Eindhoven University of Technology

MASTER

Intensiteitsinterferometrie

het experiment van Hanbury Brown en Twiss

Evers, J.H.M.

Award date:
1967

Link to publication

Disclaimer
This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 08. Jul. 2025

INTENSITEITSINTERFEROMETRIE

HET EXPERIMENT VAN HANBURY BROWN EN TWISS

J.H.M. Evers, maart 1967.
Verslag van het afstudeerwerk,
verricht onder leiding van
prof. dr. L.J.F. Broer en dr. E.J. Postma
in de groep Theoretische Natuurkunde
van de Afdeling Technische Natuurkunde
Technische Hogeschool Eindhoven.

INHOUD.

I	Inleiding	2
II	Veldtheorie	4
III	Interferentie-experimenten,	9
	Coherentie,	12
	Coherente toestanden	14
IV	P-Representatie,	17
	Chaotische velden	18
V	De fotodetector	21
VI	Coïncidentiemetingen met fotodetectoren	26
VII	De meting van een sterdiameter volgens Hanbury Brown en Twiss	31
VIII	Literatuurlijst	37

I. INLEIDING.

Sinds lange tijd kent men de methode om de hoekafmetingen van sterren te bepalen met behulp van een interferometer volgens Michelson (1890, 1920). Op deze wijze werden hoekdiameters bepaald tot minimaal 0,02 boogseconden. Zie Michelson en Pease (1921). Door Hanbury Brown en Twiss (1956a) is een toestel voorgesteld, dat veel gelijkenis vertoont met de interferometer van Michelson, maar waarmee een andere grootheid wordt gemeten. Michelson brengt het stralingsveld, aanwezig op twee punten, tot superpositie en uit het interferentiepatroon kan hij de hoekafmeting van de ster afleiden. Hanbury Brown en Twiss (H.B.-T.) detecteren de intensiteit in 2 punten met fotodetectoren, waarna de intensiteitsfluctuaties gecorreleerd worden. Ook deze correlatie leidt tot de afmeting van de ster. HB-T zijn in staat hun toestel veel groter te maken dan Michelson, waardoor kleinere sterren gemeten kunnen worden.
Een fotodetector is een typisch quantummechanisch toestel en alle berekeningen moeten dan ook worden uitgevoerd met quantumelectrodynamica. Alle klassieke lichtbronnen kan men opvatten als ruisgeneratoren; zij geven aanleiding tot chaotische velden (zie hoofdstuk IV). Men heeft dus een fotonenstatistiek nodig om de verschijnselen te beschrijven. Dit heeft geleid tot nieuwe opvattingen van het begrip coherentie (hoofdstuk III).
HB-T (1957a), (1957b), geven hun theorie op een "semi-klassieke" wijze, waarbij het veld klassiek en de wisselwerking met de tellers quantummechanisch wordt behandeld. In het algemeen leidt een dergelijke theorie tot goede resultaten als men werkt met sterke velden (veel fotonen). Bij de sterreninterferometrie is dit echter niet het geval en er ontstond twijfel over de geldigheid van deze theorieën.
Uit de theorie van HB-T volgt, dat er een correlatie moet bestaan tussen de getelde aantallen fotonen op verschillende plaatsen in een lichtbundel, die zo goed mogelijk coherent is (volgens de oude opvatting: monochromatisch en gecollimeerd). Om dat te verifiëren is door HB-T (1956a, 1957a) een proef gedaan die deze correlaties inderdaad aantoont. Door anderen is de proef in enigszins gewijzigde vorm uitgevoerd (Brannen en Ferguson, 1956; Adam, Jánossy,

Varga, 1955) met een negatief resultaat. HB-T (1956b) laten zien dat dit een gevolg is van de ongevoeligheid van de meetapparatuur. De theorie over optische coherentie en fotonenstatistiek van Glauber (1963b, 1963c en 1965) is geheel quantummechanisch opgezet. Het hierboven genoemde correlatie-effect wordt verklaard. De representatie die de chaotische velden in Glaubers theorie krijgen (gaussische P-representatie, zie hoofdstuk IV) verklaart de juiste uitkomsten van de semi-klassieke theorie, ook als er maar weinig fotonen zijn. Zie Glauber (1963c) p. 2776.
Na een inleidend hoofdstuk over veldtheorie (hoofdstuk II), worden enkele interferentie-experimenten beschreven (Young, Michelson, HB-T) en de theorie van Glauber zeer in het kort uiteengezet. In hoofdstuk V wordt de wisselwerking van het veld met een fotodetector beschreven, waarna in hoofdstuk VI coïncidentiemetingen met dergelijke detectoren worden beschouwd.
Met behulp van de resultaten van de hoofdstukken V en VI wordt in hoofdstuk VII de meting van een sterdiameter volgens HB-T nagegaan.

II. VELDTHEORIE.

De observabelen van het electro-magnetisch veld in het vacuum zijn de electrische en magnetische veldsterkte, die worden voorgesteld door de hermitische operatoren $\hat{\vec{E}}(\vec{r}t)$ en $\hat{\vec{B}}(\vec{r}t)$. De toestand van het veld wordt beschreven door de toestandsvector, $|>$, die in de Heisenbergrepresentatie tijdonafhankelijk is en de eigenschappen van het veld geeft op alle tijden, als de hamiltoniaan bekend is. De operatoren $\hat{\vec{E}}$ en $\hat{\vec{B}}$ voldoen aan de (bronvrije) Maxwell-vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}.\hat{\vec{E}} &= 0 \qquad \vec{\nabla} \times \hat{\vec{E}} = -\,1/c\;\partial\hat{\vec{B}}/\partial t \\ \vec{\nabla}.\hat{\vec{B}} &= 0 \qquad \vec{\nabla} \times \hat{\vec{B}} = 1/c\;\partial\hat{\vec{E}}/\partial t. \end{aligned} \tag{1}$$

Stelsel van Gauss: $\hat{\vec{B}}$ in gauss, $\hat{\vec{E}}$ in e.s.e.
Zowel $\hat{\vec{E}}$ als $\hat{\vec{B}}$ voldoen aan de golfvergelijking:

$$(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\,\hat{\vec{E}}(\vec{r}t) = 0. \tag{2}$$

We zullen ons hier beperken tot het electrische veld omdat meestal alleen dit veld in wisselwerking treedt met de detectoren. $\hat{\vec{E}}(\vec{r}t)$ wordt door middel van Fourierontwikkeling verdeeld in twee complexe componenten, het positieve en het negatieve frequentiedeel. Zie Glauber (1963b,c):

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}t) = \hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r}t) + \hat{\vec{E}}^{(-)}(\vec{r}t). \tag{3}$$

Om een stochastisch veld te beschrijven is het gebruikelijk te werken met een discrete set van stochastische variabelen in plaats van met een continuum. We gebruiken dus Fouriersommen. Dit is mogelijk als we het beschouwde veld beperken binnen een eindig ruimtelijk volume. Het veld kan dan ontwikkeld worden naar een discrete serie orthogonale mode-functies, $[\vec{u}_k(\vec{r})]$, die voldoen aan de golfvergelijking:

$$\Delta\vec{u}_k + \frac{\omega_k^2}{c^2}\,\vec{u}_k = 0. \tag{4}$$

/r We nemen aan dat de $\vec{u}_k$ orthonormaal zijn:

$$\int \vec{u}_k^*(\vec{r}).\ \vec{u}_l(\vec{r})\ d\vec{r} = \delta_{kl} \tag{5}$$

en transversaal:

$$\vec{\nabla}.\vec{u}_k(\vec{r}) = 0. \tag{6}$$

We krijgen dan voor de ontwikkeling van $\vec{E}(\vec{r}t)$:

$$\vec{E}(\vec{r}t) = i \sum_k (\tfrac{1}{2}\hbar\omega_k)^{\frac{1}{2}} \left\{ a_k \vec{u}_k(\vec{r})\ e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r})\ e^{i\omega_k t} \right\}. \tag{7}$$

($\vec{u}_k(\vec{r})$ zijn c-functies, a_k zijn operatoren).
Hierbij zijn de normeringsfactoren zo gekozen dat het stel complex geconjungeerde amplitudes a_k en $a_k^\dagger$ dimensieloos is. We zien in (7) dat het positieve frequentiedeel van $\vec{E}$ alle amplitudes bevat die variëren als $\exp(-i\omega_k t)$ voor $\omega_k > 0$.
$\vec{E}^{(+)}$ en $\vec{E}^{(-)}$ zijn niet hermitisch, maar elkaars hermitisch geconjungeerde:

$$\vec{E}^{(+)} = \vec{E}^{(-)\dagger}. \tag{8}$$

Het dynamisch gedrag van de amplitudes, a_k, wordt beheerst door hamiltoniaan:

$$\begin{aligned} H = \tfrac{1}{2} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\ d\vec{r} &= \tfrac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) \\ &= \sum_k H_k. \end{aligned} \tag{9}$$

Hier zien we de analogie tussen de mode-amplitudes en de coördinaten van een stel onafhankelijke één-dimensionale harmonische oscillatoren. De commutatierelaties voor de a_k zijn:

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}]_- &= [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger]_- = 0 \\ [a_k, a_{k'}^\dagger]_- &= \delta_{kk'}\ . \end{aligned} \tag{10}$$

De eigen-toestanden van de H_k zijn toestanden met een welgedefinieerd aantal fotonen in de mode, k, :

$$\hbar\omega_k (a_k^\dagger a_k + \tfrac{1}{2})\ |\ n_k \rangle_k = \hbar\omega_k (n_k + \tfrac{1}{2})\ |\ n_k \rangle_k . \tag{11}$$

Deze z.g. Fock-toestanden (deeltjesaantaltoestanden) vormen het compleet orthonormaal stelsel, waarmee de veldverschijnselen meestal worden beschreven. De amplitude-operator van de mode k, a_k, wordt foton-vernietigingsoperator genoemd. De complex geconjungeerde, $a_k^\dagger$, is de foton-scheppingsoperator:

$$\begin{aligned} a_k \mid n_k >_k &= n_k^{\frac{1}{2}} \mid n_k - 1 >_k \\ a_k^\dagger \mid n_k >_k &= (n_k + 1)^{\frac{1}{2}} \mid n_k + 1 >_k \\ a_k^\dagger a_k \mid n_k >_k &= n_k \mid n_k >_k . \end{aligned} \qquad (12)$$

