

MASTER

Wegen met snaren

Staal, J.J.W.

Award date:
1973

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

WEGEN MET SNAREN

Verslag van het afstudeerwerk ver-
richt bij de werkgroep P.O.M. door

J.J.W. Staal

Afstudeerhoogleraar:

prof.dr. P. van der Leeden

Coaches: dr. J. Poulis

dr.ir. C. Massen

ing. M. Verduin

september 1973

Typewerk: Marijke Hendrickx

ERRATUM

Deel I, 1.2.4 Gelineariseerde vergelijkingsmeting

De berekening op pagina 9 is misgelopen door onzorgvuldigheid. De juiste formules luiden:

$$\begin{aligned} \text{De spankracht van snaar 1 is: } S_1 &= \frac{1}{2}S_0 - \alpha F \\ \text{en van snaar 2 } S_2 &= \frac{1}{2}S_0 + (1 + \alpha)F \end{aligned}$$

Zijn de snaren identiek dan zijn de frequenties resp.

$$f_1 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S_0 - 2\alpha F}{2\mu}} \quad f_2 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S_0 + 2(1 + \alpha)F}{2\mu}}$$

zodat

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{S_0 + 2(1 + \alpha)F}{S_0 - 2\alpha F}} \approx 1 + (1 + 2\alpha)\frac{F}{S_0} + \frac{1}{2}(4\alpha^2 - 1)\left(\frac{F}{S_0}\right)^2 + \dots \quad (1.6)$$

De conclusie $\alpha = \frac{1}{2}$, dus $a = b$ blijft correct, echter

$$\frac{f_2}{f_1} \approx 1 + 2\frac{F}{S_0}$$

ofwel (Pagina 10)

$$\frac{f_2 - f_1}{f_1} \approx 2\frac{F}{S_0} \quad (1.7)$$

De grafiek van fig. 1.11 moet dan als volgt aangepast worden:

de $\frac{F}{S_0}$ waarden dienen gehalveerd te worden;

lees voor 0, 2, 4, 6, 8, 10 $\times 10^{-2}$

resp. 0, 1, 2, 3, 4, 5 $\times 10^{-2}$,

evenzo de negatieve waarden.

Voor een lineariteit beter dan 1% moet $\frac{F}{S}$ nu zelfs kleiner dan 0.03 gehouden worden. De eindconclusie wordt dus nog versterkt.

VOORWOORD

Het onderzoek aan trillende snaren is enkele jaren geleden gestart bij de Afdeling der Werktuigbouwkunde. Toen was het reeds mogelijk een weeginstrument te ontwikkelen dat functioneerde, maar tekortschoot in nauwkeurigheid. De theoretische achtergrond ontbrak volkomen.

De motivatie van dit onderzoek is om in deze lacune te voorzien, met als gevolg een theoretisch verhaal met slechts enkele metingen.

SAMENVATTING

Welke nauwkeurigheid kan men met een snaar-meetin-
strument bereiken?

Deze vraag ligt aan dit onderzoek ten grondslag. Het verslag van dit onderzoek geeft geen algemeen antwoord op bovenstaande vraag, maar gaat dieper in op het gedrag van een snaar, waarmee het een theoretische basis schept voor meetprincipes en - procedures.

Met deze kennis wordt een snaarweger beschreven die een meetnauwkeurigheid van 0.5% haalt.

Een diepgaander onderzoek zal nodig zijn om dit resultaat te overtreffen.

PRECIS

What accuracy can be attained with a string measuring instrument?

Herein lies the basis of this investigation. The report will not answer this question, but will give quite sufficient theoretical information about the principle of measurement, the procedure of measurement and the behaviour of the string itself.

With the knowledge acquired, a description of a string balance will be given which has an accuracy of 0.5% without difficulty.

Further investigation will be necessary to obtain higher accuracies.

INHOUDSOPGAVE

Blz.

Notatie	III
Symbolenlijst	IV
Literatuurlijst	VII

<u>Deel I</u>	<u>Meetinstrumenten met snaren</u>	1
---------------	------------------------------------	---

1.	Metten met snaren	2
2.	Inklemming van een snaar	13
3.	Aandrijving en detectie van de snaar	18
4.	Frequentie meten	21

<u>Deel II</u>	<u>Theorie van de trillende snaar</u>	24
----------------	---------------------------------------	----

1.	De mathematische snaar	25
2.	De fysische snaar	31
3.	Fysische snaar, benaderd	33

<u>Deel III</u>	<u>Uitbreiding van de theorie</u>	38
-----------------	-----------------------------------	----

1.	Amplitude	39
2.	Randvoorwaarden	48
3.	Magneetveld	50
4.	Demping	51

Blz.

<u>Deel IV</u>	<u>Constructie van een snaarweger</u>	55
1.	De snaaropstelling	56
2.	De snaar	57
3.	Methode	60
4.	Oscillator	61
5.	Verwerking van de frequentie	63
6.	Schets mechanische uitvoering	65
7.	Nawoord	66
<u>Deel V</u>	<u>Meting van de demping</u>	67
1.	De meetopstelling	68
2.	Amplitudegedrag	71
3.	Frequentiegedrag	73
4.	Tips voor opvolger	76

NOTATIE

- = : exacte gelijkheid
of gelijkheid onder aangegeven voorwaarden
- ≈ : ongeveer gelijk
- Δ : voorvoegsel: ΔA betekent een kleine verandering
van grootheid A
- Σ : sommatieteken

Differentiëren wordt aangegeven door een index.

Voorbeeld: $y_x = \frac{dy}{dx}$ of $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Misleidend is dan het gebruik van een index om onderscheid aan te geven. Ik hoop dat de tekst in twijfelgevallen uitsluitend geeft.

SYMBOLENLIJST

A	amplitude	m
B	magn. inductie	T
c	voortplantingssnelheid	$m \text{ sec}^{-1}$
C	capaciteit	F
D	dempingsconstante	$kg \text{ m}^{-1} \text{ sec}^{-1}$
e	= 2,7	
E	elasticiteitsmodulus	$N \text{ m}^{-2}$
f	frequentie	sec^{-1}
F	kracht	N
g	valversnelling	$m \text{ sec}^{-2}$
i	stroom	A
I	oppervlakte traagheidsmoment	m^4
j	= $\sqrt{-1}$	
k	golfgetal	m^{-1}
l	lengte	m
	specifieke lengte	$m \text{ kg}^{-1}$
L	Lagrangiaan	
	inklemlengte	m
m	natuurlijk getal	
	massa (coördinaat)	kg
M	massa	kg

n	ordegetal	
O	oppervlak van de doorsnede	m^2
Q	kwaliteitsfactor	
\underline{r}	plaatsvector	m
R	weerstand	Ω
s	booglengte	m
S	spankracht	N
t	tijd	sec
T	temperatuur	$^{\circ}C$
	kinetische energie	J
U	uitwijking van de snaar	m
W	buigingsenergie	J
x	plaatscoördinaat langs de snaar	m
y	plaatscoördinaat loodrecht op de snaar	m
Z	impedantie	Ω
ZI	zelfinductie	H

α	lin. uitzettingscoëfficiënt variabele	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
ϵ	klein getal	
η	functie	
θ	functie	
λ	golflengte functie	m
Λ	uitdempconstante	sec^{-1}
μ	massa per lengte-eenheid	kg m^{-1}
ξ	opgeblazen plaatscoördinaat	m
π	3,14	
ρ	dichtheid	kg m^{-3}
σ_t	treksterkte	N m^{-2}
ϕ	fase	
	functie	
ψ	functie	
ω	cirkelfrequentie	

LITERATUURLIJST

- | | | |
|----|--|---|
| 1 | Boersma, Ballegooyen | Stageverslag |
| 2 | Büker, Gast | Kontinuierliche gravimetrische
Staubmessung durch mechanische
Resonanz
Chem. Ing. Techn. 39(1967) p.963 |
| 3 | B. Thomson | Ein Beitrag zur Präzisions-
kraftmessung nach dem Prinzip
der schwingenden Saite
Dissertatie T.U. Berlin, 1969 |
| 4 | O. Schaefer | Die schwingende Saite als
Dehnungsmesser
VDI-Z 63(1919) p. 1008 |
| 5 | Gallo, Schaepman, Gerecke

en
Wirth, Wirth, Gallo | Automatisches Wägen vermittelst
zweier schwingender Saiten
Seminar über höhere Automatik
und Komputeraanwendungen

Een electrodynamische weeg-
schaal volgens het principe
van massavergelijking.
Mikron 1967, p. 300 |
| 6 | J. Staal | Stageverslag |
| 7 | W. Uitterhoeve | Stageverslag |
| 8 | R. Hatsck | Mechanisch-elektrische Mess-
wandler
Der Elektroniker |
| 9 | L. Broer

en
Morse, Feshbach | Collegedictaat Theoretische
Natuurkunde I

Methods of Theoretical Physics |
| 10 | I. Szabo | Höhere technische Mechanik
1958 |
| 11 | Veldman, Lebbink | Stageverslag |

- [12] L. Broer
On the dynamics of strings.
Journal of Engineering
Mathematics
Vol. 4, no. 3, July 1970
- [13] G. van Santen
Einführung in das Gebiet der
mechanischen Schwingungen
1954
- [14] K. Voelz
Die Dämpfung akustischer
Resonatoren
Z.f. angew. Physik
3(1951) p. 67
-

deel 1

meetinstrumenten
met
snaren

D E E L I
=====

MEETINSTRUMENTEN MET SNAREN

Samenvatting

Trillende snaren bieden veel voordelen voor gebruik als meetinstrument, speciaal voor krachtmeting. Algemene problemen van meetprincipe, snaarinklemming, aandrijving en detectie van de trilling en meetprocedures worden onder de loep genomen.

Het eenvoudigst te realiseren, goed werkend, systeem blijkt te zijn een vrijhangende snaar belast met een voorspanmassa. Op deze massa werkt de te meten kracht. De snaar maakt deel uit van een brug-oscillator, waarvan de frequentie geteld wordt en gekwadrateerd.

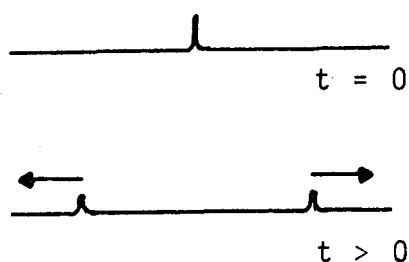
1. Metten met snaren

Snaren zijn eenieder bekend door muziekinstrumenten, vooral in de popmuziek is een gitaar niet weg te denken. Verder gebruik van snaren vindt men alleen in de opgaven voor wiskundige fysica.

Dat met trillende snaren geschikte meetinstrumenten geconstrueerd kunnen worden is minder bekend. Dit is dan ook een ontwikkeling van de laatste jaren, op gang gekomen door een digitalisme-verlangen.

1.1. Snaren

Een gespannen snaar kan transversale trillingen uitvoeren, die door de snaar worden voortgeplant met een snelheid c .



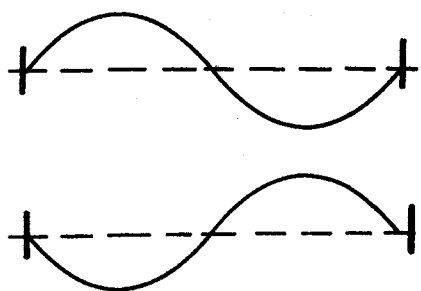
$$c = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad (1.1)$$

S = spankracht van de snaar
 μ = massa per lengte-eenheid

fig. 1.1 lopende golf

Lopende golven bieden een meetprincipe voor krachten (S is te berekenen uit meting van c als μ bekend is), of voor μ (als S bekend is). [1]

In een snaar kunnen door reflecties aan de uiteinden ook staande golven optreden. Bij vaste uiteinden geldt voor de frequentie f van deze trilling



$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad (1.2)$$

L = lengte van de snaar

$n = 1, 2, 3, \dots$ = ordegetal

(formules worden in deel II afgeleid)

fig. 1.2 staande golf

immers de golflengte λ van de staande golf kan zijn

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.3)$$

De functie van het ordegetal n blijkt uit fig. 1.3

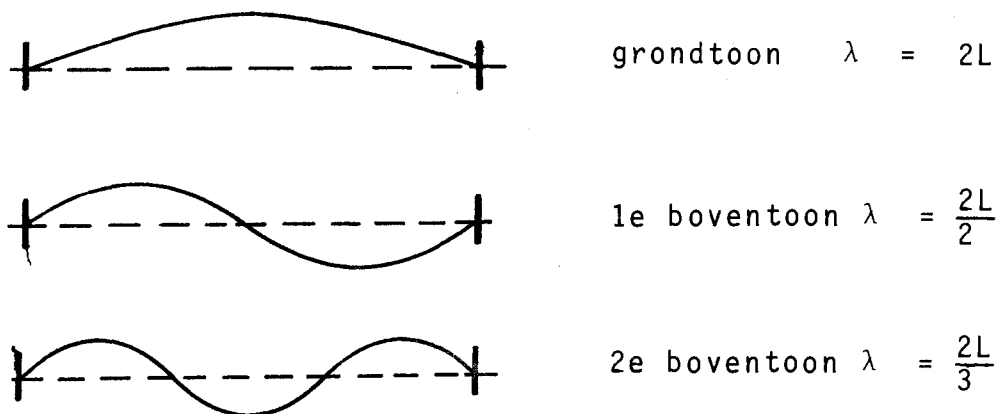


fig. 1.3 verschillende trillingsorden

Met de formule voor de frequentie van een trillende snaar (1.2) is meteen in te zien dat een snaar gebruikt kan worden voor lengte-, massa- en krachtmeting.

