheden, duidelijke en scherpe formuleeringen en begripsvormingen, doelmatige notaties, het vervangen van voorwaarden door equivalente, aan de gewoonte om bij iedere stelling te onderzoeken of zij kan worden omgekeerd, en zoo neen, waarom niet, aan het oplossen van problemen door van achteren naar voren te werken, enz.

Belangrijk is verder het oefenen van het logisch voorstellingsvermogen, d.i. het vermogen om een aantal zaken tegelijk in hun onderlingen samenhang te overzien, ook in gecompliceerde gevallen. We zouden hier ook kunnen spreken van het leeren combineeren.

Verschillende dezer nuttige eigenschappen en gewoonten kunnen ook in andere gebieden worden aangeleerd, doch geen tak van wetenschap, sport of spel, biedt ze in zulk een rijke verscheidenheid als de wiskunde.

Wanneer ik tenslotte aan de *toepasbaarheid* der wiskunde slechts

weinig woorden wijdt, is dat niet omdat ik dit een cultuurfactor van lageren rang acht, doch omdat welhaast iedereen van deze toepasbaarheid volkomen overtuigd is. De praktische waarde van de mathesis is voor de meeste wetenschappen en de meeste deelen der techniek immers zoo groot, dat men wel een half dozijn zwarte brillen zou moeten opzetten om haar niet te zien. Waar men ook kijkt, overal ziet men wiskunde toepassen. In sommige vakken kan men met zeer eenvoudige wiskunde volstaan, in andere gevallen, zooals in de physica en in verschillende deelen der moderne techniek, heeft men de krachtigste mathematische hulpmiddelen noodig en schreeuwt men voortdurend om méér. Nu eens ziet men volgens traditioneele schema's berekeningen uitvoeren, dan weer heeft de wiskunde de taak om bereikte resultaten te consolideeren, zoodat de voortzetting van het onderzoek wordt gesteund door het bewustzijn dat er niet op zand is gebouwd, en soms zijn de wiskundige methoden aanleiding tot het openen van een geheel nieuw gebied dat niet langs andere wegen te bereiken is.

Men moet zich echter geen àl te groote voorstelling maken van de macht der wiskunde. Wanneer bijv. een technicus zich tot een mathematicus wendt met de vraag, hoe men in het algemeen de maxima bepaalt van een functie waarvan de Fourier-coëfficiënten gegeven zijn, zal hij meestal weinig bevredigd worden. Desondanks kan het feit dat een beroepswiskundige er eigenlijk ook niets beters op weet te verzinnen dan het teekenen van een plaatje in elk afzonderlijk geval, voor den technicus een zekeren troost beteekenen en hem den moed verschaffen om een bewerkelijk onderzoek tot het bittere doch vruchtbare einde uit te voeren.

Terugkeerende tot het door Huizinga gesignaleerde cultuurverval, meen ik op grond van de waarden: *kennisdrang*, *schoonheid*, *intellectueele vorming* en *practisch nut* te mogen zeggen, dat de wiskunde bij dit vervalproces een *behoudende factor vormt*. Dat de beteekenis van deze uitspraak niet mag worden overdreven, blijkt wel uit het feit dat de wiskunde bijv. met het terrein van de moreele normen geen duidelijke relaties heeft, afgezien van enkele vage indicaties betreffende deugden als oprechtheid en bezonnenheid. Niettemin blijven er nog genoeg redenen over, om de wiskunde de *ruggegraat* van onze cultuur te mogen noemen.

Volgens een bekende anecdote gaf eens een schooljongen op de vraag wat de ruggegraat was, het volgende antwoord: op den eenen kant zit het hoofd, op den anderen kant zitten we zelf. Analoog

kunnen we de geestelijke en de practische waarde van de wiskunde symboliseeren.

Vragen wij ons thans echter af, of de wiskunde niet zelf aan verval onderhevig is, of er niet het gevaar dreigt, dat vroeg of laat ruggegraatsverkromming optreedt, het hoofd eraf valt en het niet meer comfortabel zal zijn om op den anderen kant te zitten.

Ik noemde U reeds een kleine verschuiving van het kennismotief in de richting van het spelmotief, doch dit mogen we geen ernstig verval noemen. Het spel is, evenzeer als het kennisideaal een waardevolle cultuurfactor. Het spel wordt pas dan gevaarlijk en decadent, wanneer men door een gril van de spelregels afwijkt. Zoo verliest bijv. het schaakspel alle waarde, wanneer men zich met minderwaardige practijken als „paard in de zak” gaat inlaten, om te eindigen in het gebruiken van de schaakstukken als tolletjes en projectielen. De heilige ernst, waarmee men zich in de wiskunde aan spelregels houdt, garandeert echter dat van dézen kant geen gevaar is te verwachten.