De relaties (12) volgen uit (10) en (11). Voor één mode is:
$a^\dagger aa = aa^\dagger a - a = a(a^\dagger a - 1)$. Dus $a^\dagger aa \mid n > = a(a^\dagger a - 1) \mid n > =$
$= na \mid n > - a \mid n > = (n - 1)\, a \mid n >$.
$a \mid n >$ blijkt eigen-toestand van $a^\dagger a$ te zijn met eigenwaarde $(n - 1)$. Dus $a \mid n > = c \mid n - 1 >$. Na normering blijkt:
$a \mid n > = \sqrt{n} \mid n - 1 >$.
De modes zijn onafhankelijk van elkaar. De toestand $\mid >_k$ is een vector in een Hilbert-ruimte. De toestand van het gehele veld, $\mid >$, is gedefinieerd in de productruimte van de Hilbert-ruimten van alle modes.
Metingen van de electrische veldsterkte zijn altijd metingen van de hermitische operator $\hat{E}(\vec{r}t)$. De bijdragen van de complexe velden $\hat{E}^{(+)}$ en $\hat{E}^{(-)}$ aan de meting kunnen echter zeer verschillen, zie Glauber (1965). Alleen in de klassieke limiet ($\hbar\omega \to 0$) zijn beide bijdragen gelijk en dan spelen $\hat{E}^{(+)}$ en $\hat{E}^{(-)}$ dezelfde rol. In de quantumtheorie echter beschrijft $\hat{E}^{(+)}$ de absorptie en $\hat{E}^{(-)}$ de creatie van een foton. Voor de meting van het electrische veld kunnen we een systeem van atomen in hun grondtoestand gebruiken. In dit geval draagt alleen $\hat{E}^{(+)}$ wezenlijk bij tot de overgangsamplitude. Het genoemde systeem gedraagt zich als een fotonendetector. We kunnen ons een ideale detector voorstellen als een toestel dat gevoelig is voor $\hat{E}^{(+)}(\vec{r}t)$ in een enkel punt, onafhankelijk van de frequentie. De overgangswaarschijnlijkheid voor het absorberen van een foton uit het veld ter plaatse $\vec{r}$ en ten tijde t is dan evenredig met:

$$w_{i\to f} = |\ <f|\ E^{(+)}(\vec{r}t)\ |\ i>\ |^2, \qquad (13)$$

waarbij $|\ i>$ de begintoestand van het veld is en $|\ f>$ de eindtoestand na de absorptie. ($E^{(+)}$ te beschouwen als een component van $\vec{E}^{(+)}$). $|\ f>$ ontstaat uit $|\ i>$ door absorptie van een foton uit een zeer bepaalde mode. Onze belangstelling gaat uit naar de kans dat een willekeurig foton wordt geabsorbeerd. Daartoe moet (13) gesommeerd worden over alle mogelijke toestanden $|\ f>$ die kunnen ontstaan uit $|\ i>$ door absorptie van één foton. We mogen de sommatie uitbreiden tot een compleet stel toestanden $|\ f>$, want de toestanden die niet bereikt kunnen worden (bijv. die waarin twee fotonen minder zijn dan in $|\ i>$) geven geen bijdrage, omdat ze orthogonaal zijn op de toestand $E^{(+)}\ |\ i>$.
We krijgen dan voor de kans dat een ideale fototeller per seconde ter plaatse $\vec{r}$ ten tijde t een foton absorbeert:

$$w = \sum_f |\ <f|\ E^{(+)}(\vec{r}t)\ |\ i>\ |^2 = <i|\ E^{(-)}(\vec{r}t)\ E^{(+)}(\vec{r}t)\ |\ i>. \qquad (14)$$

Hierbij is de volledigheid van het stelsel $|\ f>$ - toestanden gebruikt: $\Sigma_f\ |\ f><f|\ = 1$. Het getelde aantal fotonen per seconde blijkt, ook in het geval dat de toestand $|\ i>$ bekend is, een gemiddelde te zijn, nl. evenredig met de verwachtingswaarde van de operator $E^{(-)}(\vec{r}t)\ E^{(+)}(\vec{r}t)$ in de toestand $|\ i>$.
In de practijk is de toestand $|\ i>$ nooit precies bekend en we moeten dan ook overgaan naar een statistische beschrijving, waarbij een ensemble-gemiddelde genomen wordt over de onbepaalde en oncontroleerbare parameters die $|\ i>$ bepalen:

$$w = \Big\{ <i|\ E^{(-)}(\vec{r}t)\ E^{(+)}(\vec{r}t)\ |\ i> \Big\}_{\substack{\text{ens. gem.}\\ \text{over i.}}} \qquad (15)$$

We voeren in de dichtheidsoperator: $\rho = [\ |\ i><i|\ ]_{\text{ens. gem. i.}}$
ρ is hermitisch: $\rho^\dagger = \rho$
en positief definiet: $<j|\ \rho\ |\ j> \geq 0$ voor iedere $|\ j>$.
We kunnen dan schrijven voor w:

$$w = \mathrm{tr}\ [\rho\ E^{(-)}(\vec{r}t)\ E^{(+)}(\vec{r}t)]. \qquad (16)$$

In (16) wordt tweemaal gemiddeld: de metingen aan de zuivere toestand leveren een quantummechanisch gemiddelde; het ensemble-gemiddelde over de begintoestanden komt overeen met middeling over Fourier-coëfficiënten in een klassieke behandeling.
Behalve het meten van intensiteiten (w is evenredig met de intensiteit van de straling) met één detector, kunnen we nog coincidentie-metingen en, meer algemeen, vertraagde coïncidentie-metingen uitvoeren. We plaatsen daartoe meerdere detectoren op: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ... Het matrix-element voor de overgang, waarbij iedere detector ter plaatse $\vec{r}_j$ ten tijde t_j één foton absorbeert is dan:

$$< f \mid E^{(+)}(\vec{r}_1 t_1)\, E^{(+)}(\vec{r}_2 t_2) \ldots \mid i >. \qquad (17)$$

Voor het gemiddeld aantal geabsorbeerde fotonen per sec.^{n} (n = = aantal tellers) vinden we:

$$w^{(n)} = \mathrm{tr}\left\{\rho E^{(-)}(\vec{r}_1 t_1)\, E^{(-)}(\vec{r}_2 t_2) \ldots E^{(-)}(\vec{r}_n t_n) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, E^{(+)}(\vec{r}_n t_n) \ldots E^{(+)}(\vec{r}_1 t_1)\right\}. \qquad (18)$$

De formule (16) is een bijzonder geval van een meer algemene uitdrukking, waarin de complexe velden op verschillende plaatsen en tijdstippen worden gezet. We definiëren de eerste-orde-correlatiefunctie, $G^{(1)}(x_1, x_2)$, als:

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \mathrm{tr}\left\{\rho E^{(-)}(x_1)\, E^{(+)}(x_2)\right\}. \qquad (19)$$

We schrijven x voor $(\vec{r}t)$. Voor de beschrijving van minder ideale tellers hebben we ook uitdrukkingen van de vorm (19) nodig, zie hoofdstuk V. Op dezelfde manier definiëren we de n-de orde-correlatiefunctie:

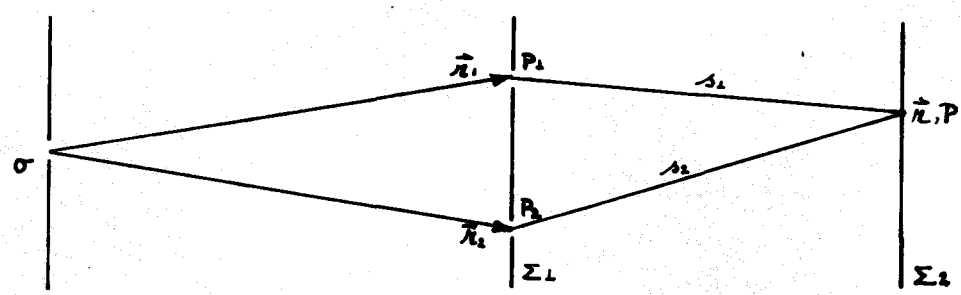
$$G^{(n)}(x_1 x_2 \ldots x_n, x_{n+1} \cdots x_{2n}) =$$
$$\mathrm{tr}\left\{\rho E^{(-)}(x_1) \ldots E^{(-)}(x_n)\, E^{(+)}(x_{n+1}) \ldots E^{(+)}(x_{2n})\right\}. \qquad (20)$$

Deze correlatiefuncties zullen we in het volgende hoofdstuk gebruiken om een nauwkeurige betekenis te geven aan het begrip coherentie.

III. INTERFERENTIE-EXPERIMENTEN, COHERENTIE, COHERENTE TOESTANDEN.

(zie o.m. Glauber, (1965).

De mogelijkheid om een interferentiepatroon te ontwerpen is lange tijd de enige maatstaf geweest om de coherentie-eigenschappen van het licht te beschrijven. We bekijken de interferometer van Young. Quasimonochromatisch licht van de bron σ valt op het scherm Σ_1, waarin twee gaatjes P_1 en P_2 ter plaatse $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$. Op het scherm Σ_2 kunnen we dan een interferentiepatroon waarnemen.



In het punt P (ter plaatse $\vec{r}$) is het veld een lineaire combinatie van de velden in P_1 en P_2 op geschikte tijden. Hierbij zijn een aantal benaderingen gemaakt. We kunnen bijvoorbeeld de dispersie van het licht in de gaatjes P_1 en P_2 verwaarlozen, als de bandbreedte van de straling niet te groot is. Het veld in P ten tijde t is:

$$E^{(+)}(\vec{r}t) = \lambda_1 E^{(+)}(\vec{r}_1 t_1) + \lambda_2 E^{(+)}(\vec{r}_2 t_2). \qquad (21)$$

Hierin is: $t_{1,2} = t - s_{1,2}/c$.
Als de lineaire afmetingen van P_1 en P_2 niet alleen klein zijn vergeleken met de afstand P_1P_2, maar ook even groot, dan is $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (λ onafhankelijk van het veld).
De intensiteit in P, gemeten met een ideale fotodetector, is evenredig met $G^{(1)}(x,x)$. We schrijven weer x voor $(\vec{r}t)$:

$$G^{(1)}(x,x) = \mathrm{tr}\left\{\rho E^{(-)}(x)E^{(+)}(x)\right\} =$$

$$= \mathrm{tr}\left\{\rho|\lambda|^2 E^{(-)}(x_1)E^{(+)}(x_1) + \rho|\lambda|^2 E^{(-)}(x_2)E^{(+)}(x_2) + \right.$$

$$\left. + 2\rho|\lambda|^2 \mathrm{Re}[E^{(-)}(x_1)E^{(+)}(x_2)]\right\} =$$

$$= |\lambda|^2 \left\{ G^{(1)}(x_1 x_1) + G^{(1)}(x_2 x_2) + 2 \operatorname{Re} G^{(1)}(x_1 x_2) \right\}. \quad (22)$$

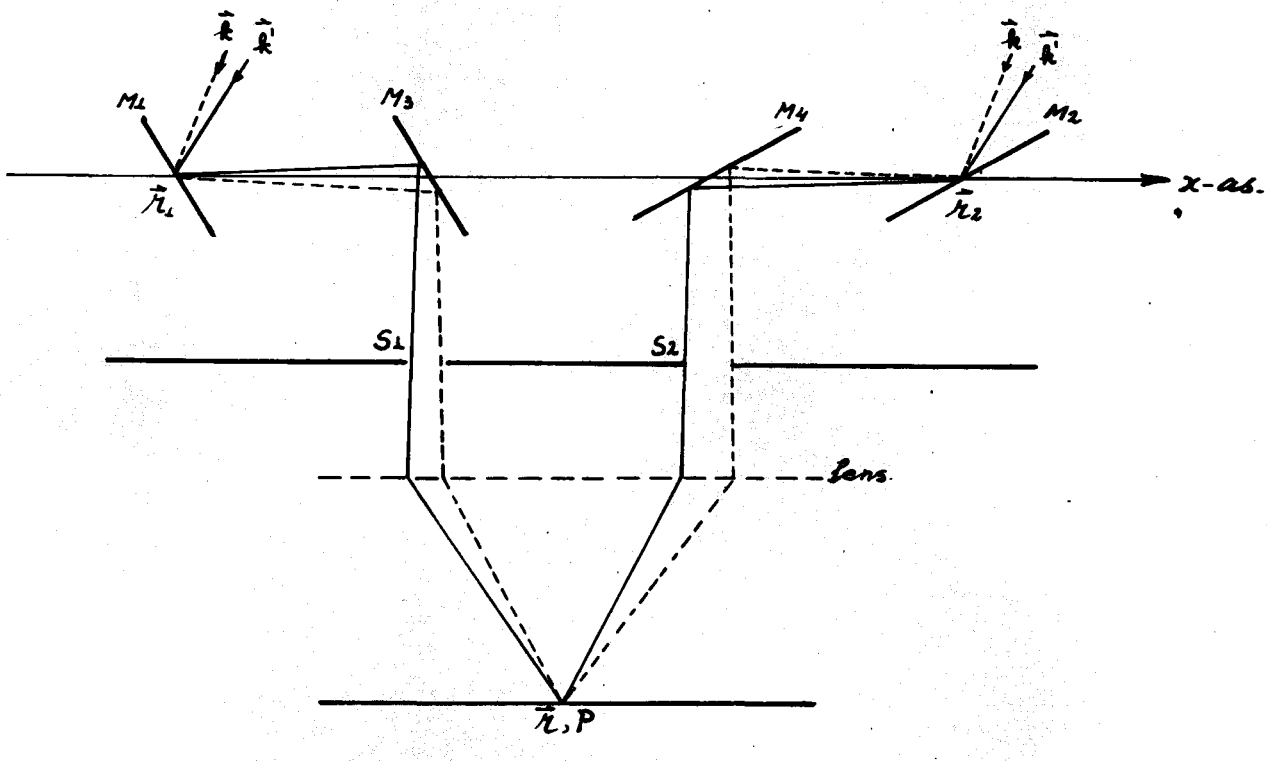
De eerste twee termen in (22) zijn de intensiteiten die elk der twee gaatjes zou bijdragen in afwezigheid van het andere; ze zijn in dit experiment nagenoeg constant over het scherm Σ_2. De derde term is de interferentieterm. We kunnen schrijven: $G^{(1)}(x_1 x_2) = |G^{(1)}(x_1 x_2)| \exp[i\phi(x_1 x_2)]$. Dan is:

$$G^{(1)}(x,x) = |\lambda|^2 \left\{ G^{(1)}(x_1 x_1) + G^{(1)}(x_2 x_2) + 2|G^{(1)}(x_1 x_2)| \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos \phi(x_1 x_2) \right\}. \quad (23)$$

De oorsprong van het interferentiepatroon zien we nu duidelijk in de variatie van de cosinus-term. Voor een vlakke monochromatische golf is: $\phi(x_1 x_2) = \vec{k}.(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \frac{\omega}{c}(s_1 - s_2)$.
Bij loodrechte inval is: $\phi(x_1 x_2) = k(s_1 - s_2)$.

Michelson. Een toestel waarmee men de hoekafmetingen van sterren kan bepalen is de interferometer van Michelson. Zie bijvoorbeeld Born en Wolf (1964).



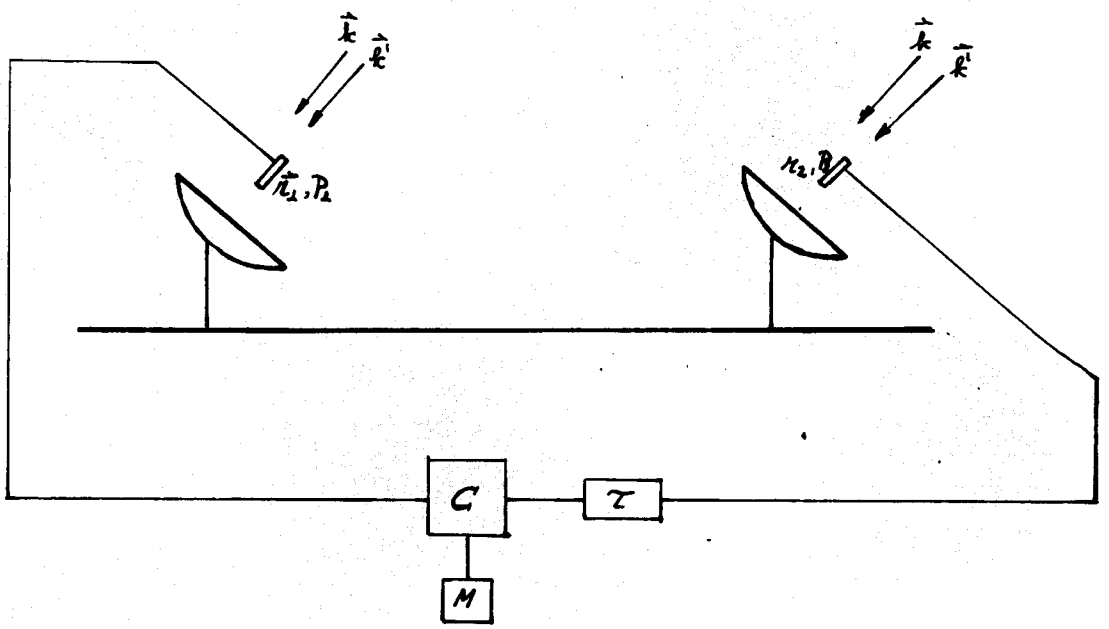
De spiegels M_1 en M_2 zijn verplaatsbaar langs de x-as; M_3 en M_4 zijn vast. Steeds blijft $M_1M_3 = M_2M_4$. Het veld in $\vec{r}$ is een superpositie van de velden in $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ (de optische wegen M_1M_3P en M_2M_4P zijn gelijk). De in $\vec{r}$ gemeten intensiteit bevat een interferentieterm. Voor bepaalde waarden van de afstand $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ verdwijnt het interferentiepatroon. Daaruit kan dan de hoekafmeting van de ster worden bepaald. (Zie hiervoor ook hoofdstuk VII). De afstand $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ kan erg groot worden voordat het patroon verdwenen is en het blijkt moeilijk in de practijk een interferometer van dergelijke omvang te construeren, waarbij het introduceren van willekeurige faseverschillen wordt voorkomen. Ook blijken de willekeurige variaties van de brekingsindex langs de optische wegen het interferentiepatroon te verstoren. Om een indruk te krijgen van wat technisch is te verwezenlijken volgen hier enkele gegevens van de Mount Wilson-telescoop. Zie Born en Wolf (1964).

$S_1S_2 = 1{,}14$ m. M_1M_2(max) = 6,1 m.

Kleinst meetbare hoek (bij gemiddelde golflengte 5500 Å): 0,02 boogsec. De zon op een afstand van de dichtstbijzijnde ster wordt gezien onder een hoek van: 0,007 boogsec.

Bij de interferometer van HB-T te Narrabri (Australië) is de afstand, overeenkomend met M_1M_2, maximaal: 188 m (zie hoofdstuk VII).

Hanbury Brown en Twiss. Om de beide genoemde moeilijkheden te ondervangen is door HB-T een andere vorm van een sterreninterferometer geconstrueerd. HB-T (1956a).



P_1, P_2: fotocellen
τ : vertragingslijn
C : vermenigvuldiger
M : integrator.

In dit geval worden de intensiteiten ter plaatse $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ gemeten met fotocellen. Het uitgangssignaal van de detectoren (een electrische stroom die een maat is voor de lichtintensiteit) varieert met frequenties die veel kleiner zijn dan de frequentie van het e.m. veld en kan dus gemakkelijk over grote afstanden getransporteerd worden. Op de meetplaats, C, worden de beide signalen gecorreleerd (d.w.z. vermenigvuldigd en dan gemiddeld). De correlatie van de intensiteitsfluctuaties is een functie van de afstand $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Als de correlatie 0 is, volgt uit de daarbij behorende waarde van $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ de hoekafmeting van de ster.
Het hier gemeten correlatieproduct is een uitdrukking die het veld bevat in de vierde graad:

$$G^{(2)}(\vec{r}_1 t, \vec{r}_2 t, \vec{r}_2 t, \vec{r}_1 t) =$$

$$= \mathrm{tr}\left\{\rho\ E^{(-)}(\vec{r}_1 t)E^{(-)}(\vec{r}_2 t)E^{(+)}(\vec{r}_2 t)E^{(+)}(\vec{r}_1 t)\right\}.$$

In het geval van Michelson wordt een uitdrukking gemeten van de tweede graad (vergelijk (22)):

$$G^{(1)}(\vec{r}t, \vec{r}t) = \mathrm{tr}\left\{\rho\ E^{(-)}(\vec{r}t)E^{(+)}(\vec{r}t)\right\}.$$

In hoofdstuk VII wordt de intensiteitsinterferometrie volgens HB-T verder uitgewerkt.

Coherentie. Zie Glauber (1963b, c, 1965). Een lichtbundel werd coherent genoemd, indien de superpositie van het veld uit twee punten in de bundel, een ruimtelijk vastgelegd interferentiepatroon gaf. De nieuwe definitie van coherentie (27), bevat de oude definitie als de eigenschap van eerste-orde-coherentie. We zien in (23) dat geen interferentiepatroon ontstaat, als $G^{(1)}(x_1 x_2) = 0$ en we noemen dan het veld in x_1 en x_2 incoherent.

Indien daarentegen $|G^{(1)}(x_1 x_2)|$ maximaal is, zal het patroon het meest duidelijk zijn. Omdat de dichtheidsoperator, ρ, positief definiet is, kan men o.a. afleiden (Glauber 1963b):

$$|G^{(1)}(x_1 x_2)| \leq \left\{G^{(1)}(x_1 x_1) G^{(1)}(x_2 x_2)\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (24)$$

De maximale waarde van $|G^{(1)}(x_1 x_2)|$ levert ons dan de noodzakelijke voorwaarde voor coherentie:

$$|G^{(1)}(x_1 x_2)| = \left\{G^{(1)}(x_1 x_1)\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{G^{(1)}(x_2 x_2)\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (25)$$

(25) levert slechts een voorwaarde voor coherentie op twee ruimte-tijd-punten. Om coherentie als een eigenschap van het gehele veld te definiëren kan men (25) voorschrijven voor alle combinaties van twee punten. Een equivalente beschrijving kan worden gegeven door de eis te stellen dat de eerste-orde-correlatiefunctie factoriseert:

$$G^{(1)}(x_1 x_2) = \mathcal{E}^*(x_1)\, \mathcal{E}(x_2). \qquad (26)$$

We zullen (26) aanhouden als de voorwaarde voor eerste-orde-coherentie van het veld. (voor het bewijs van de equivalentie, zie Glauber (1965) p. 103).
Een volledige definitie van coherentie krijgt men door aan de hogere-orde-correlatiefuncties analoge factorisatievoorwaarden op te leggen. Een veld heeft de eigenschap van m-de-orde-coherentie, als aan m voorwaarden wordt voldaan:

$$G^{(n)}(x_1 \ldots x_{2n}) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{E}^*(x_j) \cdot \prod_{j=n+1}^{2n} \mathcal{E}(x_j) \qquad (27)$$

voor alle $n \leq m$. Zie Glauber (1963b) p. 2535.
Het veld is volledig coherent als (27) geldt voor alle n. (In de practijk kan men (27) slechts eisen in een beperkt ruimte-tijd-element: coherentielengte, coherentietijd).
Experimenteel kan men de orde van coherentie bepalen door middel van n-voudige coïncidentiemetingen (de functies (27) zijn in het algemeen geen meetbare grootheden in tegenstelling tot de functies (28)). Als het veld n-de-orde-coherent is moet het voor

alle $j \leq n$ voldoen aan:

$$G^{(j)}(x_1 \ldots x_j, x_j \ldots x_1) = \prod_{i=1}^{j} G^{(1)}(x_i x_i). \qquad (28)$$

Deze betrekkingen tonen aan dat het gemiddelde aantal coïncidenties per sec.^{j} dan gelijk is aan het product van de door de individuele detectors getelde aantallen fotonen per sec. De metingen van deze detectoren zijn dan statistisch onafhankelijk. De coherentievoorwaarden beperken dus het stochastisch karakter van het veld. Zie Glauber (1963b) p. 2536. De amplitudes van de verschillende modes vertonen dan geen willekeurige fluctuaties, maar hoeven geen stationaire waarde te hebben.
Er worden geen beperkingen opgelegd aan de bandbreedte van de straling. Pogingen om optisch coherent (dit is: eerste-orde-coherent) licht te maken zijn altijd gegaan in de richting van monochromatische bronnen. Dit is te verklaren uit het feit dat men steeds met stationaire bronnen heeft gewerkt. Men kan aantonen dat een eerste-orde-coherent veld dat stationair is, alleen monochromatisch kan zijn.