Een frequentie is gemakkelijker en nauwkeuriger te bepalen dan een snelheid; ook is een korte ingespannen snaar gemakkelijker te hanteren dan een lange snaar. Daarom houd ik me verder alleen bezig met staande golven in transversaal trillende snaren.

Ter oriëntatie: snaren waar ik meestal over praat bestaan uit staaldraad, diameter ca. 0.2 mm, lengte ca. 5 cm, gespannen met ca. 20 N; de frequentie bedraagt 3 - 15 kHz.

Zonder volledig te willen zijn, wil ik de hoofdlijnen van de verschillende meetprincipes schetsen.

Lengtemeting

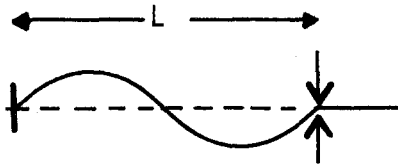


fig. 1.4 lengtemeting

Een snaar gespannen door een kracht S is ingeklemd tussen een vast en een verschuifbaar inklempunt. De lengte L tussen de inklempunten kan afgelezen worden uit de frequentie f van de snaartrilling: $f \sim L^{-1}$

Van dit meetprincipe heb ik nog geen toepassing gezien.

Massameting

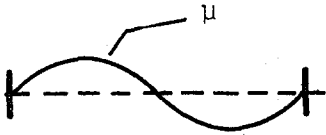


fig. 1.5 massameting

Een snaar is gespannen met kracht S tussen twee vaste punten. De frequentie f van de snaartrilling hangt af van de massa per lengte-eenheid : $f \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$

Toepassingen zijn er talloze: bij opdampeperimenten, luchtvervuilingsmeting [2], transportbanden, die de hoeveelheid getransporteerde stof wegen.

Krachtmeting

[3]



fig. 1.6 krachtmeting

Een snaar met vaste massa en in-spanlengte is gespannen met een kracht F .

De frequentie f van de snaartrilling geeft de kracht:

$$f \sim F^{\frac{1}{2}}$$

Varianten zijn er vele. Het is opmerkelijk dat het eerste meetinstrument met trillende snaren (1919, Schäfer) [4] een lengtemeter was. Wel niet met het principe van fig. 1.4, maar werkend op het principe krachtmeting. Een lengteverandering van een elastische snaar resulteert in een spankrachtverandering volgens de wet van Hooke. Deze spankrachtverandering geeft een frequentieverschuiving.

In principe dus is een snaar bruikbaar als meetinstrument, maar waarom zou een constructeur een trillende snaar nemen terwijl hij de keus heeft uit een arsenaal van andere mogelijkheden?

Wel, enkele voorwaarden waaraan een meetinstrument moet voldoen zijn: grote eigen mechanische stijfheid,

 eenvoud van systeem,

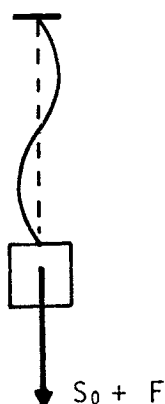
 grote nauwkeurigheid,

en aan deze eisen voldoet een snaar, op het eerste gezicht althans, zonder meer. Bovendien geeft de trillende snaar als uitgangssignaal een frequentie af en die is gemakkelijk digitaal te verwerken; een belangrijk argument nu de vraag naar digitale metingen steeds meer toeneemt.

1.2. Krachtmeting

Ik beperk me nu tot het meten van krachten; de problemen die hier optreden zijn het grootst.

1.2.1. Absolute meting



Zoals in het voorgaande al is aangegeven kan men met snaren krachten meten. De te meten kracht F wordt in het algemeen gebruikt als een extra spankracht voor de snaar, die

fig. 1.7 absolute meting

al is voorgespannen met spankracht S_0 . De totale kracht S is dus $S = S_0 + F$

De frequentie f is dan

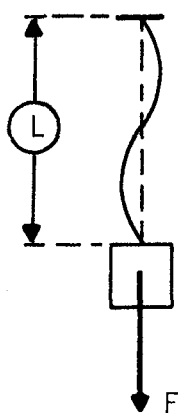
$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S_0 + F}{\mu}} \quad (1.4)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Goede krachtmeters mogen geen hinder ondervinden van andere invloeden dan krachten. De lengte en massa per lengte-eenheid moeten dus constant blijven. Vooral een constante snaarlengte geeft al vlog problemen, temperatuur en rek gooien roet in het eten.

Een absolute meting met één snaar is echter niet de enige meetmethode.

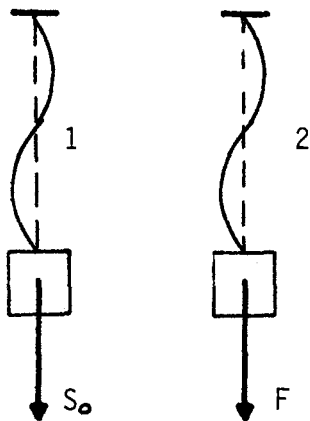
1.2.2. Absolute meting met lengtemeting



De grootste moeilijkheden zijn te verwachten van lengteveranderingen van de snaar. Welnu, meet dan die lengte en gebruik deze meting als correctieterm voor de frequentie.

fig. 1.8 Absolute meting met lengtemeting

1.2.3. Vergelijkingsmeting



Twee identieke snaren; de een belast met een (bekende) referentiekraft S_0 , de ander met de te meten kracht F , trillen onafhankelijk, de frequenties f_1 resp. f_2 zijn

fig. 1.9 Vergelijkingsmeting

$$f_1 = \frac{n}{2L_1} \sqrt{\frac{S_0}{\mu_1}} \quad \text{en} \quad f_2 = \frac{n}{2L_2} \sqrt{\frac{F}{\mu_2}}$$

zodat:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{L_1}{L_2} \sqrt{\frac{F\mu_1}{S_0\mu_2}} \approx \sqrt{\frac{F}{S_0}} \quad (1.5)$$

(bij niet al te grote temperatuurs- en belastingsverschillen geldt immers $L_1 \approx L_2$ en $\mu_1 \approx \mu_2$). De storende invloeden zijn hier voor het grootste deel geëlimineerd.

1.2.4. Gelineariseerde vergelijkingsmeting

Het kwadratisch verband tussen kracht en frequentie schijnt ook voor de industrie moeilijkheden op te leveren (zie ook deel I 4.2) Er is een opstelling van snaren mogelijk waarbij dit verband zo goed als nodig, lineair gemaakt kan worden, tevens vindt een vergelijkingsmeting plaats.

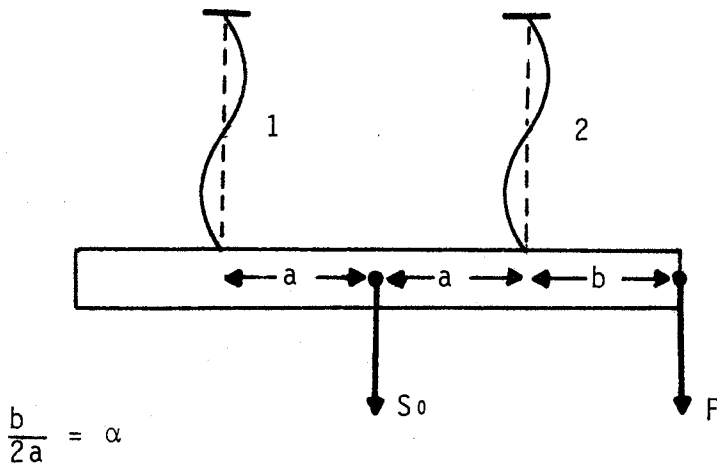


fig. 1.10 Gelineariseerde vergelijkingsmeting

Het gebruik van twee voorgespannen snaren is noodzakelijk, de te meten kracht is een extra belasting voor de ene snaar, de andere snaar wordt ontlast (zie fig. 1.10).

De spankracht van snaar 1 is: $S_1 = \frac{1}{2}S_0 - \frac{1}{2}\alpha F$

en van snaar 2 $S_2 = \frac{1}{2}S_0 + (1 + \frac{1}{2}\alpha)F$

Zijn de snaren identiek dan zijn de frequenties resp.

$$f_1 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S_0 - \alpha F}{2\mu}} \quad f_2 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S_0 + (1 + \alpha)F}{2\mu}}$$

zodat

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{S_0 + (1 + \alpha)F}{S_0 - \alpha F}} \approx 1 + \frac{1}{2}(1 + 2\alpha)\frac{F}{S_0} + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \frac{1}{4})\left(\frac{F}{S_0}\right)^2 + \tag{1.6}$$

Voor $\alpha = \frac{1}{2}$, dus $a = b$ (zie fig. 1.10), is de 2^o orde term in de reeksontwikkeling nul en geldt:

$$\frac{f_2}{f_1} \approx 1 + \frac{F}{S_0}$$

ofwel

$$\frac{f_2 - f_1}{f_1} \approx \frac{F}{S_0} \quad (1.7)$$

Een indruk van de lineariteitsafwijking geeft fig. 1.11.

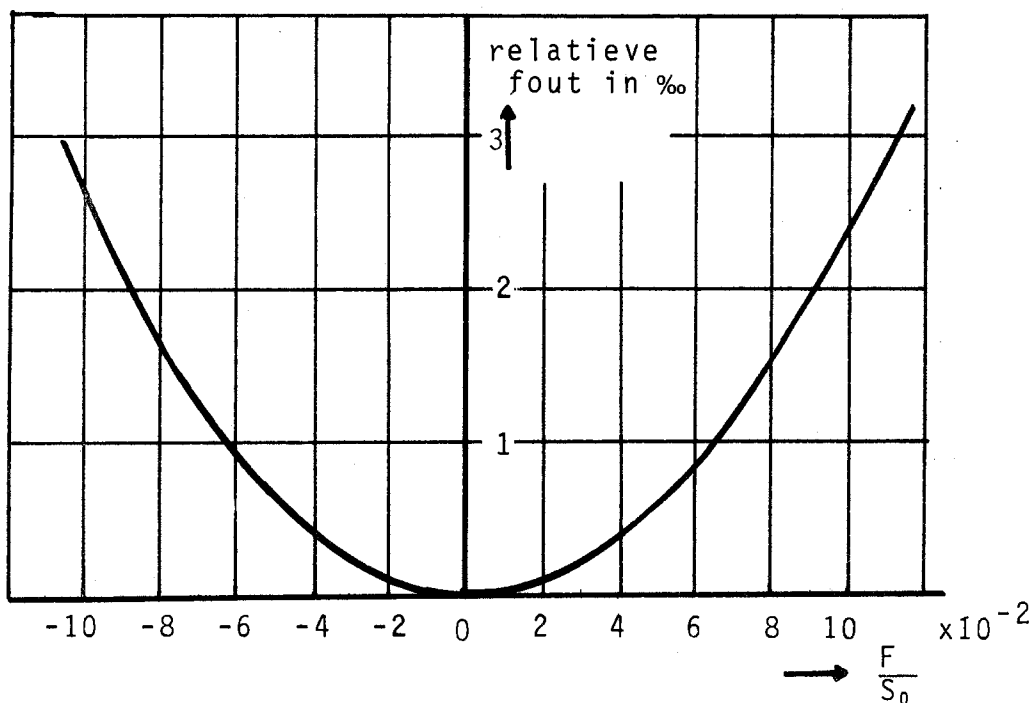
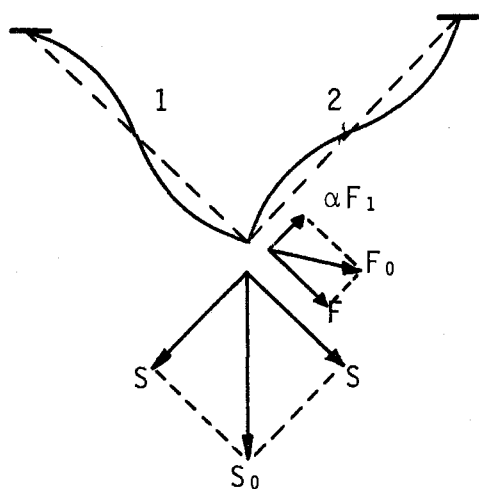


fig. 1.11 Lineariteitsafwijking bij de gelineariseerde vergelijkingsmeting

Bij alleen trekkrachten kan een betere lineariteit verkregen worden, door niet rond het nulpunt maar rond een werkpunt te ontwikkelen.

Voor een goede lineariteit is het noodzakelijk de verhouding $\frac{F}{S}$ klein te houden; fouten kleiner dan 1% betekent $\frac{F}{S}$ kleiner dan 0.06 (fig. 1.11). Bij kleine $\frac{F}{S}$ zijn echter de frequentieveranderingen klein en daardoor moeilijker te meten. De conclusie moet dus zijn dat lineariseren de nauwkeurigheid van de metingen terugbrengt.

De gelineariseerde vergelijkingsmeting wordt ook toegepast door Berkel [5], zie fig. 1.12.



$$\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\frac{f_1 - f_2}{f_2} \approx \frac{2}{3} \frac{F}{S}$$

fig. 1.12 Methode Berkel

1.2.5. Compensatiemeting

Lengteveranderingen van de snaar zijn niet alleen te wijten aan temperatuurinvloeden, maar ook aan rek van de snaar door veranderlijke belastingskrachten.