Ernstiger gevaren, die de wiskunde bedreigen, zijn onder andere de volgende: Overdrijving van één der vier eerder genoemde wiskundige waarden ten koste van de andere, isolatie van afzonderlijke deelen der wiskunde, en verzwakking door overlading inplaats van beperking tot het essentiele. De oorzaak van deze gevaren ligt in het feit, dat het menschelijk intellect een soort plafond schijnt te bezitten, terwijl anderzijds de wiskunde tot een gigantisch apparaat is uitgegroeid. Wanneer men bedenkt, dat voor het vervoeren van de verzamelde werken van Euler, Lagrange, Gauss, Cauchy, Cayley, om eens vijf groote producenten te noemen, vijf kruiwagens noodig zijn, dat slechts een klein gedeelte daarvan kennelijk bestemd is om weer te worden vergeten, en dat jaarlijks vele duizenden artikelen in mathematische vaktijdschriften verschijnen, wordt het duidelijk dat bij den huidigen stand van de techniek van het menschelijk intellect en van de hulpmiddelen om dit intellect terzijde te staan, het voor den enkeling onmogelijk is om ook maar van een klein onderdeel alles te beheerschen. Daar komt bij, dat geen mathematicus zich kan onttrekken aan het verlangen om scheppend werk te leveren, en dat hij dit verlangen veelal wil bevredigen door het zoeken en vinden van nieuwe dingen in de buitenste lagen der wiskunde, aan het front. Aan deze lofwaardige neiging, die behalve op zin voor avontuur overigens ook op eerezucht kan berusten, heeft een groot gedeelte der wiskunde haar ontstaan te danken, maar aan den anderen kant ook de te ver doorgevoerde specialisatie en isolatie. Misschien worden deze bezwaren

verzacht, wanneer een zoodanige wijziging van de organisatie der wiskundige wereld wordt gevonden, die het motief van bewuste of onbewuste eerzucht opheft.

Ofschoon de gevaren, die ik U noemde, zeer reëel zijn en hier en daar in feiten zijn omgezet, mogen we niet aannemen, dat ze fataal kunnen worden. De wiskunde is een levend organisme, dat in zichzelf over de middelen beschikt om ziekten te bestrijden en wonden te heelen. Eenerzijds verzetten het kennisideaal en het schoonheidsideaal zich krachtig tegen isolatie en versnippering, aan den anderen kant zorgt de door de wetenschappen en de techniek uitgeoefende drang ervoor, dat het contact met de realiteit behouden blijft, en dat vele nuttelooze spitsvondigheden vaak sneller worden vergeten dan ze zijn ontstaan.

Zoolang er nog menschen gevonden worden, die door de wiskundige methoden en resultaten worden geboeid, in welk stadium van ontwikkeling het ook zijn moge, zal de wiskunde blijven *leven*, en voortgaan haar nuttige taak in onze cultuur te vervullen. De smaak kan zich wijzigen, en zulks kan een verandering van het uiterlijke aanzien van de wiskunde met zich meebrengen, doch dit kan het wezen niet aantasten van dit spel van den vrijen geest, gebonden aan in vrijheid gekozen grondslagen, het spel van het systematische denken, het scheppende denken en de aanschouwing, het spel dat opvoedt en vermaakt, boeit en bekoort en dat bovendien, of desondanks, ook nog nuttig is.

Zeer Geachte Toehoorders,

Bij de aanvaarding van mijn ambt moge ik in de eerste plaats mijn eerbiedigen dank betuigen aan Hare Majesteit de Koningin voor het feit, dat het Haar heeft behaagd mij tot hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool te benoemen.

Edelgrootachtbare Heeren Curatoren,

Ook U dank ik oprecht voor het groote vertrouwen, dat U blijkens Uw aanbeveling in mij hebt gesteld. Weest zoo goed van mij de belofte te aanvaarden, dat ik mijn beste krachten zal wijden aan het wiskundige onderwijs en onderzoek aan de Technische Hoogeschool.

Hooggeleerde Heeren Professoren der Technische Hoogeschool,

Het is voor mij een hooge onderscheiding, in Uw midden te worden opgenomen. Vaak zal ik Uw steun en voorlichting noodig hebben; ik hoop dat U mij deze niet zult onthouden. Omgekeerd

wensch ik van harte, ook U eens van dienst te kunnen zijn. Aan-gezien zich aan deze hoogeschool een aantal voortreffelijke mathe-matici bevinden, ligt het niet voor de hand dat U zich juist tot mij zoudt wenden, wanneer U op mathematische moeilijkheden stuit. Desondanks spreek ik de hoop uit, dat U te gelegener tijd ook mij eens in Uw problemen zult betrekken.