Coherente toestanden. Zie Glauber (1965). We gaan na of er toestanden bestaan waarin de velden volledige coherentie bezitten. Het is duidelijk dat simultane eigentoestanden van de operatoren $E^{(+)}$ en $E^{(-)}$ tot de gewenste factorisatievoorwaarden (27) leiden. Echter $E^{(+)}$ en $E^{(-)}$ commuteren niet en dergelijke eigentoestanden bestaan niet. In de correlatiefuncties zien we de veldoperatoren altijd in normaal geordende volgorde (de volgorde van de operatoren zodanig, dat alle creatie-operatoren links en alle vernietigingsoperatoren rechts staan). Daarom is het voldoende om factorisatie te krijgen, dat het veld een rechtereigentoestand is van $E^{(+)}$:

$$E^{(+)}(x)| > = \mathcal{E}(x)| >. \qquad (29)$$

Samen met de geadjungeerde relatie:

$$< | E^{(-)}(x) = \mathcal{E}^*(x) < | \qquad (30)$$

leidt dit tot de gewenste factorisatie. Het is niet zonder meer duidelijk dat eigentoestanden van deze vorm bestaan. Aan te tonen is dat een relatie als: $< \mid E^{(+)}(x) = \mathcal{E}(x) < \mid$ geen oplossingen heeft. Dat (29) wel oplossingen heeft kan men laten zien door ze te construeren. Als een oplossing bestaat moet $\mathcal{E}(x)$ voldoen aan dezelfde golfvergelijking en randvoorwaarden als de operator $E^{(+)}(x)$, waarvoor de Fourierontwikkeling is, zie (7):

$$E^{(+)}(x) = i \sum_k \left\{\frac{\hbar\omega_k}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} a_k u_k(\vec{r}) \exp(-i\omega_k t). \qquad (31)$$

Hierin treden de operatoren a_k op, die geheel beschreven worden door de commutatierelaties (10). Voor $\mathcal{E}(x)$ moeten we dan een overeenkomstige ontwikkeling hebben:

$$\mathcal{E}(x) = i \sum_k \left\{\frac{\hbar\omega_k}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \alpha_k u_k(\vec{r}) \exp(-i\omega_k t) \qquad (32)$$

waarin de coëfficiënten α_k willekeurige complexe waarden kunnen hebben. Substitueren we (31) en (32) in (29), dan zien we dat voor de afzonderlijke modefuncties de coëfficiënten gelijk moeten zijn (dit volgt uit de orthogonaliteit van de $u_k(\vec{r})$). De eigentoestand moet dus, als hij bestaat, voldoen aan:

$$a_k \mid > = \alpha_k \mid > \qquad (33)$$

voor alle modes k.

Om nu deze toestand, $\mid >$, te construeren kunnen we uitgaan van de eigentoestand, $\mid \alpha_k >_k$, van de vernietigingsoperator a_k:

$$a_k \mid \alpha_k >_k = \alpha_k \mid \alpha_k >_k \qquad (34)$$

en dan wordt het gehele systeem beschreven met:

$$\mid > = \prod_k \mid \alpha_k >_k = \mid [\alpha_k] >. \qquad (35)$$

$[\alpha_k]$ staat voor de serie van amplitudes α_k.

Deze toestanden worden coherent genoemd en kunnen dienen als een

stelsel van basistoestanden voor de beschrijving van het veld (zij zijn voor ons doel, de fotonenstatistiek, beter geschikt dan de Fock-toestanden, in elk waarvan het aantal fotonen scherp bepaald is). Aan een stelsel basistoestanden moet de eis van volledigheid worden gesteld. Het stelsel toestanden $|[\alpha_k]>$ is volledig omdat:

$$\int |[\alpha_k]><[\alpha_k]| \prod_k \frac{d^2\alpha_k}{\pi} = 1. \qquad (36)$$

Geïntegreerd wordt over de gehele α_k-vlakken:

$$d^2\alpha_k = d(\mathrm{Re}\,\alpha_k).d(\mathrm{Im}\,\alpha_k) = |\alpha_k|\, d|\alpha_k|\, d\phi_k$$

$$\alpha_k = |\alpha_k| \exp(i\phi_k).$$

De coherente toestanden missen echter de eigenschap van orthogonaliteit, ze zijn onderling lineair afhankelijk. Zie Glauber (1963c) p. 2773.

IV. P-REPRESENTATIE. CHAOTISCHE VELDEN.

Elke willekeurige toestand van het veld kan ontwikkeld worden naar coherente toestanden en iedere operator kan in een representatie geschreven worden met de coherente toestanden als basis. De dichtheidsoperator ρ heeft dan in het algemeen de vorm:

$$\rho = \int \langle [\alpha_k] \mid \rho \mid [\beta_k] \rangle \mid [\alpha_k] \rangle \langle [\beta_k] \mid . \prod_k \frac{1}{\pi^2} d^2\alpha_k d^2\beta_k . \qquad (37)$$

Men kan de matrixelementen van ρ, op basis van de α-toestanden, uitdrukken in de matrixelementen op basis van de n-toestanden:

$$\langle [\alpha_k] | \rho | [\beta_k] \rangle = \sum_{[n_k],[m_k]} \langle [n_k] | \rho | [m_k] \rangle \cdot \prod_k (n_k! m_k!)^{-\frac{1}{2}} (\alpha_k^*)^{n_k} \beta_k^{m_k} \exp - \tfrac{1}{2}(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2). \qquad (38)$$

Voor de laatste gelijkheid, zie Glauber (1963c) p. 2782.
Niet alle velden vereisen een ρ van de algemene vorm (37). Voor een zuivere toestand $\mid [\alpha_k] \rangle$ is: $\rho = \mid [\alpha_k] \rangle \langle [\alpha_k] \mid$. Denken we aan een veld in een coherente toestand, waarbij echter de eigenwaarden $[\alpha_k]$ onbekend zijn (een mengsel van coherente toestanden) dan:

$$\rho = \int P([\alpha_k]) \mid [\alpha_k] \rangle \langle [\alpha_k] \mid . \prod_k d^2\alpha_k . \qquad (39)$$

$P([\alpha_k])$ is een gewichtsfunctie, gedefiniëerd in de $[\alpha_k]$-vlakken en heeft reële waarden (want ρ is hermitisch). We kunnen ons $P([\alpha_k])$ voorstellen als quasiwaarschijnlijkheidsdichtheid voor de verdeling van de α-waarden. Omdat de operatoren $\mid [\alpha_k] \rangle \langle [\alpha_k] \mid$ voor verschillende waarden van $[\alpha_k]$ niet orthogonaal zijn en ook omdat $P([\alpha_k])$ negatieve waarden kan aannemen, kunnen we $P([\alpha_k])$ niet opvatten als een waarschijnlijkheidsdichtheid in de gebruikelijke zin. De uitdrukking (39) wordt de P-representatie van Glauber (1963c) genoemd.
Er zijn voor- en tegenstanders van de stelling dat iedere ρ van een vrij e.m. veld in de diagonale vorm (39) kan worden weergegeven (zie o.a. het Review-artikel van Mandel en Wolf (1965) en

Glauber (1965)). Voor de meeste velden, die in de optica worden bestudeerd, is dat echter wel het geval. Het gebruik van de P-representatie van ρ leidt tot berekeningen in de quantumelectrodynamica die in vorm geheel gelijk zijn aan de klassieke berekeningen, zelfs indien er maar weinig quanta aanwezig zijn.
Als voorbeeld rekenen we de intensiteit op twee manieren uit:
Klassiek:

$$E^{(+)} = E^{(+)}([c_k]) = \sum_k c_k u_k(\vec{r}) \exp(-i\omega_k t).$$

De Fouriercoëfficiënten zijn stochastische variabelen. Een bepaalde greep $[c_k]$ heeft de waarschijnlijkheid $p([c_k])$.
De intensiteit is evenredig met:

$$\langle |E^{(+)}|^2 \rangle_{ens.} = \int p([c_k]) |E^{(+)}([c_k])|^2 \cdot \prod_k d^2 c_k.$$

Quantummechanisch:
De intensiteit is evenredig met:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}[\rho E^{(-)} E^{(+)}] &= \int P([\alpha_k]) \langle [\alpha_k] | E^{(-)}([\alpha_k]) E^{(+)}([\alpha_k]) | [\alpha_k] \rangle \cdot \prod_k d^2\alpha_k \\ &= \int P([\alpha_k])\, \mathcal{E}^*([\alpha_k])\, \mathcal{E}([\alpha_k]) \langle [\alpha_k] | [\alpha_k] \rangle \cdot \prod_k d^2\alpha_k \\ &= \int P([\alpha_k]) \cdot |\mathcal{E}([\alpha_k])|^2 \cdot \prod_k d^2\alpha_k. \end{aligned}$$

De parameters $[\alpha_k]$ spelen dus dezelfde rol als de willekeurige Fourieramplitudes $[c_k]$ in de klassieke theorie.

Alle stationaire, macroskopische lichtbronnen, zoals gloeilampen, gasontladingen en dergelijke, kan men voorstellen als een verzameling van een groot aantal gelijkvormige, kleine (atomaire) bronnen, die statistisch onderling onafhankelijk en stationair zijn. De bijdrage van iedere atomaire bron tot een bepaalde mode van het veld kan worden beschreven met een gewichtsfunctie: $p(\alpha_j)$. ($j = 1 \ldots N$, N = aantal bronnen).
De functie $P(\alpha)$ die de superpositie van alle bijdragen beschrijft is:

$$P(\alpha) = \int \delta^{(2)}(\alpha - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j) . \prod_{j=1}^{N} p(\alpha_j) d^2\alpha_j . \qquad (40)$$

Zie voor de afleiding van deze convolutie-integraal, Glauber (1963c) p. 2778. Onafhankelijk van de preciese vorm van de functie $p(\alpha_j)$, maar onder voorwaarde dat N zeer groot is, kan men afleiden:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi < n>} \exp - \left\{ \frac{|\alpha|^2}{< n>} \right\} \text{ (voor één mode).} \qquad (41)$$

(41) is een vorm van het centrale limiet-theorema. Glauber (1965) p. 152. De functie $p(\alpha_j)$ hoeft niet voor ieder atoom dezelfde te zijn: $p_j(\alpha_j)$. Voorwaarden zijn: de $p_j(\alpha_j)$ zijn differentieerbaar; de momenten van de eerste tot en met de vijfde orde moeten bestaan en van dezelfde orde van grootte zijn voor iedere j. Verder worden nog voorwaarden opgelegd aan de karakteristieke functie van de $p_j(\alpha_j)$. Tenslotte moet $N \to \infty$. Zie Khinchin (1949) p. 84.
De formule (41) heeft dezelfde vorm als de waarschijnlijkheidsverdeling voor de totale verplaatsing ten gevolge van een "random walk" in het complexe vlak. Zie Chandrasekhar (1954).
Als alle modes in de beschouwing worden medegenomen vindt men voor $P([\alpha_k])$ een product van gaussische factoren van de vorm (41):

$$P([\alpha_k]) = \prod_k \frac{1}{\pi < n_k>} \exp - \left\{ \frac{|\alpha_k|^2}{< n_k>} \right\} . \qquad (42)$$

Hierin is $< n_k>$ het gemiddeld aantal fotonen in de mode k.
De gaussische gewichtsfunctie (42) dankt zijn gefactoriseerde vorm aan het stationaire karakter van de individuele bronnen, zie Glauber (1963c) p. 2786. Voor deze laatste hoeven de $p([\alpha_k])$ niet te factoriseren. De amplitudes van de diverse modes kunnen in grootte sterk aan elkaar gekoppeld zijn.
Velden die in de P-representatie kunnen worden beschreven met een gewichtsfactor van de vorm (42) noemen we chaotische velden. De functie $P([\alpha_k])$ in de vorm (42) is steeds positief. Toch moeten we ook hier spreken van een quasiwaarschijnlijkheid, omdat $|\alpha>$-toestanden geen orthogonaal stelsel vormen. Alleen voor $< n> \gg 1$ is (42) als een waarschijnlijkheidsverdeling te interpreteren. Glauber (1963c) p. 2780.