Bij de compensatiemethode zorgt een extra-kracht ervoor dat de frequentie van de snaar constant blijft, dus de spankracht van de snaar blijft constant. De extra-kracht is dan gelijk aan de te meten kracht. Gebruikt men een electromagneetsysteem (zoals luidspreker) om de extra-kracht aan te brengen, dan is de stroom door de spoel evenredig met de te meten kracht.

Temperatuurinvloeden kan men weer elimineren door een tweede identieke snaar te nemen met een constante spankracht en deze als frequentiestandaard te gebruiken.

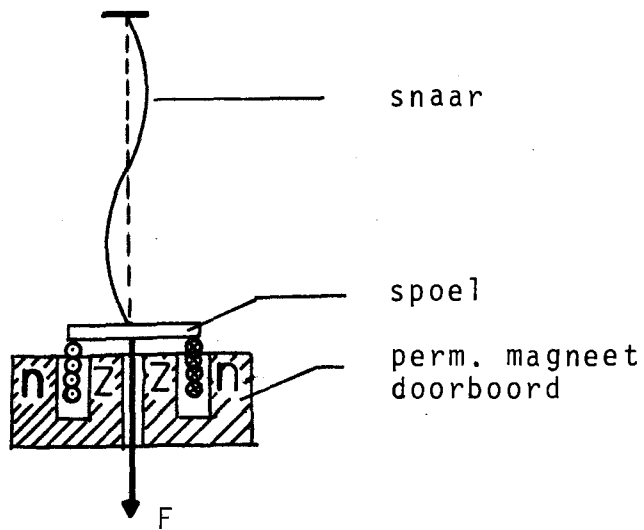


fig. 1.13 Compensatiemeting, voorbeeld

Ook hier zijn veel variaties mogelijk; andere meetmethoden moeten niet uitgesloten worden.

2. Inklemming van een snaar

Staande golven in snaren zijn pas mogelijk als er randvoorwaarden zijn, uiteinden van de snaar die de transversale bewegingen reflecteren. De beste randvoorwaarden zijn: twee punten waar de uitwijking van de snaar nul is. (frequentie-onafhankelijk).

De uitwijking van de snaar kan tot nul gedwongen worden op verschillende manieren:

1. vast: de snaar vastgeknoopt tussen twee muren, over kammen of messen zoals bij muziekinstrumenten. Niet alleen transversale, maar ook longitudinale bewegingen zijn onmogelijk in de eindpunten.
2. glijdend: de snaar over een katrol, door een dun gat laten lopen. Alleen de transversale beweging is uitgesloten in de eindpunten.
3. massa: de snaar vastknopen aan grote massa en vrij laten hangen. De traagheid van de massa zorgt voor een vast uiteinde.

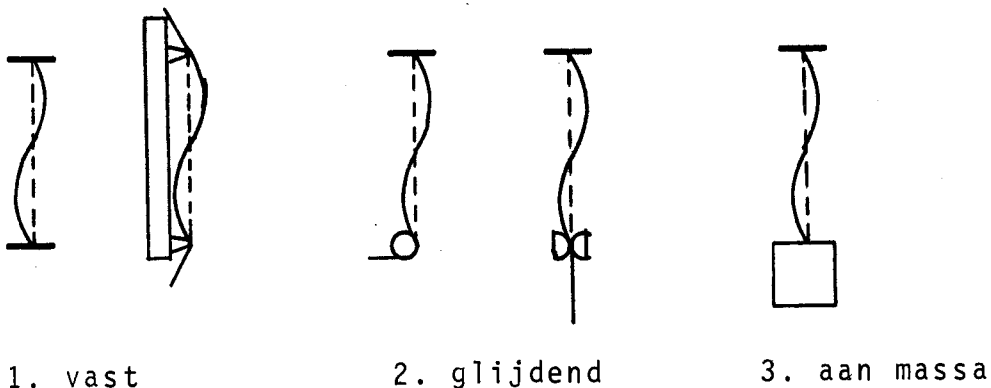
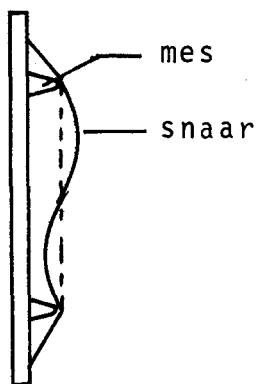


fig. 1.14

Deze drie inklemmingen hebben onderling grote verschillende temperatuurinvloeden.

2.1. Vaste inklemming



Voordeel: inklemlengte wordt bepaald door de grondplaat

Nadeel: de spankracht kan alleen aangebracht worden als de snaar vrij van de messen is.

fig. 1.15 Vaste inklemming

Temperatuurinvloed:

Veronderstel een gelijke temperatuur voor snaar en grondplaat. Voor het inspannen heeft de snaar een lengte

$$l_T = l_0(1 + \alpha_1 T)$$

waarbij α_1 de lineaire uitzettingscoëfficiënt van de snaar is. De massa per lengte-eenheid bedraagt dan

$$\mu_T = \mu_0 (1 + \alpha_1 T)^{-1}$$

De snaar wordt ingespannen over een lengte

$$L_T = L_0(1 + \alpha_2 T)$$

α_2 is de lineaire uitzettingscoëfficiënt van de grondplaat.

De frequentie waarop de snaar trilt is

$$f_T = f_0 \sqrt{\frac{1 + \alpha_1 T}{(1 + \alpha_2 T)^2}} \approx f_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_2 \right) T \right\} \quad (1.8)$$

Dit lijkt een zeer gunstig resultaat; immers als $\alpha_1 = 2\alpha_2$, dan verloopt de frequentie bijna niet. Edoch, verandert de temperatuur na het inklemmen dan wordt de berekening:

bij temperatuur T is de ongerekt lengte van de snaar $l_{0,T}$

bij $T + \Delta T$ wordt dit $l_{0,T + \Delta T} = l_{0,T} (1 + \alpha_1 \Delta T)$

de inspanlengte bedraagt $L_{T + \Delta T} = L_T (1 + \alpha_2 \Delta T)$

Volgens de wet van Hooke hoort bij deze lengtes een spankracht S .

$$S = E0 \frac{L_{T + \Delta T} - l_{0,T + \Delta T}}{l_{0,T + \Delta T}} \approx S_T \left\{ 1 - \frac{E0}{S_T} (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T \right\}$$

De frequentie is

$$f_{T + \Delta T} \approx f_T \left(1 - \frac{E0}{2S_T} (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T - \frac{1}{2} \alpha_2 \Delta T \right) \quad (1.9)$$

De factor $\frac{E0}{S_T}$ is groot, ca. 1000, de temperatuurinvloed is dus ook erg groot, tenzij men besluit $\alpha_1 \approx \alpha_2$ te kiezen. Maar ook dan loopt de zaak stuk en wel op het feit dat de snaar na inklemmen een temperatuursverschil ΔT kan hebben t.o.v. de grondplaat. Voor de frequentie geldt dan namelijk:

$$f_{\Delta T} \approx f_T \left(1 - \frac{E0}{2S_T} \alpha_1 \Delta T \right) \quad (1.10)$$

weer een aanzienlijke frequentieverschuiving.

Telkens is er een grote temperatuurinvloed, de opstelling lijkt zeer bruikbaar als digitale thermometer.

2.2. Glijdende inklemming



Voordeel: inklemlengte wordt bepaald door de grondplaat spankracht gemakkelijk aan te brengen.

Nadeel: mogelijk wrijving in glijlager.

fig. 1.16 Glijdende inklemming

Temperatuurinvloed:

Bij gelijke temperatuur T voor snaar en grondplaat is de inklemlengte:

$$L_T = L_0(1 + \alpha_2 T)$$

De massa per lengte-eenheid

$$\mu_T = \mu_0(1 + \alpha_1 T)^{-1}$$

α_1 en α_2 zijn weer de lineaire uitzettingscoëfficiënten van snaar resp. grondplaat.

De frequentie bij temperatuur T is

$$f_T \approx f_0 \{1 + (\frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2) T\} \tag{1.11}$$

Kies $\alpha_1 = 2\alpha_2$ dan is alleen het temperatuurverschil ΔT van snaar en grondplaat van belang.

$$f_{\Delta T} \approx f_0(1 + \frac{1}{2}\alpha_1 \Delta T) \tag{1.12}$$

2.3. Massa-inklemming



Voordeel: Kracht gemakkelijk aan te brengen
slechts één temperatuur van belang

Nadeel: kans op slingeren van de massa.

fig. 1.17 Massa-inklemming

Temperatuurinvloed:

Bij temperatuur T is de inklemlengte


$$L_T = L_0(1 + \alpha T)$$

zodat de frequentie

$$f_T \approx f_0(1 - \frac{1}{2}\alpha T) \tag{1.13}$$

bedraagt.

2.4. Overzicht

Inklemming type	vast	glij	massa
Aanbrengen meetkracht	moeilijk	kans op wrijving	gemakkelijk
Realisatie	gemakkelijk	moeilijk	gemakkelijk
Rel. frequentieverandering per °C bij omgevingstemperatuur	vóór inklemmen: $(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_2)$ na inklemmen: $-\frac{E0}{2S}(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_2$	$-\frac{1}{2}\alpha$
Bij temp.verschil snaar/grondplaat	$-\frac{E0}{2S}\alpha_1$	$\frac{\alpha_1}{2}$	
Compensatie mogelijkheid	slecht	goed	goed
Conclusie	te verwerpen	beste opstelling maar moeilijk te realiseren	voor eenvoudig gebruik uitstekend

Conclusie:

Het eenvoudigste, goed werkend, meetsysteem is een loshangende snaar in een thermostaat. Een enigszins teleurstellend resultaat gezien de andere elegantere meetsystemen, zoals de gelineariseerde opstelling.

3. Aandrijving en detectie van de snaar

Na al deze algemene beschouwingen over het meten met trillende snaren wordt het tijd te bekijken waarom de snaar trilt. Verder is het meten van frequenties wel zo gemakkelijk als de trilling van de snaar omgezet is in een elektrisch signaal; hoe vindt deze omzetting plaats?

Aandrijving en detectie van de snaartrillingen zijn noodzakelijk om het einddoel te bereiken: een snaar-oscillator [6].

3.1. Aandrijving

Dempingskrachten zijn verantwoordelijk voor het afnemen van de trillingsamplitude. Een gespannen snaar zal niet zo maar trillen; om de eigenfrequentie van de snaartrilling te achterhalen moeten trillingen opgewekt worden. De keuze bestaat dan uit tokkelen en laten uittrillen, of een continue trilling opwekken. Voor een continue trilling moeten er periodieke krachten op de snaar werken die de dempingskrachten opheffen. Dit kan gebeuren door magnetische, akoestische of Lorentzkrachten. Vanwege de eenvoud heb ik voor het laatste gekozen; de snaar is opgesteld in een permanent magneetveld en door de snaar loopt een wisselstroom. Heeft de wisselstroom dezelfde frequentie als de eigenfrequentie van de snaar dan kunnen de Lorentzkrachten dempingskrachten opheffen. De snaar trilt dan in een vlak loodrecht op het magneetveld.

3.2. Detectie

De omzetting van snaartrillingen in een elektrisch signaal is ook op verschillende manieren te realiseren. Inductieve -,

akoestische- en lichtopnemers zijn reeds beproefd. Ik heb echter gebruik gemaakt van de inductiespanning die een snaar trillend in een magneetveld opwekt. Deze inductiespanning is evenredig met de snelheid van de snaar net zoals de dempingskrachten dit zijn.

3.3. Snaar-brug

Het elektrisch schema voor aandrijving en detectie is voor mijn snaar zoals fig. 1.18. [7]

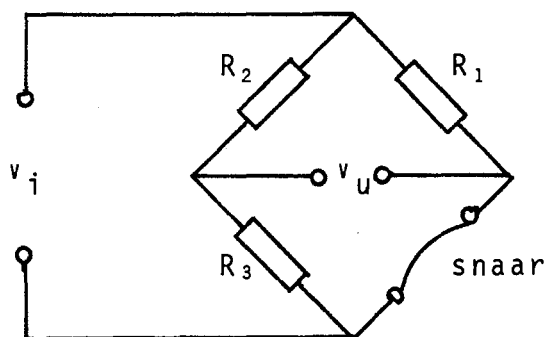


fig. 1.18 Snaarbrug

Een snaar-oscillator bestaat uit deze brug met tussen in- en uitgangsklemmen een verschilversterker, aangevuld met een begrenzing om de trillingsamplitude te beperken. [8]

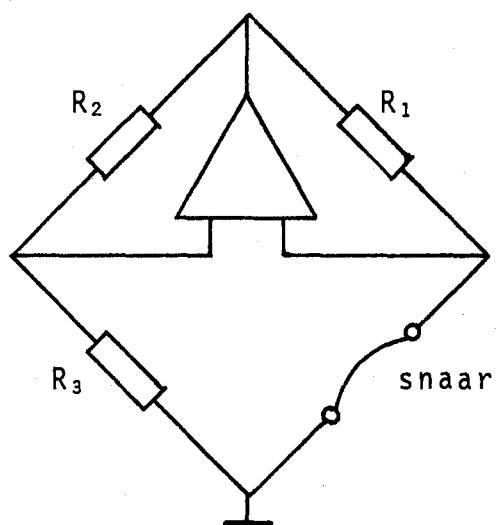


fig. 1.19 Snaaroscillator

4. Frequentie meten

De verwerking van het uitgangssignaal van de snaar is ook van belang voor de nauwkeurigheid. Een frequentiemeting is bekend terrein voor de technicus. Vaak vergeet hij echter de onnauwkeurigheid van zo'n meting. Periodemeting en frequentietellen hebben elk hun voor- en nadelen, voor snaren met hoge frequenties kan het beste geteld worden. Ook behoort dan een eenvoudige schakeling voor het kwadrateren van de frequentie tot de mogelijkheden.