Hooggeleerde Heeren Ambtgenooten van de Afdeling der Algemeene Wetenschappen, in het bijzonder van de Onderafdeeling der Wiskunde,

Door Uw voordracht hebt U blijk gegeven, een groot vertrouwen in mij te stellen, waardoor ik mij zeer vereerd gevoel. Het moge mij gegeven zijn, op den duur aan Uw verwachtingen te beantwoorden. Daar ik vroeger vele jaren als assistent in Uw omgeving heb doorgebracht, ben ik voor U geen vreemde, en het verheugt mij dan ook zeer, dat ik door deze benoeming in staat word gesteld, terug te keeren tot de grazige weiden aan de Jaffalaan, thans als Uw collega.

Vroeger verkeerde ik, gelijk vele andere buitenstaanders, in de meening dat een hoogleeraar iemand is die zijn schaapjes op het droge heeft. Enkele weken van aanschouwing achter de schermen hebben mij echter geleerd, dat zulks een vergissing is. Om mij heen zag ik, hoe gij allen overstelpt zijt met het werk dat uit Uw zware onderwijstaak voortvloeit, en het is mij nog niet duidelijk waar gij den tijd voor de meer wetenschappelijke zijde van Uw werk van- daan haalt. Wat mij wèl duidelijk is geworden, is dat ook mijn taak uiterst zwaar zal worden, en dat ik bij het vervullen ervan Uw hulp niet zal kunnen ontberen.

Het zij mij vergund, deze gelegenheid te benutten om aan de gevoelens van dankbaarheid, die ik jegens mijn leermeesters koester, uiting te geven.

Hooggeleerde Van der Woude,

Ik ben ervan overtuigd dat ik namens de honderden U toegewijde leerlingen spreek, wanneer ik zeg, dat wij het een groot voorrecht achten onder Uw leiding te hebben mogen studeeren. U bent ons als mensch tegemoetgetreden, en hebt ons Uw vaderlijke vriendschap gegeven, doch tegelijk hebt U aan ons de hoogst denkbare eischen gesteld.

Nu U Uw lange en vruchtbare loopbaan hebt afgesloten, spreek ik de hoop uit, dat U nog vele jaren op Uw welbesteede leven zal mogen terugzien, en ook dat het uitstekende werk, dat door velen

Uwer leerlingen is verricht en nog wordt verricht, U tot voldoening moge strekken. U was het, die hun een onuitroeibare liefde voor de wiskunde bijbracht, en hun leerde, tegelijk mensch te blijven.

Ook U, Kloosterman, ben ik zeer dankbaar. Van Uw zin voor schoonheid, Uw nuchtere beschouwingwijze, Uw diepe inzichten en rijke kennis hebt gij veel op Uw leerlingen weten over te dragen. Ik had het groote voorrecht, hoewel in veel mindere mate dan ik eigenlijk noodig had, eenigszins nauwer met U in contact te treden. De leerzame middagen die ik bij U doorbracht, zullen mij steeds in herinnering blijven, en ik hoop ook in de toekomst veel van Uw kennis en Uw voorbeeld te mogen profiteren.

Geachte Medewerkers van Philips' Natuurkundig Laboratorium,

Slechts betrekkelijk kort ben ik in Uw midden geweest, veel heb ik in dien tijd van U geleerd. U hebt mij geholpen de kloof, die er tusschen de wiskunde en de toegepaste wetenschappen bestaat, gedeeltelijk te overbruggen. In het bijzonder ben ik veel dank verschuldigd aan Prof. Van der Pol, met wien ik in tallooze gesprekken langs bijna alle onderdeelen der zuivere en toegepaste wiskunde ben gegaan, en aan mijn oud-collega Bouwkamp, die mij heeft geleerd, dat het mogelijk is tegelijk liefde voor strenge wiskunde en voor numeriek rekenen te koesteren.

Dames en Heeren Studenten,

Ik ben mij ervan bewust dat niet alleen U aan mijn critiek blootstaat, bijvoorbeeld bij de examens, maar dat ook ik aan Uw critiek onderhevig ben. Ik verzoek U te bedenken dat mijn taak moeilijk is. Eenerzijds dien ik U in korten tijd de wiskundige hulpmiddelen te verschaffen die de ingenieur in de practijk noodig heeft, anderzijds mag ik daarbij de liefde voor zuivere wiskunde, die bij vele technische studenten aanwezig is, niet in den kiem smoren. Deze taak kan ik alleen naar behooren vervullen, wanneer ik daarbij Uw medewerking ondervind. Ik verzoek U met klem de aan de Technische Hoogeschool onderwezen wiskunde niet te beschouwen als een hinderpaal die U in den weg wordt gelegd, doch als een sleutel, die vele deuren voor U opent.

In mijn vorigen werkkring heb ik verschillende ingenieurs ontmoet, die voor hun werk veel wiskunde noodig hadden en deze dan ook hanteerden met een virtuositeit, die mij als mathematicus verstomd deed staan en tevens beschaamde. Moge dit voor U een aansporing zijn.

Ik heb gezegd.