Uit (42) blijkt dat alle statistische eigenschappen van chaotische velden worden bepaald door de gemiddelde bezettingsaantallen $\langle n_k \rangle$. Deze getallen bepalen ook volledig de eerste-orde-correlatiefunctie: $G^{(1)}(x,x') = \mathrm{tr}[E^{(-)}(x)E^{(+)}(x')]$. Met (7) en (39) vinden we:

$$G^{(1)}(\vec{r}t,\vec{r}'t') = \int P([\alpha_k]) \sum_{k,k'} \tfrac{1}{2}\hbar(\omega_k\omega_{k'})^{\frac{1}{2}} \alpha_k^*\alpha_{k'} u_k^*(\vec{r})\, u_{k'}(\vec{r}') \cdot$$
$$\cdot \exp i(\omega_k t - \omega_{k'} t') \prod_k d^2\alpha_k,$$

en met (42) volgt dan:

$$G^{(1)}(\vec{r}t,\vec{r}'t') = \tfrac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k \langle n_k \rangle\, u_k^*(\vec{r})u_k(\vec{r}') \exp i\omega_k(t-t'). \qquad (43)$$

De statistische eigenschappen van velden met gaussische gewichtsfunctie worden dus ook geheel bepaald door de $G^{(1)}$. Alle hogere-orde-correlatiefuncties kunnen n.l. geschreven worden als sommen van producten van $G^{(1)}$, zie Glauber (1965) p. 148, bijvoorbeeld:

$$G^{(2)}(x_1x_2,x_3x_4) = G^{(1)}(x_1x_3)\, G^{(1)}(x_2x_4) + G^{(1)}(x_1x_4)\, G^{(1)}(x_2x_3). \qquad (44)$$

V. DE FOTODETECTOR.

In hoofdstuk II hebben wij een ideale fotodetector besproken, die gevoelig is (voor alle frequenties in dezelfde mate) voor $E^{(+)}$ in één enkel punt, en aangetoond dat de gemeten grootheid dan evenredig is met $G^{(1)}(xx)$. We zullen nu de interactie van het veld met een meer reële detector in het kort beschrijven. De volledige berekening vindt men bij Glauber (1965) p. 78-88. Eerst stellen we de detector voor als één enkel atoom, dat een foto-electrische overgang uitvoert bij absorptie van een foton. De hamiltoniaan van het systeem is in het Schrödingerbeeld (we schrijven bovenindex s bij de operatoren):

$$H^S = H_o^S + H_I^S, \qquad H_o^S = H_{o_{at}}^S + H_{o_F}^S. \tag{45}$$

H_o^S is de som van hamiltonianen van het vrije atoom en van het vrije veld, H_I^S is de interactieterm. Voor de beschrijving van de wisselwerking van het veld met het atoom maken we gebruik van de electrische dipoolbenadering. In het interactiebeeld (boven index i) wordt H_I^S tijdafhankelijk:

$$H_I^i(t) = \exp\,(i/\hbar\, H_o^S t)\, H_I^S \exp\,(-i/\hbar\, H_o^S t) = -e \sum_\gamma \vec{q}_\gamma^{\,i}(t).\vec{E}^i(\vec{r},t), \tag{46}$$

$\vec{r}$: plaatsvector van de atoomkern,

$\vec{q}_\gamma$: plaatsvector (operator) van het γ-de electron ten opzichte van de kern,

$-e$: lading electron.

De Schrödingervergelijking voor het systeem van veld en detector is:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mid t\rangle = H_I^i(t) \mid t\rangle \tag{47}$$

met als oplossing:

$$\mid t\rangle = U(t,t_o) \mid t_o\rangle. \tag{48}$$

$U(t,t_o)$ is een unitaire operator, die de ontwikkeling in de tijd geeft van de toestand als de verstoring plaats vindt van t_o tot t.

In eerste-orde-benadering is:

$$|\,t\rangle = \left\{1 + 1/i\bar{h}\int_{t_o}^{t} H_I^i(t')dt'\right\}|\,t_o\rangle. \qquad (49)$$

We stellen de begintoestand voor door $|\,gi\rangle = |\,g\rangle\,|\,i\rangle$, waarbij het atoom in de grondtoestand, $|\,g\rangle$, is en het veld in een bepaalde, bekend veronderstelde, toestand $|\,i\rangle$. Een eindtoestand is $|\,af\rangle = |\,a\rangle\,|\,f\rangle$, waarin $|\,a\rangle$ een aangeslagen toestand is van het atoom en $|\,f\rangle$ de veldtoestand na de interactie. Om de overgangswaarschijnlijkheid, $p_{g\to a}(t)$, te vinden berekenen we eerst de overgangsamplitude:

$$\langle af|\,U(t,t_o)|\,gi\rangle = 1/i\bar{h}\int_{t_o}^{t}\langle af|\,H_I^i(t')|\,gi\rangle\,dt' =$$

$$= ie/\bar{h}\sum_\gamma\int_{t_o}^{t}\langle a|\,\hat{q}_\gamma^i(t')|\,g\rangle.\langle f|\,\hat{\mathbf{E}}^i(\vec{r},t')|\,i\rangle\,dt'. \qquad (50)$$

Met behulp van (46) en de commutatierelaties $[H_{o_F},H_{o_{at}}]_- = 0$, $[H_{o_F},q_\gamma(0)]_- = 0$ kunnen we schrijven:

$$\langle a|\sum_\gamma \hat{q}_\gamma^i(t')|\,g\rangle = \langle a|\sum_\gamma \hat{q}_\gamma^s|\,g\rangle\exp i\omega_{ag}t' = \hat{\mathbf{M}}_{ag}\exp i\omega_{ag}t', \qquad (51)$$

hierin is $\bar{h}\omega_{ag} = E_a - E_g$ = energieverschil tussen de beide toestanden van het atoom. Dus:

$$\langle af|\,U(t,t_o)|\,gi\rangle = ie/\bar{h}\int_{t_o}^{t}\exp(i\omega_{ag}t')\hat{\mathbf{M}}_{ag}.\langle f|\,\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\vec{r},t')|\,i\rangle\,dt'. \qquad (52)$$

In (52) is alleen het gedeelte $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ van $\hat{\mathbf{E}}$ meegenomen, omdat $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ geen bijdrage levert. (De temperatuur van de detector is zo laag dat geen emissie optreedt). $p_{g\to a}(t)$ vindt men nu door het kwadraat van de absolute waarde van (52) te nemen en dan te sommeren over alle eindtoestanden $|\,f\rangle$. Deze sommatie kan worden uitgebreid over een compleet stel toestanden $|\,f\rangle$, omdat die toestanden die niet bereikt kunnen worden geen bijdrage leveren. Daarna moet nog gemiddeld worden over de mogelijke begintoestanden $|\,i\rangle$. Dan is:

$$p_{g\to a}(t) = (e/\hbar)^2 \sum_{\mu,\nu} \int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{t} dt'dt''\, \exp[i\omega_{ag}(t''-t')] \circ$$

$$\circ\, M^{*}_{ag,\mu} M_{ag,\nu}\, G^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{r}t',\vec{r}t''). \qquad (53)$$

/ s ($M_{ag,\mu}$ is een cartesische component van $\vec{M}_{ag}$).
In de meeste detectoren worden de atomen geïoniseerd, zodat de eindtoestand van het atoom er één is uit een continuum van mogelijke toestanden $|a\rangle$. De foto-electronen die vrij komen worden niet alle werkelijk gedetecteerd. We schrijven voor de kans dat het electron behorende bij de eindtoestand $|a\rangle$ gedetecteerd wordt: R(a). De kans dat een foto-absorptie wordt waargenomen vinden we dus door $p_{g\to a}(t)$ te sommeren over a met R(a) als gewicht:

$$p^{(1)}(t) = \sum_{a} R(a)\, p_{g\to a}(t) =$$

$$= (e/\hbar)^2 \sum_{\mu,\nu} \iint_{t_o}^{t} dt'dt'' \sum_{a} R(a)\, M^{*}_{ag,\mu}\, M_{ag,\nu} \circ \qquad (54)$$

$$\circ\, \exp[i\omega_{ag}(t''-t')]\, G^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{r}t',\vec{r}t'').$$

We definiëren nu de functie:

$$S_{\nu\mu}(t''-t') = (e/\hbar)^2 \sum_{a} R(a)\, M^{*}_{ag,\mu}\, M_{ag,\nu}\, \exp[i\omega_{ag}(t''-t')], \qquad (55)$$

waarvan de Fouriergetransformeerde:

$$s_{\nu\mu}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\nu\mu}(t''-t')\, \exp[-i\omega(t''-t')]\, d(t''-t') =$$

$$= 2\pi(e/\hbar)^2 \sum_{a} R(a)\, M^{*}_{ag,\mu}\, M_{ag,\nu}\, \delta(\omega-\omega_{ag}) \qquad (56)$$

een gevoeligheidsfunctie is, die alleen bijdragen geeft voor overgangen met vast energieverschil $\hbar\omega_{ag}$. We hebben dan:

$$p^{(1)}(t) = \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t} dt'' \sum_{\nu,\mu} S_{\nu\mu}(t''-t')\, G^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{r}t',\vec{r}t''). \qquad (57)$$

Om aan te tonen dat een ideale detector een grootheid meet, evenredig met $G^{(1)}(\vec{r}t,\vec{r}t)$ moeten we bedenken dat zo'n ideale detector een gevoeligheidsfunctie heeft die een constante is: $s_{\nu\mu}(\omega) = s_{\nu\mu}$. De Fouriergetransformeerde van $s_{\nu\mu}$ is dan:

$$S_{\nu\mu}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_{\nu\mu}\exp(i\omega t)\,d\omega = s_{\nu\mu}\delta(t). \qquad (58)$$

We vinden dan voor $p^{(1)}(t)$:

$$p^{(1)}(t) = \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t} dt'' \sum_{\nu,\mu} s_{\nu\mu}\,\delta(t''-t')\,G^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{r}t',\vec{r}t'') =$$

$$= \sum_{\nu,\mu} s_{\nu\mu}\int_{t_o}^{t} G^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{r}t',\vec{r}t')\,dt'. \qquad (59)$$

Aan het argument van de G-functie, zien we dat het absorptieproces gelocaliseerd is in de tijd. Dat is een gevolg van de bredeband-gevoeligheid van de ideale teller (in principe voor $-\infty < \omega < \infty$). In de practijk kan men tellers maken, die zich gedragen als ideale tellers, als men zorgt dat $s_{\nu\mu}(\omega) = s_{\nu\mu}$ voor een zeker frequentiegebied. Als men dan het opvallende licht beperkt binnen deze frequentieband en de meettijd $(t-t_o)$ groter maakt dan de inverse waarde van de bandbreedte van de teller, geldt ook (59). Het aantal getelde fotonen per seconde blijkt dan evenredig te zijn met $G^{(1)}(\vec{r}t,\vec{r}t)$:

$$w^{(1)}(t) = \frac{dp^{(1)}(t)}{dt} = \sum_{\nu,\mu} s_{\nu\mu}\,G^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{r}t,\vec{r}t). \qquad (60)$$