4.1. Frequentiemeting

Van een periodiek electrisch signaal de frequentie bepalen is een koud kunstje. Een teller telt het aantal nuldoorgangen van het signaal in een vaste bepaalde tijd en levert zo een maat voor de frequentie. De onnauwkeurigheid van een teller bedraagt meestal één eenheid van de laatste decimaal. Een periodemeter telt het aantal nuldoorgangen van een klokfrequentie gedurende de tijd tussen de twee nuldoorgangen van het signaal. De onnauwkeurigheid hangt hier grotendeels af van de juiste reactie op de nuldoorgang van het signaal.

Welke meting de voorkeur heeft hangt af van de apparatuur die men heeft en van de frequentie die gemeten moet worden. Ruw gezegd: frequenties groter dan 10 kHz tellen, beneden 1 kHz periode meten.

Bij de snaren die ik gebruik horen frequenties van 3 tot 15 kHz, ik heb een voorkeur voor tellen.

4.2. Kwadrateren

Het verband tussen frequentie en spankracht is kwadratisch bij snaren en dit levert moeilijkheden op (zie deel I, 1.2.4.) Maar waarom zou men niet electronisch de gemeten frequentie kwadrateren? Met de tegenwoordige electronische calculatoren levert dat geen moeilijkheid op.

Een zeer eenvoudige kwadrateur verkrijgt men door uit te gaan van de relatie:

$$n^2 = 2 \sum_{m=1}^n m - n \tag{1.14}$$

De frequentieteller kan door uitbreiding met een opteller en een register deze som gemakkelijk berekenen.

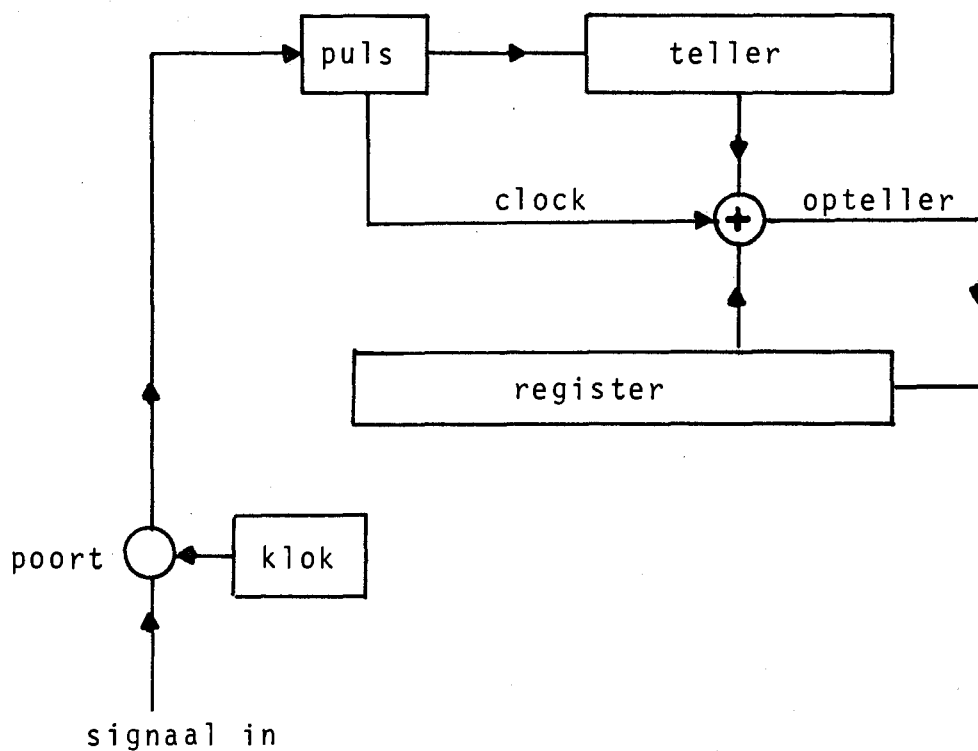


fig. 1.20 Kwadratenteller

Een periodiek signaal wordt omgezet in pulsen zolang de poort, gestuurd door een klok, dat toelaat. Elke puls representeert b.v. een nuldoorgang van het signaal. Deze pulsen worden geteld in een teller. Tot zover dus een gewone frequentieteller.

Na elke telpuls wordt er ook een clockpuls opgewekt die de opteller stuurt. Bij elke clockpuls telt de opteller het getal wat in de teller staat op bij het getal in het register.

Als de poort dichtgaat staat er in het register een getal evenredig aan het kwadraat van de frequentie. (Voor een gunstigere nauwkeurigheid kan het aftrekken van n in (1.14) beter achterwege gelaten worden.)

deel 2

theorie
van
de
trillende
snaar

D E E L II

=====

THEORIE VAN DE TRILLENDE SNAAR

Samenvatting

Een eenvoudig mathematisch model van de transversaal trillende snaar is de "mathematische snaar". Met dit model komt men gemakkelijk tot een electricch vervangingsschema voor een stroomvoerende snaar trillend in een magneetveld.

Uitbreiding van het model tot een "fysische snaar" levert een eigenfrequentie op die verschilt van die van de mathematische snaar; het frequentieverschil volgt uit een benaderingsmethode, de invloed van dikte en vorm van de doorsnede van de snaar worden bekeken.

1. De mathematische snaar

Een goed model voor transversale trillingen is te verkrijgen door van de snaar te eisen dat:

- de snaar homogeen van samenstelling is en lijnvormig;
- zij niet kan rekken, maar toch
- volkomen buigzaam is;
- de spankracht constant is over de lengte, maar toch
- geen longitudinale beweging optreedt;
- er slechts zeer kleine uitwijkingen voorkomen,
- die langs de snaar niet snel mogen veranderen;
- er geen massa-traagheid is voor kantelen.

Een snaar die aan deze eisen voldoet noem ik een mathematische snaar.

De verschillende eisen zijn onderling tegenstrijdig, maar dat blijkt niet zo belangrijk te zijn voor het frequentiegedrag, dat nauw aansluit bij de werkelijkheid.

1.1. De eigenfrequentie van de mathematische snaar |9|

Transversale trillingen in mathematische snaren worden beschreven door de differentiaalvergelijking (2-dimensionaal)

$$\mu U_{tt} = S U_{xx} \quad (2.1)$$

μ = massa per lengte-eenheid

S = spankracht

De snaar ligt langs de x-as, loodrecht hierop zijn uitwijkingen $U(x,t)$ mogelijk.

In de punten $x = 0$ en $x = L$ is de snaar vastgeklemd; de randvoorwaarden zijn dus

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

De staande golfoplossingen van (2.1) zijn

$$U(x,t) = (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \sin \omega t \quad (2.2)$$

C_1 en C_2 constantes

samen met de randvoorwaarden blijft over

$$U(x,t) = A \sin kx \sin \omega t \quad (2.3)$$

met

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A = amplitude van de trilling.

Het golfgetal k en de eigenfrequentie ω zijn niet willekeurig, maar voldoen aan de dispersie-relatie.

$$\omega^2 = \frac{S}{\mu} k^2 \quad (2.4)$$

Invullen van k geeft de eigenfrequentie van de mathematische snaar:

$$\omega_0^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \frac{S}{\mu} \quad (2.5)$$

De frequentie is dan ($\omega = 2\pi f$)

$$f_0 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

Een bekende formule die ik al in deel I gebruikt heb.

Ondervindt de snaar ook nog een dempingskracht, dan kan deze kracht opgenomen worden in (2.1).

Als de dempingskracht evenredig is met de snelheid van de snaar, evenredigheidsconstante D , dan

$$\mu U_{tt} = S U_{xx} - D U_t \quad (2.7)$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

De oplossing is nu

$$U(x,t) = A e^{-\Lambda t} \sin \omega t \sin kx \quad (2.8)$$

waarbij

$$\Lambda = \frac{D}{2\mu} \quad (2.9)$$

De frequentie ω is nu

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \Lambda^2 \quad (2.10)$$

ω_0 is de frequentie van de ongedempte trilling.

Conclusie: Damping verlaagt de eigenfrequentie.

1.2 Gedwongen trillingen van de mathematische snaar

Werkt er op de snaar een periodieke aandrijfkracht per lengte-eenheid $F(x,t)$, dan wordt (2.7) aangevuld tot

$$\mu U_{tt} = S U_{xx} - D U_t + F(x,t) \quad (2.11)$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

Voor het geval $F(x,t) = F_0 \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \omega t$, m geheel, is de particuliere oplossing van (2.11) (lang genoeg wachten tot de homogene oplossing is uitgetrild)

$$U(x,t) = A \sin \frac{m\pi}{L} x \sin (\omega t - \phi) \quad (2.12)$$

Amplitude A en fase ϕ zijn als functie van de frequentie af te lezen uit de resonantiekromme in fig. 2.1.

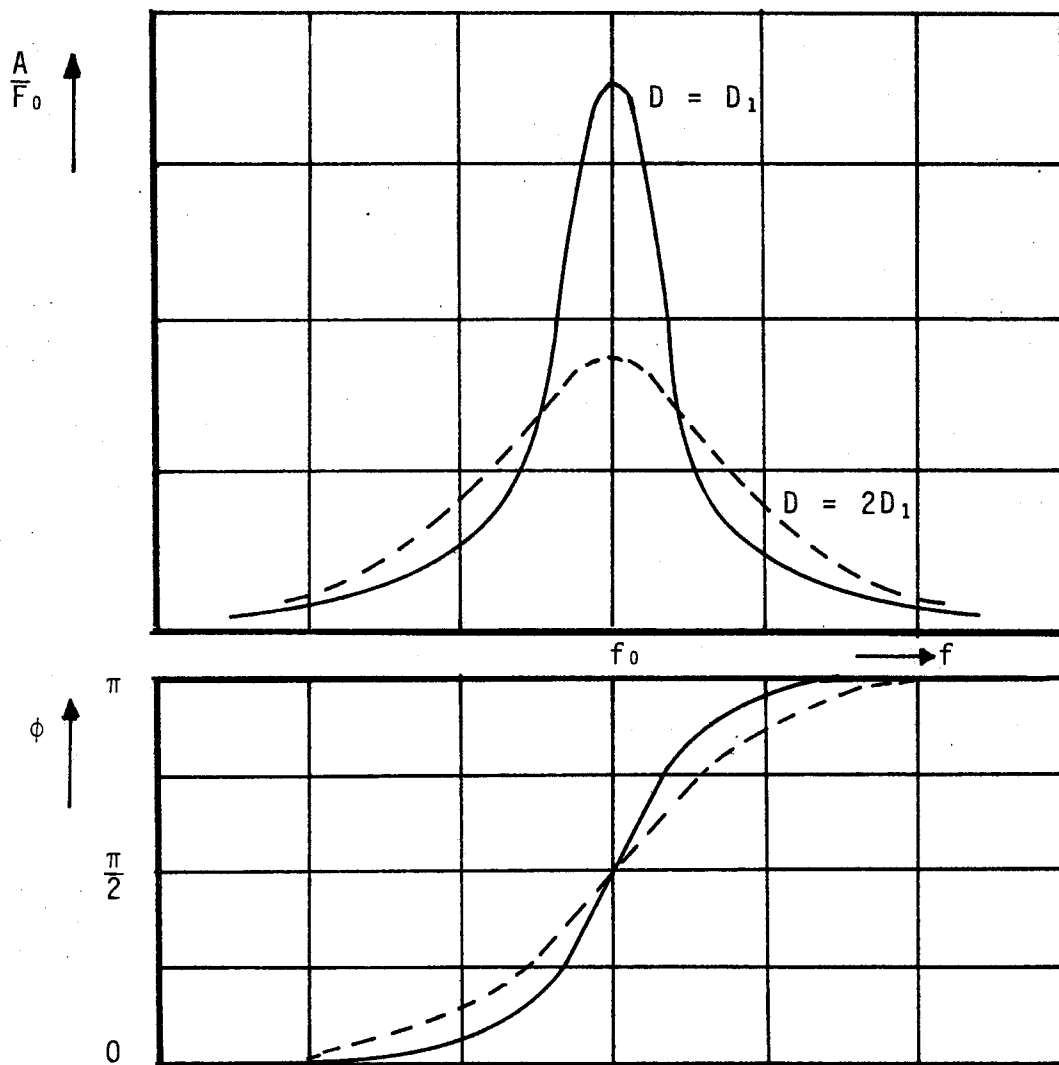


fig. 2.1 Resonantiekromme

Een goede maat voor de vorm van de resonantiekromme is de kwaliteitsfactor Q

$$Q = \frac{\omega \mu}{D} = \frac{\omega}{2\lambda} \tag{2.13}$$

De breedte van de resonantiekromme op $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ van de top gemeten bedraagt ongeveer $\frac{\omega_0}{Q}$.

Conclusie: een aandrijving als beschreven levert een optimale resonantiefrequentie op, gelijk aan de eigenfrequentie van de vrije ongedempte trilling.

1.3 Naïeve theorie, impedantie van de snaar

In deel I is de aandrijving en detectie van de snaar belicht; door de snaar loopt een stroom $i(t)$, de Lorentzkracht F_L per lengte-eenheid bedraagt

$$F_L = B(x) i(t) \quad (2.14)$$

als het magneetveld een magnetische inductie $B(x)$ heeft.