Als het veld gepolariseerd is in een richting $\vec{e}$ kunnen we schrijven voor (57):

$$p^{(1)}(t) = \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t} dt''\, S(t''-t')\,G^{(1)}(\vec{r}t',\vec{r}t''), \qquad (61)$$

waarin: $S = \vec{e}^{*}.\,\vec{S}.\vec{e}$ en $G^{(1)} = \mathrm{tr}[\rho(\vec{e}.\vec{E}^{(-)})(\vec{e}^{*}.\vec{E}^{(+)})]$.
Voor een teller bestaande uit n gelijksoortige atomen ter plaatse $\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_n$ in het veld, kan men een analoge redenering volgen. De

atomen worden dynamisch onafhankelijk van elkaar verondersteld. Het veld treedt in wisselwerking met alle atomen in het tijdinterval van 0 tot t.
Voor de waarschijnlijkheid dat alle atomen elk één foton absorberen en dat de vrijgekomen electronen geteld worden vindt men dan:

$$p^{(n)}(t) = \int \cdots \int_0^t \prod_{j=1}^{n} S(t''_j - t'_j)\; G^{(n)}(\vec{r}_1 t'_1, \ldots \vec{r}_n t'_n, \vec{r}_n t''_n, \ldots \vec{r}_1 t''_1) \cdot \prod_{j=1}^{n} dt'_j\, dt''_j. \qquad (62)$$

Als de gevoeligheid constant is over een frequentiegebied, dat minstens zo groot is als het frequentiegebied van de straling, is:

$$p^{(n)}(t) = s^n \int \cdots \int_0^t G^{(n)}(\vec{r}_1 t'_1, \ldots \vec{r}_n t'_n, \vec{r}_n t'_n, \ldots \vec{r}_1 t'_1) \prod_{j=1}^{n} dt'_j. \qquad (63)$$

Voor reële detectoren is de kans dat alle atomen worden aangeslagen natuurlijk erg klein. De functie $p^{(n)}(t)$ speelt echter een belangrijke rol bij de bespreking van de statistische eigenschappen van foton-tel-experimenten, zoals coïncidentiemetingen (hoofdstuk VI).

VI. COINCIDENTIEMETINGEN MET FOTODETECTOREN.

Door Glauber (1965), hoofdstuk XVII, wordt een telexperiment nagegaan, waarbij een teller gedurende een tijdinterval t licht opvangt. Het getelde aantal fotonen, C, is een stochastische grootheid. Om iets te weten te komen over de fluctuaties moeten we de verdelingsfunctie van C kennen.
Wij proberen hier op analoge wijze het meer ingewikkelde coïncidentie-experiment te berekenen. We gaan uit van twee identieke tellers, die beide bestaan uit een zeer groot aantal (N) atomen, en die beide gedurende t wisselwerken met het veld. De plaatscoördinaten van de atomen van teller 1 geven we aan met $\vec{r}_i$, die van teller 2 met $\vec{\rho}_j$, alle ten opzichte van één oorsprong. Het door teller 1 geregistreerde aantal fotonen kunnen we schrijven als de som van stochastische variabelen:

$$C_1 = \sum_{i=1}^{N} z_i \quad \text{eveneens:} \quad C_2 = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j, \tag{64}$$

hierin is $z_i = 0$ als het i-de atoom niet geïoniseerd wordt
$= 1$ als het i-de atoom wel geïoniseerd wordt.
$\zeta_j = 0$ als het j-de atoom niet geïoniseerd wordt
$= 1$ als het j-de atoom wel geïoniseerd wordt.

De eindtoestand van het systeem wordt gekarakteriseerd door een serie waarden voor $z_1,..,z_N,\zeta_1,..,\zeta_N$. De waarschijnlijkheid hiervoor noemen we: $P(z_1,..,z_N,\zeta_1,..,\zeta_N,t)$. De grootheid waar we belang in stellen is:

$$\langle C_1 C_2 \rangle = \sum_{(z_i,\zeta_j)} \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} z_i \zeta_j \, P(z_1,..,z_N,\zeta_1,..,\zeta_N,t) \right\}, \tag{65}$$

waarbij de sommatie over (z_i,ζ_j) betekent: sommatie over $z_i = 0,1$ en $\zeta_j = 0,1$ voor $i,j = 1,..N$.
We definiëren de momenten-voortbrengende functie $Q(\lambda,\mu,t)$:

$$Q(\lambda,\mu,t) = \langle (1-\lambda)^{C_1} (1-\mu)^{C_2} \rangle. \tag{66}$$

Uit (66) blijkt:

$$(-1)^{n+m}\left\{\frac{\partial^{m+n}}{\partial\lambda^m\partial\mu^n}\,Q(\lambda,\mu,t)\right\}_{\lambda=\mu=0} = < C_1(C_1-1)..(C_1-m+1)C_2(C_2-1)..$$

$$..(C_2-n+1) > .$$

$$= < \frac{C_1!C_2!}{(C_1-m)!(C_2-n)!} > . \qquad (67)$$

Ontwikkelen we $Q(\lambda,\mu,t)$ in een taylorreeks om $\lambda=\mu=0$ dan vinden we:

$$Q(\lambda,\mu,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\lambda^{k-n}\mu^n\left\{\frac{\partial^k}{\partial\lambda^{k-n}\partial\mu^n}\,Q(\lambda,\mu,t)\right\}_{\lambda=\mu=0} =$$

$$= \sum_{m+n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m+n}\frac{1}{m!n!}\lambda^m\mu^n\left\{\frac{\partial^{m+n}}{\partial\lambda^m\partial\mu^n}\,Q(\lambda,\mu,t)\right\}_{\lambda=\mu=0}. \qquad (68)$$

De lineaire combinatie van momenten, (67), verschijnen dus in de taylorreeks als coëfficiënten van $(-1)^{n+m}\lambda^m\mu^n/m!n!$.
We kunnen ook schrijven:

$$Q(\lambda,\mu,t) = \sum_{m,n=0}^{N}(1-\lambda)^m(1-\mu)^n\,p(m,n,t), \qquad (69)$$

waarin $p(m,n,t)$ een meer bij het experiment aansluitende verdelingsfunctie is, namelijk de kans dat teller 1 m-fotonen en teller 2 n-fotonen registreert, ongeacht de vraag welke atomen een overgang maken. Door taylorontwikkeling van (69) om de punten $\lambda=\mu=1$ ziet men dat:

$$p(m,n,t) = \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!}\left\{\frac{\partial^{m+n}}{\partial\lambda^m\partial\mu^n}\,Q(\lambda,\mu,t)\right\}_{\lambda=\mu=1}. \qquad (70)$$

Om $Q(\lambda,\mu,t)$ te vinden schrijven we:

$$Q(\lambda,\mu,t) = \sum_{(z_i,\zeta_j)} (1-\lambda)^{\sum_{i=1}^{N} z_i} (1-\mu)^{\sum_{j=1}^{N} \zeta_j} P(z_1,..,z_N,\zeta_1,..,\zeta_N,t)$$

$$= \sum_{(z_i,\zeta_j)} \prod_{i,j=1}^{N} (1-\lambda)^{z_i} (1-\mu)^{\zeta_j} P(z_1,..,z_N,\zeta_1,..,\zeta_N,t)$$

$$= \sum_{(z_i,\zeta_j)} \prod_{i,j=1}^{N} (1-\lambda z_i)(1-\mu\zeta_j) P(z_1,..,z_N,\zeta_1,..,\zeta_N,t)$$

$$= \sum_{n,m=0}^{N} (-\lambda)^n (-\mu)^m \sum_{(z_i,\zeta_j)} \sum_{n\text{-voud}} z_{i1}..z_{in} \sum_{m\text{-voud}} \zeta_{j1}..\zeta_{jm} \cdot$$

$$\cdot P(z_1,..,z_N,\zeta_1,..,\zeta_N,t). \quad (71)$$

In de laatste regel is het N-voudig product uit de voorlaatste regel ontwikkeld naar machten van λ en μ. Dus:

$$Q(\lambda,\mu,t) = \sum_{n,m=0}^{N} (-\lambda)^n (-\mu)^m \sum_{n\text{-voud}} \sum_{m\text{-voud}} \sum_{(z_i,\zeta_j)}$$

$$(z_{i1}..z_{in})(\zeta_{j1}..\zeta_{jm}) P(z_1,..,z_N,\zeta_1,..,\zeta_N,t).$$

De waarschijnlijkheid dat alle atomen i1,..,in van detector 1 en alle atomen j1,..,jm van detector 2 een foton absorberen, ongeacht de vraag wat de andere atomen doen, is:

$$p(i1,..in,j1,..jm,t) = \sum_{(z_i,\zeta_j)} (z_{i1}..z_{in})(\zeta_{j1}..\zeta_{jm}) P(--,--,t). \quad (72)$$

Deze laatste uitdrukking is gelijk aan de waarschijnlijkheid, dat alle (n+m) atomen (ter plaatse $\vec{r}_{i1},..\vec{r}_{in},\vec{\rho}_{j1},..,\vec{\rho}_{jm}$) een foton absorberen. Met behulp van (62) krijgen we dus:

$$p(i1,..in,j1,..jm,t) = p^{(n,m)}(t) = \int_0^t..\int_0^t \prod_{i=1}^{n} S(t_i''-t_i')dt_i'dt_i'' \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{m} S(\tau_j''-\tau_j')d\tau_j'd\tau_j'' \; G^{(n+m)}(\vec{r}_1 t_1'..\vec{r}_n t_n'\vec{\rho}_1\tau_1'..\vec{\rho}_m\tau_m',\vec{\rho}_m\tau_m''..\vec{r}_1 t_1''). \quad (73)$$

Dan is:

$$Q(\lambda,\mu,t) = \sum_{n,m=0}^{N} (-\lambda)^n(-\mu)^m \sum_{n\text{-voud}} \sum_{m\text{-voud}} p(i1,..,in,j1,..jm,t). \tag{74}$$

Tot $\sum_{n\text{-voud}}$ dragen alleen bij de termen waarvoor $n << N$. We mogen dan schrijven:

$$\sum_{n\text{-voud}} \simeq \frac{1}{n!} \sum_{i1=1}^{N} \sum_{i2=1}^{N} .. \sum_{in=1}^{N} \simeq \frac{1}{n!} \int_{V_1} d\vec{r}_1\sigma(\vec{r}_1) \ldots \int_{V_1} d\vec{r}_n\sigma(\vec{r}_n),$$

$$\sum_{m\text{-voud}} \simeq \frac{1}{m!} \sum_{j1=1}^{N} \sum_{j2=1}^{N} .. \sum_{jm=1}^{N} \simeq \frac{1}{m!}\int_{V_2} d\vec{\rho}_1\sigma(\vec{\rho}_1)\ldots\int_{V_2} d\vec{\rho}_m\sigma(\vec{\rho}_m), \tag{75}$$

waarbij de sommen over de individuele atomen vervangen zijn door integralen over de volumina V_1 en V_2 van elk der beide tellers respectievelijk, terwijl $\sigma(\vec{r})$ voorstelt het aantal atomen per volume-eenheid ter plaatse $\vec{r}$. Met (75) en (73) vinden we dan:

$$Q(\lambda,\mu,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n(-\mu)^m}{n!m!} \underbrace{\int\cdots\int}_{n\times \text{ over } V_1} \underbrace{\int\cdots\int}_{m\times \text{ over } V_2} \int_0^t \cdots \int_0^t \cdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} S(t_i''-t_i')\sigma(\vec{r}_i)d\vec{r}_i dt_i' dt_i'' \prod_{j=1}^{m} S(\tau_j''-\tau_j')\sigma(\vec{\rho}_j)d\vec{\rho}_j d\tau_j' d\tau_j''. \times$$

$$\times\, G^{(m+n)}(\vec{r}_1 t_1' .. \vec{r}_n t_n' \vec{\rho}_1\tau_1' .. \vec{\rho}_m\tau_m', \vec{\rho}_m\tau_m'' .. \vec{\rho}_1\tau_1'' \vec{r}_n t_n'' .. \vec{r}_1 t_1''). \tag{76}$$