(2.1) wordt dan

$$\mu U_{tt} = S U_{xx} - D U_t + B(x) i(t) \quad (2.15)$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

De trillende snaar wekt in een magneetveld een inductiespanning op, over de eindpunten staat dan een spanningsverschil v

$$v = - \left\{ \int_0^L B(x) U(x,t) dx \right\}_t \quad (2.16)$$

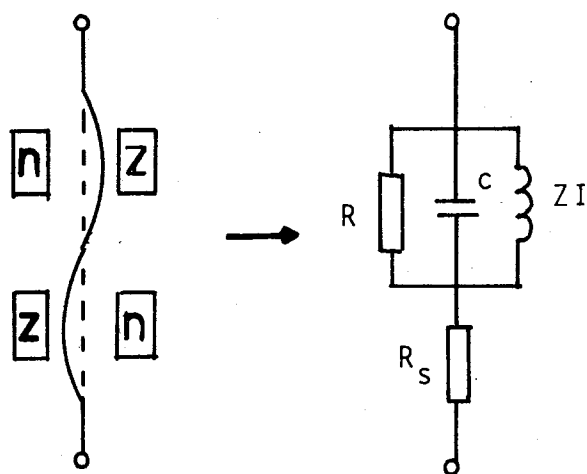
Het is niet nodig (2.15) op te lossen; vermenigvuldig (2.15) met $B(x)$, integreer over de lengte van de snaar, differentieer naar de tijd en neem $B(x) = B_0 \sin \frac{m\pi}{L} x$ met m geheel, dan

$$\mu v_{tt} + D v_t + S \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 v = \frac{1}{2} B_0^2 i_t \quad (2.17)$$

Dit is een vergelijking tussen stroom en spanning, de elektrische impedantie van de snaar is dus

$$Z = \frac{v}{i} = \frac{\frac{1}{2} B_0^2 L}{S \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \mu \omega^2 + j \omega D} \quad (2.18)$$

Dezelfde impedantie heeft een parallel schakeling van een zelf-inductie ZI , capaciteit C en weerstand R .



$$ZI = \frac{B_0^2 L^3}{2m^2 \pi^2 S}$$

$$C = \frac{2\mu}{B_0^2 L} \quad (2.19)$$

$$R = \frac{B_0^2 L}{2D}$$

R_S = gelijkstroomweerstand van de snaar

fig. 2.2 Vervangingschema

Bij mijn snaren

$$ZI \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ H}, \quad C \approx 4 \text{ F}, \quad R \approx 10^{-2} \Omega, \quad R_S \approx 5 \Omega \quad !$$

Let wel: dit is geen electrisch analogon, maar een vervangingschema!

2. De fysische snaar

Onder een fysische snaar versta ik een snaar die voldoet aan alle eisen voor een mathematische snaar, uitgezonderd de eis van volkomen buigzaamheid.

Uit een momentenberekening [10] volgt dat vrije, ongedempte, transversale trillingen van een fysische snaar voldoen aan (2-dimensionaal)

$$\mu U_{tt} = -EI U_{xxxx} + SU_{xx} \tag{2.20}$$

E = elasticiteitsmodulus

I = oppervlakte traagheidsmoment van de doorsnede

De snaar ligt langs de x-as, nu is het handiger de oorsprong in het midden van de snaar te leggen.

Als randvoorwaarden kies ik

$$U(-\frac{L}{2}, t) = U(\frac{L}{2}, t) = 0$$

$$U_x(-\frac{L}{2}, t) = U_x(\frac{L}{2}, t) = 0$$

De oplossingen van (2.20) kunnen gescheiden worden in symmetrische

$$U^s(x, t) = (C_1 \cos kx + C_2 \cosh \lambda x) \sin \omega t \tag{2.21}$$

en asymmetrische

$$U^a(x, t) = (C_3 \sin kx + C_4 \sinh \lambda x) \sin \omega t \tag{2.22}$$

C₁, C₂, C₃ en C₄ constant

Verder geldt

$$\lambda^2 - k^2 = \frac{S}{EI} \quad (2.23)$$

en

$$\lambda \cdot k = \omega \sqrt{\frac{\mu}{EI}} \quad (2.24)$$

Uit de randvoorwaarden volgt nog

$$\text{symm.}: \quad \tan \frac{kL}{2} = -\frac{\lambda}{k} \tanh \frac{\lambda L}{2} \quad (2.25)$$

$$\text{asymm.}: \quad \tan \frac{kL}{2} = \frac{k}{\lambda} \tanh \frac{\lambda L}{2} \quad (2.26)$$

De eigenfrequentie volgt na oplossen van de drie vergelijkingen (2.23), (2.24) en (2.25) resp. (2.26). Analytisch oplossen is echter niet mogelijk.

De staande golven die in de snaar optreden zijn geschetst in fig. 2.3.

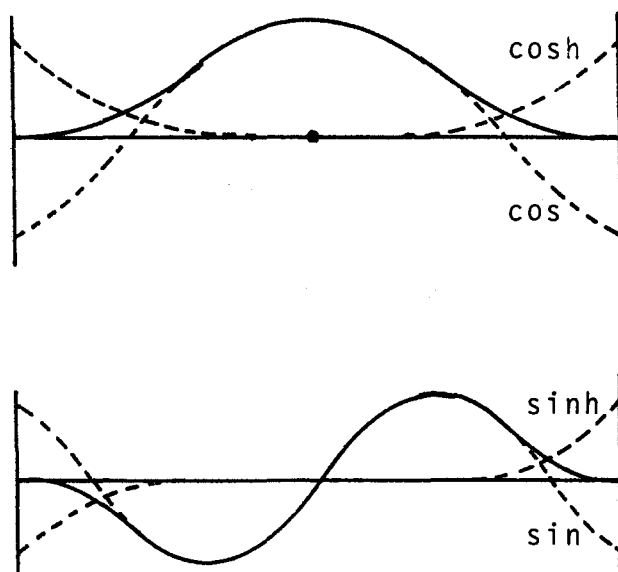


fig. 2.3 Golfvorm van de fysische snaar

3. Fysische snaar, benaderd

3.1 Ontwikkeling van de randvoorwaarde

De oplossing van (2.20) kan benaderd worden [11] als de factor $\frac{EI}{L^2}$ klein is ten opzichte van S ; in dat geval is namelijk $\frac{\lambda L}{2}$ zeer groot, zodat in (2.25) resp. (2.26)

$\tanh \frac{\lambda L}{2} \approx 1$ gesteld mag worden, tevens is dan $k \approx n\pi$.

In de eerste ordebenadering vindt men dan uit (2.23), (2.24) en (2.25) resp. (2.26) voor de eigenfrequentie van de fysische snaar:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{2}{L} \sqrt{\frac{EI}{S}} \right) \quad (2.27)$$

ofwel

$$\omega \approx \omega_0 + \frac{4n\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (2.28)$$

De eigenfrequentie van een fysische snaar is met een constant bedrag verhoog t.o.v. de eigenfrequentie van de mathematische snaar (in eerste benadering).

3.2 Doorknipmethode

Een mathematisch elegantere methode om (2.20) op te lossen vindt men door de snaar vlak voor de eindpunten door te knippen. In het midden van de snaar neemt men een mathematisch-snaargedrag, in de eindpunten een buiggedrag.

Netter geformuleerd:

In de vergelijking (2.20) met andere randvoorwaarden

$$\mu U_{tt} = -EI U_{xxxx} + S U_{xx}$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

$$U_x(0,t) = U_x(L,t) = 0$$

veronderstelt men $\frac{EI}{SL^2}$ klein.

In het middenstuk, dus rond $x = \frac{L}{2}$ geldt

$$\mu U_{tt} = S U_{xx}$$

met symm. oplossing $U(x,t) = A \cos k(x - \frac{L}{2}) \sin \omega t$

$$\text{en } k^2 = \frac{\mu \omega^2}{S}$$

Aan de randen mag men de term EI niet verwaarlozen, stel daar $x = \epsilon \xi$ met $\epsilon^2 = \frac{EI}{SL^2}$

Als oplossing neemt men hier

$$U(x,t) = \{A \cos k(x - \frac{L}{2}) + g(x)\} \sin \omega t \quad (2.29)$$

dit geeft de differentiaalvergelijking

$$L^2 g_{\xi\xi\xi\xi} - g_{\xi\xi} = 0 \quad (2.30)$$

met randvoorwaarden $g(0) = -A \cos k \frac{L}{2}$

$$g_{\xi}(0) = -\epsilon k A \sin k \frac{L}{2}$$

$$\text{en } \lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = 0$$

Dit alles resulteert in een voorwaarde voor k

$$\tan \frac{kL}{2} = -\frac{1}{\epsilon k L} \quad (2.31)$$

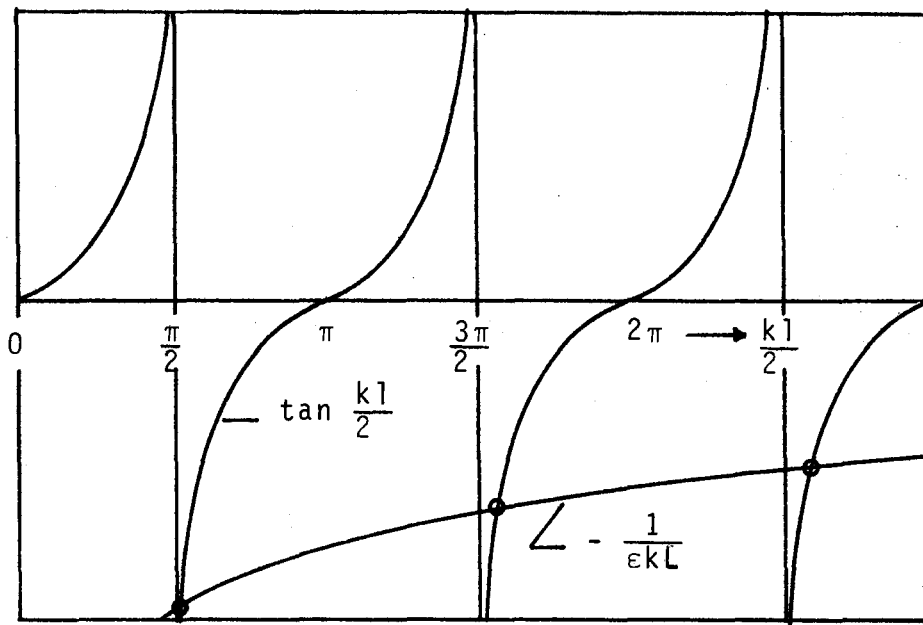


fig. 2.4 Golfgetal fysische snaar

Dit benaderen leidt tot een eigenfrequentie

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{2}{L} \sqrt{\frac{EI}{S}} \right)$$

dezelfde vergelijking als (2.27)

3.2 De eigenfrequentie van de fysische snaar

De fysische snaar heeft een eigenfrequentie (2.27)

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{2}{L} \sqrt{\frac{EI}{S}} \right)$$

ofwel

$$f \approx f_0 + \frac{2n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = f_0 + \Delta f \tag{2.32}$$

De vorm van de doorsnede heeft grote invloed op Δf . Een bandje geeft een kleiner effect dan een ronde snaar, zie fig 2.5.

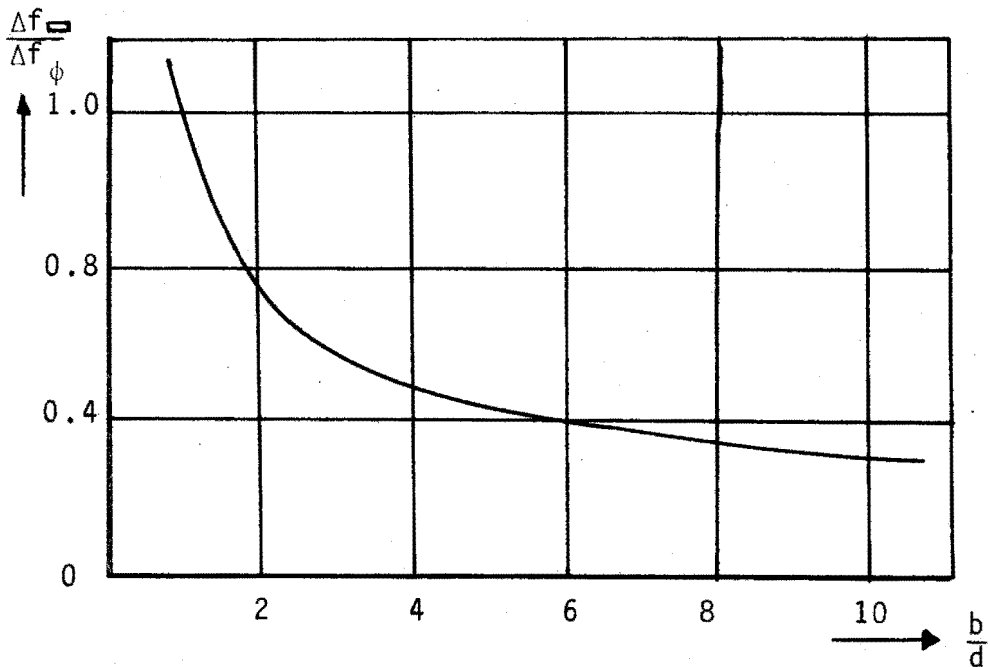


fig. 2.5 Frequentiecorrectie verhouding van bandje en ronde snaar, met gelijk oppervlak van de doorsnede, als functie van $\frac{b}{d}$: breedte : dikte van bandje.