Voor de berekening van de verdelingsfunctie $p(m,n,t)$ en de hogere-orde-momenten (67) dient men met de algemene vorm (76) verder te gaan. Men kan dan afhankelijk van de coherentie-eigenschappen van het veld de betreffende vormen voor $G^{(n+m)}$ invullen. Men berekent dan $Q(\lambda,\mu,t)$ voor een volledig coherent veld, voor een veld dat in de P-representatie kan worden geschreven, of voor een veld met gaussische P-representatie. De berekening is analoog aan

Glauber (1965).
Voor ons doel, de berekening van $\langle C_1 C_2 \rangle$ speciaal met het oog op de meting van Hanbury Brown en Twiss, is het voldoende zich te realiseren dat (76) een machtreeksontwikkeling is rond $\lambda=\mu=0$. De coëfficiënt van $\lambda\mu$ in deze reeks is dan volgens (67) en (68) gelijk aan $\langle C_1 C_2 \rangle$:

$$\langle C_1 C_2 \rangle = \int_{V_1}\int_{V_2}\int_{\sigma}\int_{0}^{t} S(t''-t')\,\sigma(\vec{r})\,d\vec{r}\,dt'\,dt''\;S(\tau''-\tau')\,\sigma(\vec{\rho})\,d\vec{\rho}\,d\tau'\,d\tau''\cdot \cdot G^{(2)}(\vec{r}t',\vec{\rho}\tau',\vec{\rho}\tau'',\vec{r}t''). \qquad (77)$$

Dit resultaat zullen wij in het volgende hoofdstuk gaan toepassen in de situatie van de meting volgens Hanbury Brown en Twiss van sterdiameters.
Volledigheidshalve volgen hieronder nog enkele uitkomsten van foton-tel-experimenten en coïncidentiemetingen:

	fotonenteller	coïncidentiemeting
a)	$p(m,t) = \frac{\langle C\rangle^m}{m!} \exp -\langle C\rangle$ variantie = $= \langle C^2\rangle - \langle C\rangle^2 = \langle C\rangle$	$p(m,n,t) = \frac{\langle C_1\rangle^m}{m!} \exp -\langle C_1\rangle \cdot \frac{\langle C_2\rangle^n}{n!} \exp -\langle C_2\rangle$ $\langle C_1 C_2\rangle = \langle C_1\rangle \langle C_2\rangle$
b)	$p(m,t) = \frac{\langle C\rangle^m}{[1+\langle C\rangle]^{m+1}}$ var. $= \langle C\rangle\,[1+\langle C\rangle]$	$p(m,n,t) = \frac{(m+n)!}{m!n!} \frac{\langle C_1\rangle^m \langle C_2\rangle^n}{[1+\langle C_1\rangle+\langle C_2\rangle]^{m+n+1}}$ $\langle C_1 C_2\rangle = 2\langle C_1\rangle\langle C_2\rangle$
c)	var. $= \langle C\rangle\,[1+\frac{\langle C\rangle}{\gamma t}]$ γ: spectraalbreedte t: meettijd.	$\langle C_1 C_2\rangle = \langle C_1\rangle\langle C_2\rangle\,[1+\frac{1}{\gamma t}]$

a): Volledig coherent veld;
b): Gaussische P-representatie. Korte meettijd. Vlakke golf.
c): Gaussische P-representatie. Lange meettijd. Vlakke golf. Spectrum heeft Lorentz-profiel.

VII. DE METING VAN EEN STERDIAMETER VOLGENS HANBURY BROWN EN TWISS.

Met de opstelling van Hanbury Brown en Twiss (zie fig. blz. 11) wordt het correlatieproduct, $\langle C_1 C_2 \rangle$, gemeten, waarvoor we (77) hebben afgeleid. We nemen aan, dat de tellers voor alle frequenties van het opvallende licht even gevoelig zijn, zodat: $S(t''-t') = s\delta(t''-t')$. Dan wordt (77):

$$\langle C_1 C_2 \rangle = s^2 \int_{V_1}\int_{V_2}\int_{o}^{t}\int_{o}^{t} G^{(2)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2, \vec{r}_2 t_2, \vec{r}_1 t_1) \cdot \sigma(\vec{r}_1)\sigma(\vec{r}_2)\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 dt_1 dt_2 . \quad (78)$$

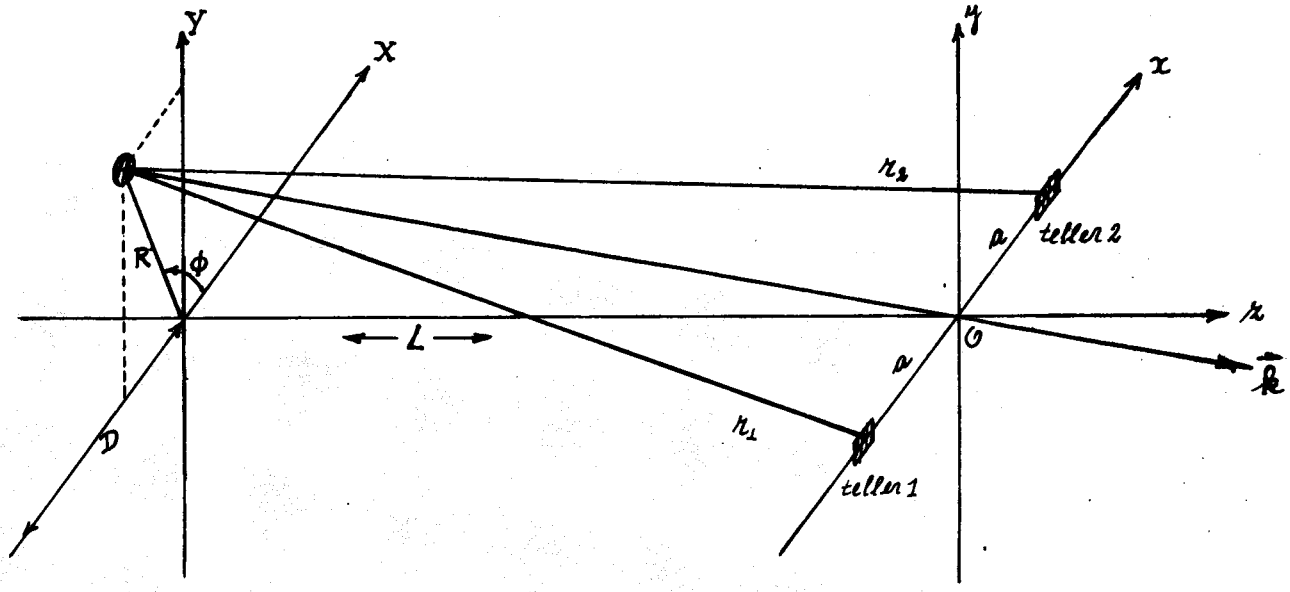
De ster is een chaotische lichtbron en het veld kan dus met de gaussische P-representatie beschreven worden. Dan geldt (44):

$$G^{(2)}(x_1 x_2 x_3 x_4) = G^{(1)}(x_1 x_3)\, G^{(1)}(x_2 x_4) + G^{(1)}(x_1 x_4)\, G^{(1)}(x_2 x_3). \quad (79)$$

Met behulp van de relatie: $G^{(1)}(x_1 x_2) = [G^{(1)}(x_2 x_1)]^*$, krijgen we voor (78):

$$\langle C_1 C_2 \rangle = s^2 \int_{V_1}\int_{V_2}\int_{o}^{t}\int_{o}^{t} \left\{ |G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2)|^2 + G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_1 t_1)\, G^{(1)}(\vec{r}_2 t_2, \vec{r}_2 t_2) \right\} \sigma(\vec{r}_1)\, \sigma(\vec{r}_2)\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 dt_1 dt_2 . \quad (80)$$

Om bij deze meting de juiste vorm te vinden voor $G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2)$ gaan we als volgt te werk:
We stellen de ster voor als een platte schijf, die uniform over het oppervlak licht uitstraalt (we zien af van verschijnselen als "randverduistering"). In een vlak evenwijdig aan het steroppervlak plaatsen we de beide tellers op onderlinge afstand 2a, en kiezen de verbindingslijn der tellers als x-as. De ij-as loopt ook evenwijdig aan het steroppervlak. De sterdiameter is 2D. De afstand tot de ster is L. (zie tekening volgende bladzijde).



Als de gaussische P-representatie geldt krijgt men voor $G^{(1)}$:

$$G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2) = \tfrac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_k \langle n_k \rangle \, u_k^*(\vec{r}_1) u_k(\vec{r}_2) \exp i\omega_k(t_1 - t_2). \qquad (81)$$

(zie (44)). De hoek waaronder men vanaf de ster het meetapparaat ziet is zo klein dat men kan aannemen dat het licht van een oppervlakte-element, RdRdΦ van de ster, vlakke golven zijn, waarvan de voortplantingsvectoren $\vec{k}$ wijzen naar het punt O. Zetten we in (81) vlakke-golf-modefuncties (Glauber 1963c, p. 2768):

$$u_k(\vec{r}) = A^{-3/2} \exp i\vec{k}.\vec{r} \qquad (82)$$

dan wordt de bijdrage van RdRdΦ tot $G^{(1)}$:

$$d[G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2)] = \frac{\hbar c R dR d\Phi}{2A^3} \sum_{\vec{k}} k\delta\langle n_k \rangle \exp -i\left\{\vec{k}.(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \omega_k(t_1 - t_2)\right\}. \qquad (83)$$

Hierin is: $\delta\langle n_k \rangle$ = aantal fotonen in de mode $\vec{k}$ per m^2 van RdRdΦ

A = normeringsconstante van de $u_k(\vec{r})$; A zeer veel groter dan de golflengte.

Uit de tekening blijkt: $\vec{k}.(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \simeq 2ak_x = \frac{2akR \cos\Phi}{L}$. In goede benadering kunnen we schrijven: $|\vec{k}| = k \simeq k_z$, zodat de som over $\vec{k}$ gelijk is aan de som over (k_x, k_y, k_z) en deze is gelijk aan de som over k_z. De modes k_z zijn zo dicht verdeeld over de k-ruimte, dat we kunnen overgaan op een integraal: $\Sigma_{k_z} \rightarrow A/2\pi \int dk_z$.