In fig. 2.6 is Δf uitgezet als functie van de lengte voor een ronde stalen snaar.

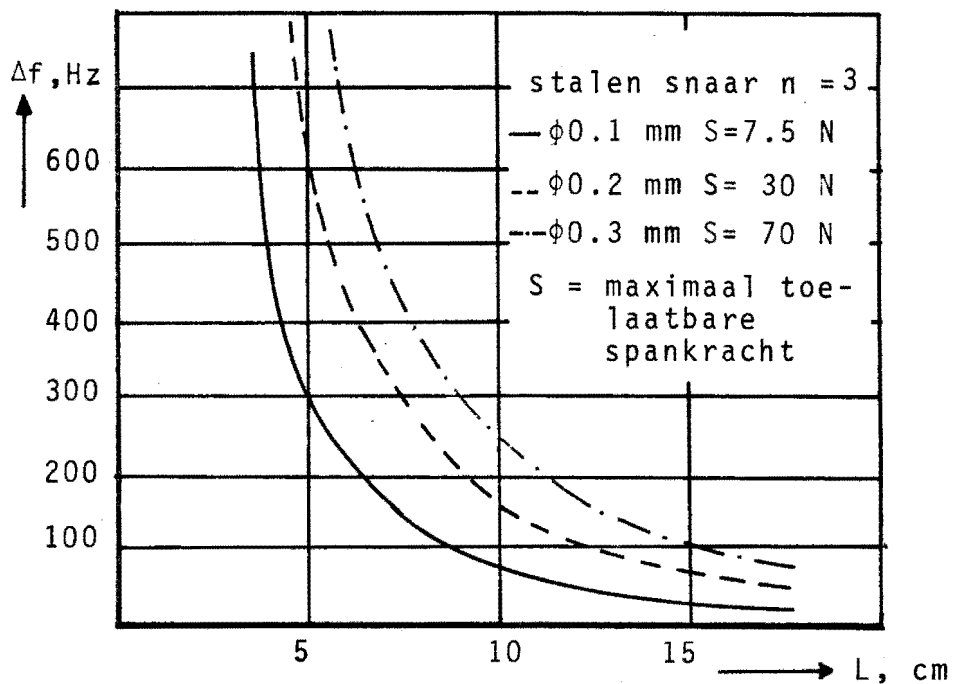


fig. 2.6 Correctieterm ten gevolge van buiging

Conclusie

In eerste benadering heeft de buigstijfheid van de snaar tot gevolg dat de eigenfrequentie een constant bedrag groter is dan de eigenfrequentie van de mathematische snaar.

deel 3

uitbreiding
van
de
theorie

D E E L III
=====

UITBREIDING VAN DE THEORIE

Samenvatting

De opzet van dit deel is de mathematische snaar theorie uit te bouwen zodat alle storende invloeden op het gedrag als mathematische snaar afgeschat kunnen worden. Belangrijk is de theorie die de amplitude van de trilling in rekening brengt voor een elastische snaar.

Verder hebben ook de randvoorwaarden een invloed; het effect van een meebewegende inklemming wordt bekeken. De vorm van het magneetveld blijkt niet kritisch te zijn.

Tot slot nog enige aandacht voor de dempingsmechanismen.

1. Amplitude

Het model mathematische snaar is ontoereikend om een elastische snaar door te rekenen, immers een mathematische snaar kan niet rekken. Een betere aanpak [12] zal ik proberen te schetsen.

1.1 Geavanceerde snaartheorie

Heel algemeen is een vergelijking voor een volkomen buigzame snaar af te leiden zonder dat er al te veel restricties gemaakt hoeven te worden.

Elk punt van de snaar wordt aangegeven door de variabele m , de massa van de snaar tussen het betreffende punt en een referentiepunt op de snaar. De plaats van een punt van de snaar is gegeven door de plaatsvector $\underline{r}(m,t)$.

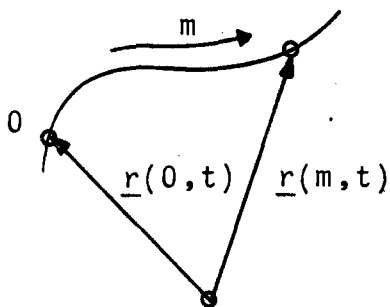


fig. 3.1 Plaatsvector

De kinetische energie T van de snaar is dan

$$T = \int_0^M \frac{1}{2} (\underline{r}_t \cdot \underline{r}_t) dm \quad (3.1)$$

$m = 0$ representeert dan het ene uiteinde van de snaar,

$m = M$ het ander, de totale massa van de snaar is dus M .

De potentiële energie is de opgeslagen deformatie energie. De lengte van een stukje snaar met massa Δm bedraagt $\frac{ds}{dm} \Delta m$;

s is de lengte van het stuk snaar tussen het punt m en m = 0. Noem $\frac{ds}{dm} = l$ de specifieke lengte. De ongerekte specifieke lengte van de snaar noem ik l_0 . Met behulp van de wet van Hooke volgt dan voor de potentiële energie V

$$V = \int_0^M \frac{1}{2} \frac{EO}{l_0} (l - l_0)^2 dm \quad (3.2)$$

De Lagrangiaan van het trillingsprobleem is

$$L = \int_0^M \left\{ \frac{1}{2} (\underline{r}_t \cdot \underline{r}_t) - \frac{1}{2} \frac{EO}{l_0} (l - l_0)^2 \right\} dm \quad (3.3)$$

Belangrijk is de vergelijking

$$\underline{r}_m \cdot \underline{r}_m = l^2 \quad (3.4)$$

Het variatieprincipe toepassen levert de differentiaalvergelijking

$$\underline{r}_{tt} = \left\{ \frac{1}{l} \frac{EO}{l_0} (l - l_0) \underline{r}_m \right\}_m \quad (3.5)$$

Voor een vlakke golf in het x-y-vlak, $\underline{r} = (x, y)$, moet men voldoen aan

$$x_{tt} = \left\{ \frac{1}{l} \frac{EO}{l_0} (l - l_0) x_m \right\}_m \quad (3.6)$$

$$y_{tt} = \left\{ \frac{1}{l} \frac{EO}{l_0} (l - l_0) y_m \right\}_m \quad (3.7)$$

$$\text{en } x_m^2 + y_m^2 = l^2 \quad (3.8)$$

1.2 Small slope approximation

Het ligt voor de hand om te kiezen voor

$$x_m = l \cos \phi \quad \text{en } y_m = l \sin \phi$$

als (3.6), (3.7) en (3.8) opgelost moeten worden.

Na enig rekenwerk houdt men twee vergelijkingen over.

$$\gamma_{tt} - \gamma \phi_t^2 = \frac{EO}{T_0} \gamma_{mm} - \frac{EO}{T_0} (1 - \gamma_0) \phi_m^2 \quad (3.9)$$

$$2\gamma_t \phi_t + \gamma \phi_{tt} = 2 \frac{EO}{T_0} \gamma_m \phi_m + \frac{EO}{T_0} (1 - \gamma_0) \phi_{mm} \quad (3.10)$$

Als randvoorwaarden nemen we

$$\phi = \phi_0 \quad \text{als } m = 0$$

$$\phi = -\phi_0 \quad \text{als } m = M$$

Ligt de snaar langs de x-as en blijven de uitwijkingen van de trilling klein, dan kunnen ϕ en γ ontwikkeld worden in (ϵ klein)

$$\phi = \epsilon \psi + \epsilon^3 \theta + \dots \quad (3.11)$$

$$\gamma = \lambda + \epsilon^2 \eta + \dots \quad (3.12)$$

Substitueer deze reeksen in (3.9) en (3.10), veeg dan de ϵ^n -termen bij elkaar.

$$0) \text{ Coëfficiënt van } \epsilon^0: \lambda_{tt} = \frac{EO}{T_0} \lambda_{mm} \quad (3.13)$$

Dit zijn longitudinale golven in de snaar die ons niet interesseren, neem dus de nuloplossing: $\lambda = \text{constant}$. λ is dan de specifieke lengte van de snaar bij trillingsamplitude nul.

$$1) \text{ Coëfficiënt van } \epsilon^1: \lambda \psi_{tt} = \frac{EO}{T_0} (\lambda - \gamma_0) \psi_{mm} \quad (3.14)$$

de mathematische snaarvergelijking. Oplossing is

$$\psi = \frac{\phi_0}{\epsilon} \cos km \sin \omega_0 t \quad k = \frac{\pi}{M}$$

de frequentie is

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^2 EO(\lambda - \gamma_0)}{M^2 \gamma_0 \lambda} \quad (3.15)$$

2) Coëfficiënt van ϵ^2 :

$$\eta_{tt} - \frac{EO}{T_0} \eta_{mm} = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 \frac{\phi_0^2}{\epsilon^2} (\cos 2km + \cos 2\omega t) \quad (3.16)$$

De homogene vergelijking geeft weer longitudinale golven, de particuliere oplossing stellen we

$$\eta = C_1 \cos 2\omega_0 t + C_2 \cos 2km$$

$$\text{dan} \quad C_1 = -\frac{\lambda \phi_0^2}{8\epsilon^2} \quad (3.17)$$

$$C_2 = \frac{\phi_0^2 (\lambda - l_0)}{8\epsilon^2} \quad (3.18)$$

Hiermee wordt de oplossing van het snaarprobleem, tot tweede orde benaderd,

$$\phi = \phi_0 \cos km \sin \omega_0 t \quad (3.19)$$

$$\text{en} \quad l = \lambda + \frac{1}{8} \phi_0^2 (\lambda - l_0) \cos 2km - \frac{1}{8} \lambda \phi_0^2 \cos 2\omega_0 t \quad (3.20)$$

Hiermee berekenen we de effectieve spankracht S van de snaar in het eindpunt, de inspanlengte L langs de x -as en de amplitude A van de trilling

$$S = \frac{EO}{T_0} (\lambda - l_0) \left(1 + \frac{1}{8} \phi_0^2\right) \quad (3.21)$$

$$L = \lambda M \left(1 - \frac{1}{8} \phi_0^2\right) \quad (3.22)$$

$$A = \frac{\lambda M}{\pi} \phi_0 \quad (3.23)$$

Conclusie: bij een snaar trillend met amplitude A en een frequentie ω_0

$$(3.15) \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^2}{M^2} \frac{EO(\lambda - l_0)}{l_0 \lambda}$$

hoort een inspanlengte L

$$L = \lambda M \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{M^2 \lambda^2} A^2 \right) \quad (3.24)$$

en een effectieve spankracht

$$S = \frac{E_0}{T_0} (\lambda - l_0) \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{M^2 \lambda^2} A^2 \right) \quad (3.25)$$

1.3 Snaarinklemming

Bij de temperatuurfilosofie over inklemmingen (deel I 2) heb ik onderscheid gemaakt tussen drie types inklemmingen: vast, glijdend en vast aan massa. Ook hier moet zo'n indeling gemaakt worden.

Om (3.24) en (3.25) op te lossen, mogen er twee parameters constant gekozen worden uit de grootheden M , L en S .

De mogelijkheden zijn:

1. ML , M en L constant: de massa van de snaar staat vast evenals de inklemlengte.
Komt overeen met de vaste inklemming.
2. LS , L en S constant: de inklemlengte en de spankracht staan vast.
Dit levert de glijdende inklemming op.
3. MS , M en S constant: de massa van de snaar en de spankracht staan vast.
Dit levert de snaar vastgeknoopt aan een massa op.

Ook hier een groot verschil in frequentiegedrag bij de verschillende inklemmingen.

1.3.1 ML-inklemming

Bekijk een snaar trillend met amplitude nul en eigenfrequentie ω_0

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^2}{M^2} \frac{EO(\lambda - l_0)}{l_0 \lambda}$$

De amplitude wordt nu op grootte A gebracht onder constante M en L. Volgens (3.24) verandert dan λ tot een waarde λ' volgens

$$\lambda' \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{M\lambda'} \right)^2 A^2 \right) = \lambda \quad (3.26)$$

De eigenfrequentie ω_A bij amplitude A bedraagt dus (benaderd onder de veronderstelling dat de effecten klein zijn)

$$\omega_A^2 \approx \omega_0^2 + \frac{1}{8} \frac{\pi^4 EO}{ML^3} A^2 \quad (3.27)$$

Een frequentieverhoging kwadratisch met de amplitude van de trilling.

1.3.2 LS-inklemming

Neem weer een snaar trillend met amplitude nul.

$$(3.15) \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^2}{M^2} \frac{EO(\lambda - l_0)}{l_0 \lambda}$$

$$(3.24) \quad L = \lambda M$$

$$(3.25) \quad S = \frac{EO}{T_0} (\lambda - l_0)$$

Bij een amplitude A met constant gehouden L en S volgt voor de aangepaste λ'

$$(\lambda' - l_0) \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi A}{M\lambda'} \right)^2 \right) = (\lambda - l_0) \quad (3.28)$$

en voor de nieuwe massa M'

$$\lambda' M' \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi A}{M' \lambda' l} \right)^2 \right) = \lambda M \quad (3.29)$$

Met enig rekenwerk en benaderd, resulteert dit in een eigenfrequentie ω_A bij amplitude A van

$$\omega_A^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\pi^2}{L^2} A^2 \right) \quad (3.30)$$

Een frequentieverlaging kwadratisch met de amplitude.

1.3.3 MS-inklemming

Bij amplitude nul geldt:

$$(3.15) \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^2}{M^2} \frac{EO(\lambda - l_0)}{l_0 \lambda}$$

$$(3.25) \quad S = \frac{EO}{T_0} (\lambda - l_0)$$

Bij amplitude A met constant gehouden M en S is de aangepaste waarde λ'

$$(\lambda' - l_0) \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi A}{M \lambda' l} \right)^2 \right) = (\lambda - l_0) \quad (3.31)$$

zodat dan de eigenfrequentie ω_A is

$$\omega_A^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{L^2} A^2 \right) \quad (3.32)$$

Een frequentieverlaging kwadratisch met de amplitude van de trilling.

1.3.4 Overzicht

De relatieve frequentieverschuiving door het amplitude-effect in tabel gebracht (berekend bij ordegetal 1)

type	$\frac{\Delta f}{f}$	$\frac{\Delta f}{f}$ bij $\frac{A}{L} = 10^{-3}$
vast, ML	$\frac{1}{16} \frac{\pi^2 E_0}{S} \left(\frac{A}{L} \right)^2$	ca.: 300 ppm
glijdend, LS	$-\frac{3}{16} \pi^2 \left(\frac{A}{L} \right)^2$	2 ppm
aan massa, MS	$-\frac{1}{16} \pi^2 \left(\frac{A}{L} \right)^2$	0.6 ppm

We moeten er wel aan denken dat de ML-inklemming een absolute frequentieverschuiving, onafhankelijk van de spankracht, geeft; de LS- en MS-inklemming geven relatieve verschuivingen, in absolute zin verschuivingen afhankelijk van de spankracht!

De beste opstelling is ook hier weer de snaar vast aan een vrijhangende massa!

1.4 Amplitude-afhankelijke resonantiekromme

Gewapend met de kennis van de amplitude-afhankelijke eigenfrequentie van de snaar, kan men trachten de resonantiekromme (zie deel II, 1.2) te schetsen.

De kwaliteitsfactor Q zal niet veel veranderen, noch de vorm van het trillingspatroon.

Ik verwacht voor de MS-inklemming de resonantiekromme van fig. 3.2.

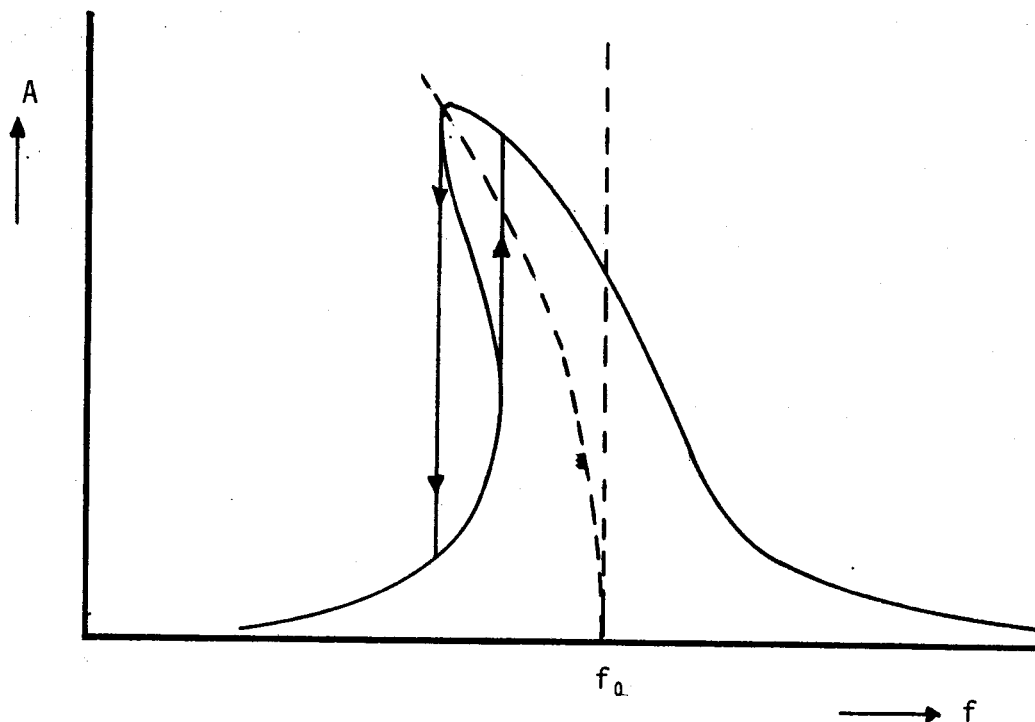


fig. 3.2 Resonantiekromme, amplitude-afhankelijk

In deze resonantiekromme kan de snaar bij één frequentie twee verschillende amplitudes hebben, er is dus een instabiliteit. Dit effect is bekend uit de mechanica waar niet-harmonische trillingen van niet-lineaire veren vaker voorkomen [13]; men spreekt in het Duits over "Kipperscheinungen". Bij meting zal de snaaramplitude de rechte lijnen volgen in de aangegeven richting.

Dezelfde soort resonantiekromme geeft de glijdende inklemming; de vaste inklemmingskromme helt naar de andere kant over.

2. Randvoorwaarden

De berekeningen voor de eigenfrequentie zijn tot nu toe uitgevoerd met als uiteinden van de snaar, onwrikbaar vaste punten. Natuurlijk is dit niet mogelijk.

Beter is het de eindpunten op te vatten als massa-veer-systemen, met impedantieberekeningen krijgt men dan correctietermen.

Ik bekijk de snaar gespannen tussen twee massa's vrij in de ruimte. De berekening gaat weer uit van de mathematische snaar.

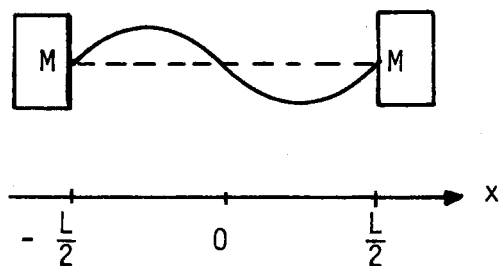


fig. 3.3 Snaar tussen massa's

$$\mu U_{tt} = S U_{xx}$$

De randvoorwaarden zijn nu

$$S U_x = M U_{tt} \quad \text{in } x = -\frac{L}{2}$$

$$-S U_x = M U_{tt} \quad \text{in } x = \frac{L}{2}$$

(3.33)
waarbij M = massa van de
inklemming

Voor de asymmetrische oplossing

$$U^a(x,t) = A \sin kx \sin \omega t$$

met

$$\omega^2 = k^2 \frac{S}{\mu}$$

leidt (3.33) tot de voorwaarde

$$\tan \frac{1}{2} kL = -\frac{1}{2} \frac{\mu L}{M} \frac{1}{\frac{1}{2} kL} \quad (3.34)$$

De voorwaarde is te zien in fig. 3.4.

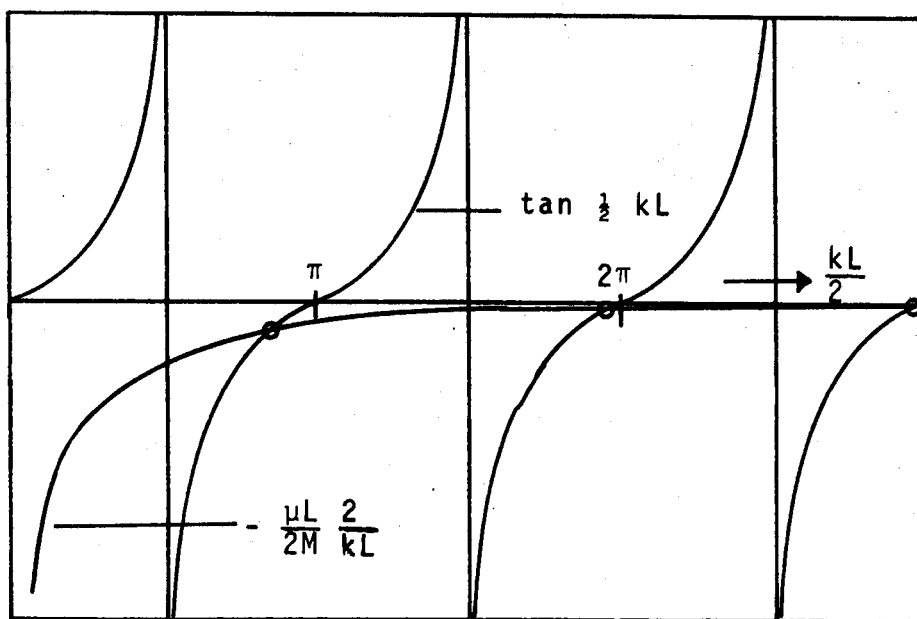


fig. 3.4 Het golfgetal van de snaar vast aan massa

Benadering geeft, ook voor de symmetrische oplossing,

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\mu L}{M} \frac{2}{n^2 \pi^2} \right) \quad (3.35)$$

n = ordegetal van de trilling.

3. Magneetveld

De Naïeve theorie (deel II, 1.3) gaat uit van een magneetveld met magnetische inductie B(x)

$$B(x) = B_0 \sin \frac{\pi m}{L} x$$

Zo'n magneetveld is moeilijk te realiseren, in het algemeen echter kan men een willekeurig magneetveld ontwikkelen naar eigenfuncties van de ongedempte mathematische snaar. Dit komt neer op een Fourier-ontwikkeling van de magnetische inductie

$$B(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \frac{\pi m}{L} x + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{\pi m}{L} x \tag{3.36}$$

Volddoet B(x) aan de randvoorwaarde van de snaar B(0) = B(L) = 0 dan

$$B(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{\pi m}{L} x \tag{3.37}$$

Deze aandrijfkracht geeft alleen aanleiding tot het ontstaan van hogere harmonischen in de trilling, die eventueel weggefilterd kunnen worden; de resonantiefrequentie wordt niet gestoord!

4. Demping

Demping van de trilling geeft (deel II, 1.2) een frequentieverlaging van de vrije eigenfrequentie, de resonantiefrequentie van de gedwongen trilling blijft echter gelijk aan de eigenfrequentie van de vrije ongedempte mathematische snaar. Wel voor de amplitude van de trilling is de demping van belang.

4.1 Luchtdemping

Het omgevende medium (in het algemeen lucht) van de snaar zal de snaartrilling proberen te dempen. Dit gebeurt door wrijving met de snaar, maar ook door transport van trillingsenergie van de snaar naar de omgeving. Het tweede effect lijkt mij belangrijker. Verder zij verwezen naar de literatuur [14].

Er is nog een effect. Het medium zal rond de snaar een grenslaag opbouwen die als het ware vast aan de snaar zit, het lijkt dus alsof de massa van de snaar toeneemt. Ten opzichte van vacuum zal een frequentieverlaging optreden; de grootte hiervan is te schatten als (ook [14])

$$f \approx f_0 \left\{ 1 - \frac{\rho_L}{2\rho_S} \right\} \quad (3.38)$$

ρ_L = dichtheid medium

ρ_S = dichtheid snaar

4.2 Electromagnetische demping

De snaar beweegt in een magneetveld en is uitwendig belast door

een weerstand, daardoor zal ook electromagnetische demping optreden. Uit het vervangingsschema (deel II, 1.3) in fig. 3.5 blijkt dat als de uitwendige belastingsweerstand R_u

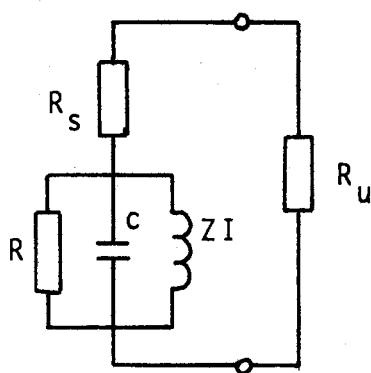


fig. 3.5 Belaste snaar

maar groot is ten opzichte van R , de electromagnetische demping bij gebruik in de brug te verwaarlozen is t.o.v. de demping van de vrij trillende snaar.

4.3 Demping door de opstelling

Over het meetrillen van de opstelling is weinig zinnigs te vertellen. Zorg alleen dat er geen eigenfrequenties van de opstelling overeenkomen met die van de snaar zodat er zeker geen resonantieverschijnselen zijn.

4.4 Inwendige demping

De deformatie-energie van de snaar kan verloren gaan en zodoende demping van de snaartrilling tot gevolg hebben. Deformatie van de snaar treedt vooral op aan de uiteinden waar het buiggedrag overheerst.

In fig. 3.6 is een stukje snaar afgebeeld; de bovenkant van de snaar is verkort en dus warm geworden, de benedenkant uitgerekt en dus koud geworden.

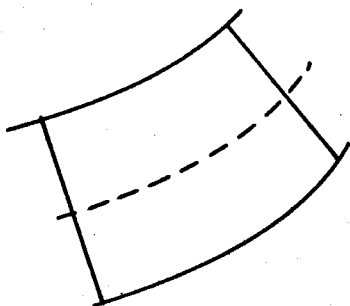


fig. 3.6 Gedeformeerd stuk snaar

Als nu het warmtegeleidingsvermogen van het snaarmateriaal zodanig is dat deze warmteverschillen elkaar compenseren is er sprake van inwendige demping.

De grootte van de deformatie-energie kunnen we afschatten uit de benadering van de fysische snaar (deel II, 3,2). Voor een snaar trillend met amplitude A vindt men een totale buigingsenergie W bij volle uitslag van naar schatting

$$W \approx \frac{\pi^2 EI A^2}{L^3} \quad (3.39)$$

deze energie zou verloren kunnen gaan in $\frac{1}{4}$ periode van de trilling.