We vinden tenslotte:

$$d[G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2)] = \frac{RdRd\Phi}{4\pi c}\int_0^\infty \frac{\bar{h}\omega_k \delta\langle n_k\rangle}{A^2} \exp -i\omega_k\left\{\frac{2aR\cos\Phi}{Lc} - (t_1 - t_2)\right\}d\omega_k \tag{84}$$

waarbij is gebruikt: $\omega_k = kc = k_z c$.
Voor de verdere berekening is het nu nodig een spectrale verdeling te introduceren voor het licht dat op de tellers valt. Bij de in Narrabri uitgevoerde experimenten worden de door de spiegels geconcentreerde lichtbundels door filters gestuurd, die een smal doorlaat-gebied ($\Delta\lambda = 8.10^{-9}$ m) hebben. Zie Hanbury Brown (1966). We stellen hier, dat het aantal fotonen normaal verdeeld is rond de centrale frequentie ω_0 (we schrijven $\omega_k = \omega$):

$$\frac{\delta\langle n_k\rangle}{cA^2} = \frac{2}{\gamma\sqrt{\pi}}\,\delta\langle n\rangle \exp -\left[\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right]^2, \tag{85}$$

waarin γ: halve breedte van het spectrum op $\frac{1}{e}$ × maximale hoogte. ($\gamma << \omega_0$).

$\delta\langle n\rangle$: totaal aantal fotonen per m^3 in modes met richting $\vec{k}$, per m^2 van $RdRd\Phi$.

Zetten we (85) in (84), dan vinden wij:

$$d[G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2)] = \frac{\bar{h}\,\delta\langle n\rangle\, RdRd\Phi}{2\gamma\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \omega \exp -\left[\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right]^2 \cdot \exp -i\omega\left\{\frac{2aR\cos\Phi}{Lc} - (t_1 - t_2)\right\}d\omega. \tag{86}$$

Om $G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2)$ te krijgen moeten wij (86) integreren over het steroppervlak:

$$G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2) = \frac{\bar{h}\delta\langle n\rangle}{2\gamma\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \omega d\omega \exp\left\{-\left[\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right]^2 + i\omega(t_1 - t_2)\right\} \cdot \int_0^D RdR\int_0^{2\pi} d\Phi \exp -\left[\frac{i\omega.2aR\cos\Phi}{Lc}\right]. \tag{87}$$

We gebruiken:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ix\cos\Phi)d\Phi = J_0(-x). \tag{88}$$

J_0: nulde-orde Besselfunctie, zie Whittaker en Watson (1963). Dan:

$$G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2) = \frac{\hbar\delta\langle n\rangle}{\gamma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \omega d\omega \exp\left\{-\left[\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right]^2 + i\omega(t_1-t_2)\right\} \cdot \int_0^D R\, J_0\left[\frac{2R\alpha\omega}{Lc}\right] dR. \quad (89)$$

Verder geldt:

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_1(x)\right] = xJ_0(x). \quad (90)$$

J_1: eerste-orde Besselfunctie. Dan:

$$G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2) = \frac{\hbar\langle n\rangle c}{\pi\sqrt{\pi}\,\gamma a\vartheta}\int_0^\infty \exp\left\{-\left[\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right]^2 + i\omega(t_1-t_2)\right\} J_1\left(\frac{\omega}{c}a\vartheta\right) d\omega. \quad (91)$$

Hierin is: $\frac{2D}{L} = \vartheta$ (hoekafmeting van de ster),

$\pi D^2\,\delta\langle n\rangle = \langle n\rangle$ (totaal aantal fotonen per m^3 in de buurt van de tellers).

De integraal in (91) bevat een snel variërende fasefactor: $\exp i\left[\omega(t_1-t_2) + i\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right)^2\right] = \exp i\psi$. We benaderen (91) door in de integrand die waarde van ω te schrijven waarvoor de (complexe) fase stationair is (stationaire-fase-approximatie):

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \frac{2i}{\gamma^2}(\omega-\omega_0) + (t_1-t_2) = 0. \quad (92)$$

Dan volgt:

$$\omega = \omega_0 + \frac{i(t_1-t_2)\gamma^2}{2}. \quad (93)$$

Dan wordt (91):

$$G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2) = \frac{\hbar\langle n\rangle c}{\pi\sqrt{\pi}\,\gamma a\vartheta}\exp\left\{-\frac{(t_1-t_2)^2\gamma^2}{4} + i\omega_0(t_1-t_2)\right\} \cdot J_1\left\{a\vartheta\left[\frac{\omega_0}{c} + \frac{i(t_1-t_2)\gamma^2}{c}\right]\right\}\Delta\omega. \quad (94)$$

$\Delta\omega$ moet van de orde γ zijn. Een voor de hand liggende keuze is:

$$\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \exp - \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 d\omega = \gamma\sqrt{\pi}. \qquad (95)$$

(94) levert van nul verschillende waarden op voor: $(t_1 - t_2) \leq \frac{2}{\gamma}$ ($\frac{2}{\gamma}$ is van de orde 3.10^{-14} sec). In dat geval is het imaginaire deel van het argument van J_1 veel kleiner dan het reële deel. We vinden dan voor (94):

$$G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2) = \frac{\hbar\omega_0 \langle n\rangle}{2\pi} \exp\left\{ - \frac{(t_1 - t_2)^2\gamma^2}{4} + i\omega_0 (t_1 - t_2)\right\} \frac{2J_1(k_0 a\vartheta)}{k_0 a\vartheta}. \qquad (96)$$

Verder blijkt:

$$G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_1 t_1) = G^{(1)}(\vec{r}_2 t_2, \vec{r}_2 t_2) = \frac{\hbar\omega_0 \langle n\rangle}{2\pi} = I_1. \qquad (97)$$

De laatste twee resultaten zetten we in (80), waarbij we aannemen dat $G^{(1)}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2)$ constant blijft als $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ onafhankelijk van elkaar variëren respectievelijk over teller 1 en teller 2. In goede benadering is namelijk steeds: $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 2a$. Dus:

$$\langle C_1 C_2\rangle = s^2 \int_{V_1}\int_{V_2}\int_o^t\int_o^t \left\{ I_1^2 \left|\frac{2J_1(k_0 a\vartheta)}{k_0 a\vartheta}\right|^2 \exp - \frac{(t_1 - t_2)^2\gamma^2}{2} + I_1^2\right\} \cdot$$

$$\cdot\, \sigma(\vec{r}_1)\sigma(\vec{r}_2)\, d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2\, dt_1\, dt_2. \qquad (98)$$

$$= s^2 I_1^2 N^2 \left|\frac{2J_1(k_0 a\vartheta)}{k_0 a\vartheta}\right|^2 \int_o^t\int_o^t \exp - \left[\frac{(t_1 - t_2)^2\gamma^2}{2}\right] dt_1\, dt_2 + s^2 I_1^2 N^2 t^2, \qquad (99)$$

waarin N het aantal gevoelige atomen is van elk der tellers. We zetten: $I = sI_1 Nt$. Dan:

$$\langle C_1 C_2\rangle = I^2 + \frac{I^2}{t^2}\left|\frac{2J_1(k_0 a\vartheta)}{k_0 a\vartheta}\right|^2 \int_o^t\int_o^t \exp - \left[\frac{(t_1 - t_2)^2\gamma^2}{2}\right] dt_1\, dt_2. \qquad (100)$$

Voor de integraal in (100) vinden we de waarde $2\sqrt{2\pi}\,\frac{t}{\gamma} = \frac{t}{\gamma'}$, waarbij de integratie is uitgevoerd over een smalle strook ter breedte $2/\gamma$ in het (t_1, t_2)-vlak. We vinden dan voor het correlatieproduct:

$$\langle C_1 C_2 \rangle = I^2\left\{\frac{1}{\gamma' t}\left|\frac{2J_1(k_0 a\vartheta)}{k_0 a\vartheta}\right|^2 + 1\right\} \qquad (101)$$

(vergelijk (101) met de formule rechts onder in de tabel op blz. 30).

In de practijk wordt de meettijd, t, bepaald door de oplostijd, τ_0, van de electronische installatie (fotomultiplicatoren, versterkers, correlator). τ_0 is ongeveer gelijk aan de inverse bandbreedte van de electronische apparatuur.

Hanbury Brown (1966): $\tau_0 \approx 2{,}5.10^{-9}$ sec. $\gamma' \approx 10^{13}$ sec.$^{-1}$.

In werkelijkheid wordt gemeten $\langle \Delta C_1\ \Delta C_2 \rangle$, want de schakeling laat de gelijkstroomcomponenten niet door $(\Delta C_1 = C_1 - \langle C_1 \rangle)$.

Zetten we $t = \tau_0$, dan vinden we de benadering:

$$\langle \Delta C_1\ \Delta C_2 \rangle = \langle C_1 C_2 \rangle - \langle C_1 \rangle \langle C_2 \rangle \approx \frac{I^2}{\gamma' \tau_0}\left|\frac{2J_1(k_0 a\vartheta)}{k_0 a\vartheta}\right|^2. \qquad (102)$$

Voor de metingen te Narrabri vinden we dan:

$$\langle \Delta C_1\ \Delta C_2 \rangle = 4.10^{-5}\, I^2 \left|\frac{2J_1(k_0 a\vartheta)}{k_0 a\vartheta}\right|^2. \qquad (103)$$

De uitkomst (103) wordt door de integrator over een meetperiode T geïntegreerd (T is ongeveer 3 tot 5 uur).

Na een meting, waarbij de afstand 2a tussen de detectoren minimaal is, wordt 2a groter gemaakt. Bij die afstand voor 2a, waarbij $J_1(k_0 a\vartheta) = 0$, vindt men geen correlatie meer in de intensiteitsfluctuaties. Het tweede nulpunt van $J_1(k_0 a\vartheta)$ ligt bij de waarde $k_0 a_0 \vartheta = 3{,}83$.

Voor de hoekafmeting van de ster is dan:

$$\vartheta = \frac{3{,}83}{k_0 a_0}. \qquad (104)$$

Te Narrabri zijn ondermeer gemeten: Wega, β Crucis en Altair.

VIII. LITERATUURLIJST.

Adam, A., Jánossy, L. Varga, P. (1955): Acta Phys. Hung, 4, 301.

Born, M., Wolf, E. (1964) : "Principles of Optics", Pergamon Press.

Brannen, E., Ferguson, H.I.S. (1956) : Nature, 178, 481.

Browne, A. (1966) : Philips Techn. Tijdschrift, 27, 208.

Chandrasekhar, S. (1954) : In "Noise and Stochastic Processes", N.Wax, ed. New York.

Dirac, P.A.M. (1957) : "The Principles of Quantum Mechanics", Oxford Clarendon Press.

Glauber, R.J. (1963b) : Phys. Rev., 130, 2529.

Glauber, R.J. (1963c) : Phys. Rev., 131, 2766.

Glauber, R.J. (1965) : "Quantum Optics and Electronics", Les Houches, p. 65

Hanbury Brown, R., Twiss, R.Q. (1956a): Nature, 177, 27.

Hanbury Brown, R., Twiss, R.Q. (1956b): Nature, 178, 1447.

Hanbury Brown, R., Twiss, R.Q. (1957a): Proc. Roy. Soc., A242, 300.

Hanbury Brown, R., Twiss, R.Q. (1957b): Proc. Roy. Soc., A243, 291.

Hanbury Brown, R., Twiss, R.Q. (1958) : Proc. Roy. Soc., A248, 199 en 222.

Hanbury Brown, R. (1966) : Philips Techn. Tijdschrift, 27, 197.

Khinchin, A.I. (1949) : "Mathematical Foundations of Statistical Mechanics", New York.

Mandel, L., Wolf, E. (1965) : Rev. Mod. Phys., 37, 231.

Michelson, A.A. (1890) : Phil. Mag., 30, 1.

Michelson, A.A. (1920) : Astrophys. J., 51, 257.

Michelson, A.A., Pease, F.G. (1921) : Astrophys. J., 53, 249.

Purcell, E.M. (1956) : Nature, 178, 1449.

Whittaker, E.T., Watson, G.N. (1963) : "A Course of modern Analysis" Cambridge, University Press.