De energie V opgeslagen in de snaartrilling is de kinetische energie op het moment van nuldoorgang van de snaar.

$$V \approx \frac{1}{4} \mu L A^2 \omega^2 \quad (3.40)$$

Beide energieën hangen af van de tijdsafhankelijke amplitude A , de energiebalans van de snaar is

$$V_A A_t = -4fW \quad (3.41)$$

hiermee volgt uit (3.39) en 3.40)

$$A \approx A_0 \exp\left\{-\frac{4\pi EI}{\mu \omega L^4} t\right\} \quad (3.42)$$

(zie deel II, 1.1)

Ofwel

$$\Lambda \approx \frac{4\pi EI}{\mu \omega L^4} \quad (3.43)$$

De kwaliteitsfactor Q is dan

$$Q \approx \frac{\mu \omega^2 L^4}{2\pi EI} \quad (3.44)$$

Dit is het ongunstigste geval, namelijk alle energie gaat verloren. De aangegeven kwaliteitsfactor Q is dus de minimale waarde als er alleen inwendige demping is.

deel 4

constructie
van
een
snaarweger

D E E L IV

CONSTRUCTIE VAN EEN SNAARWEGER

Samenvatting

In dit deel probeer ik een leidraad te geven voor de constructie van een snaarweeginstrument. Aan het instrument worden slechts enkele eisen gesteld:

- de te meten kracht is maximaal 10 N;
- de nauwkeurigheid moet zo hoog mogelijk zijn, zeker beter dan 1% van de volle schaal;
- de meettijd mag niet te groot zijn, tot 10 seconden lijkt redelijk.

Overigens, mijn keuzes en ontwerpen zijn zeker niet bindend.

1. De snaaropstelling

Uit temperatuur- en amplitudegedrag (deel I, 2.4 resp. deel III, 3.4) blijkt een inklemming van het type "vrijhangend aan massa" voordelen te hebben en mijn voorkeur gaat er ook naar uit. De frequentie van de snaar voldoet aan

$$f = f_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{L^2} A^2 - \frac{2\mu L}{M n^2 \pi^2} - \frac{\rho L}{2\rho_s} \right) + \frac{2n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (4.1)$$

Deze formule is een samenvatting van de belangrijkste invloeden die bekeken werden in de delen II en III.

$$f_0 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad (4.2)$$

De snaar hangt vrij, voorgespannen met een kracht S_0 , die een gevolg is van het gewicht van de voorspanmassa M . Triviaal is dus

$$S_0 = Mg \quad (4.3)$$

Noemen we de te meten kracht in het vervolg F dan wordt (4.2)

$$f_0 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S_0 + F}{\mu}} \quad (4.4)$$

In (4.1) komt bij de relatieve fouttermen ook $-\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L}$ voor, dit is de afwijking van de eigenfrequentie van de mathematische snaar veroorzaakt door lengteveranderingen.

Lengteveranderingen vinden hun oorzaak in temperatuur en rek van de snaar

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha T + \frac{S_0 + F}{E_0} \quad (4.5)$$

α = lineaire uitzettingscoëfficiënt.

2. De snaar

2.1 Materiaalkeuze

Het beste materiaal waarvan de snaar gemaakt wordt moet voldoen aan:

1. kleine uitzettingscoëfficiënt α
2. grote elasticiteitsmodulus E
3. grote treksterkte σ_t
4. kleine soortelijke massa ρ

Ad 2. daarentegen moet wel $\frac{EI}{\mu}$ weer klein zijn.

Materiaalonderzoek heb ik verder niet gepleegd, ik heb me (misschien uit eigendunk) beperkt tot staal.

Voor staal vindt men de volgende tabelwaarden:

α	: ca.	12	10^{-6}	$1/^\circ\text{C}$	
E	: ca.	2	10^{11}	N/m^2	
σ_t	: tot	2,5	10^9	N/m^2	is bereikbaar
ρ	: ca.	7.9	10^3	kg/m^3	

2.2 Doorsnede

De maximaal toelaatbare belasting stel ik, uit veiligheids-overwegingen, op minder dan de helft van de treksterkte.

Bij een speciale staalsoort, waarvan men snaren maakt, ligt de treksterkte op ca. $2.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

Het te ontwikkelen meetinstrument moet 10 N kunnen meten; is ook de voorspankracht 10 N, dan moet het oppervlak van de snaar ca. 0.02 mm^2 zijn.

2.3 Vorm van de doorsnede

De keus ronde snaar of een bandje is niet moeilijk. Een bandje heeft een voorkeursrichting voor de trilling zodat het polarisatievlak van de trilling vastligt. Tevens is de invloed van de buiging minder, zie deel II, 3.2. De verhouding breedte/dikte van het bandje mag niet al te groot gemaakt worden; de spankracht zou over de doorsnede niet uniform verdeeld kunnen worden.

Voor een oppervlak van 0.02 mm^2 lijkt een bandje met afmetingen 0.25 mm bij 0.08 mm redelijk.

2.4 Lengte

Omdat ik frequentie-tellen c.q. kwadrateren wil toepassen, moet de frequentie van de trilling hoog zijn.

Nu is

$$(4.2) \quad f_0 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

Voor een stalen snaar, $0.25 \times 0.08 \text{ mm}^2$, belast met 20 N

$$f \approx \frac{n}{6L} \text{ kHz} \quad (4.6)$$

Voor dezelfde snaar is de extra buigingsterm

$$\Delta f = \frac{2n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \approx \frac{2n}{9L^2}$$

en dit wil ik klein houden.

Kiest men $L = 10 \text{ cm}$ en $n = 6$ dan

$$f \approx 10 \text{ kHz}$$

en $\Delta f \approx 133 \text{ Hz}$

De term $\frac{1}{8} \frac{\pi^2}{L^2} A^2$ geeft geen enkele moeilijkheid als de amplitude van de trilling maar kleiner is dan 10^{-3} maal de lengte, dus $A < 0.1 \text{ mm}$.

De term $\frac{2\mu L}{M n^2 \pi^2}$ is met alle gegevens af te schatten als ca. $8 \cdot 10^{-7}$, ook geen probleem vergeleken bij andere onnauwkeurigheden. Er blijft dus over

$$f = f_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{\rho_L}{2\rho_s} \right) + 133 \tag{4.7}$$

In lucht is ook de term $\frac{\rho_L}{2\rho_s} < 10^{-5}$ en dus te verwaarlozen

bij de te verwachten nauwkeurigheid van de frequentieverwerking (overigens een constante invloed en dus niet erg).

$$f = f_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} \right) + 133 \tag{4.8}$$

3. Methode

In (4.8) blijft over de term $\frac{\Delta L}{L}$

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha T + \frac{S}{E_0}$$

afgeschat

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 10^{-5} T + \frac{S}{4} 10^{-3}$$

Sluit men temperatuursverschillen van meer dan 5 °C uit, dan is de grootste invloed te verwachten van de rek van de snaar.

$$f \approx f_0 \left(1 - \frac{1}{8} S 10^{-3} \right) + 133 \tag{4.9}$$

Hierdoor hebben alle andere meetmethoden (deel I, 1.2) dan de absolute meting, al of niet met lengtemeting, geen zin als we een digitale uitgang wensen.

Compensatie voor rek is ook electronisch mogelijk!

4. Oscillator

De brug (deel I, 3.3) is juist gedimensioneerd als

$$R_S R_2 = R_3 R_1$$

en $R_1 = R_S$

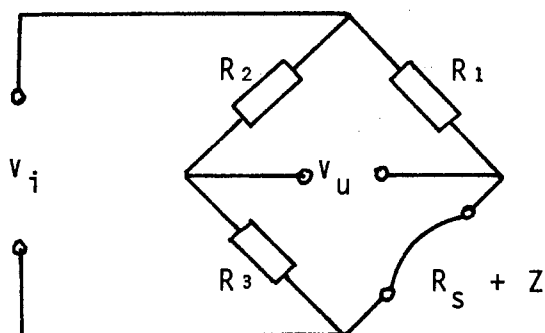


fig. 4.1 Brug

Dan is weliswaar de uitgangsspanning v_u van de brug maar de halve inductiespanning, maar de verhouding $\frac{v_u}{v_i}$, v_i is ingangsspanning, is maximaal.

R_2 en R_3 kunnen groot gekozen worden.

In de praktijk:

$$R_S = R_1 \approx 5\Omega \quad R_2 = R_3 \approx 500\Omega$$

(aangenomen dat de inductiespanning klein is).

Een oscillator verkrijgt men door een verschilversterker tussen ingang en uitgang te plaatsen. Fig. 4.2

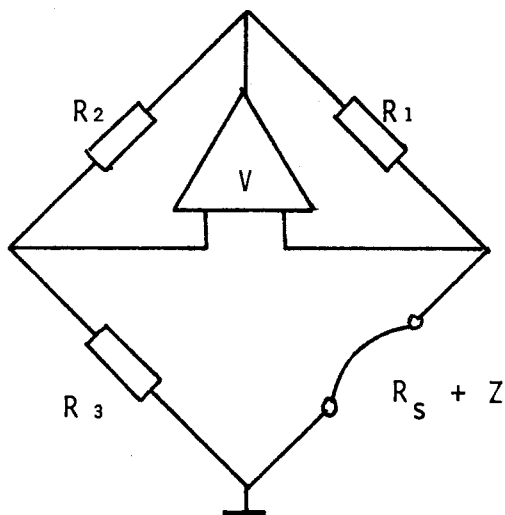


fig. 4.2 Snaaroscillator

Afhankelijk van de demping en toegepaste magneten moet de versterking V gekozen worden. Normaal $V = \text{ca. } 1000$.

De eigenschappen van de zo verkregen oscillator kunnen berekend worden uit de versterker gegevens en het vervangingsschema van de snaar (deel II, 1.3).

Bij de oscillator schakeling hoort nog een amplitudebegrenzing of regeling. Om de amplitude van de snaartrilling constant te houden moet de uitgangsspanning van de oscillator geïntegreerd worden om een signaal te krijgen dat die amplitude representeert.

Omdat de amplitude van de snaartrilling hier niet meer terzake doet zolang ze klein is, kan volstaan worden met een begrenzing.

5. Verwerking van de frequentie

Met het electronisch schema van fig. 4.3 kan een krachtmeter volstaan.

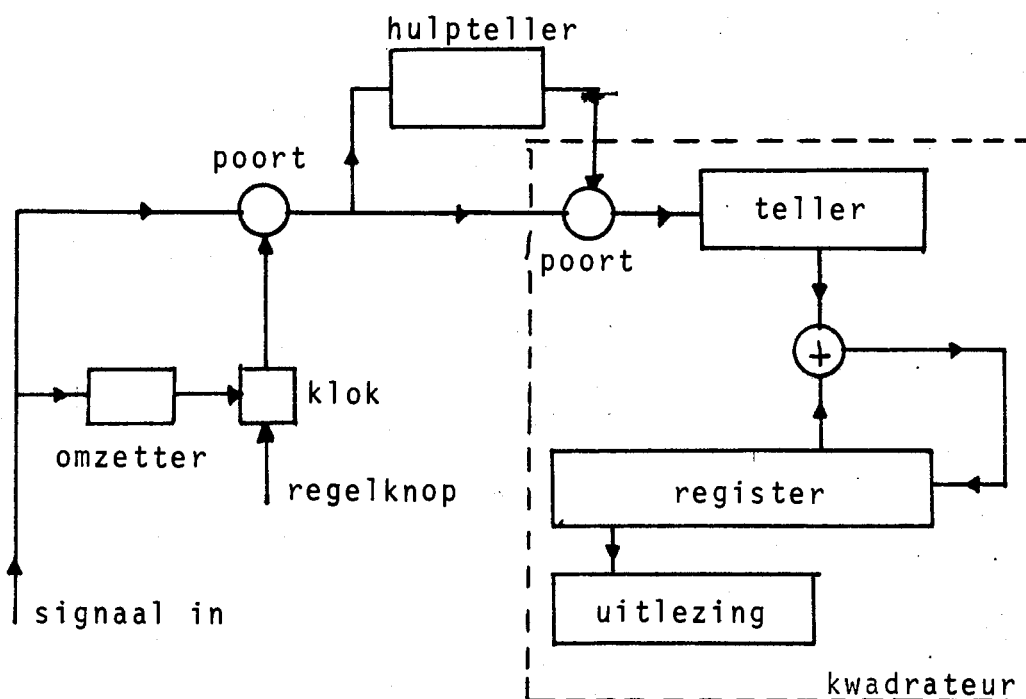


fig. 4.3 Frequentieverwerking

Het signaal van de oscillator gaat naar de ingangspoort van de schakeling; deze poort wordt gestuurd door een klok. De klok is regelbaar in een beperkt traject. Hetingangssignaal levert via de omzetter een gelijkspanningssignaal analoog

met de frequentie, en dus met de spankracht. Is de frequentie hoog, dan gaat de klok langzamer; aldus compenseert men voor de rekterm van de snaarfrequentie, zie (4.9).

Staat de ingangspoort open, dan moeten er eerst genoeg pulsen in de hulpteller aankomen voordat de poort naar de kwadratuur opengaat.

De kwadratuur is al beschreven in deel I, 4.2.

De hulpteller zorgt dus voor het aftrekken van het buigingsaandeel in de frequentie (zie (4.9)).

Een handige dimensionering van de klok krijgt men door als voorspangewicht van de snaar 10 N te kiezen en de klok zo af te regelen dat de uitlezing bij de nul-weging precies 100.000 aangeeft. Gemakkelijker is het bij de uitlezing het hoogste significante cijfer verkeerd aan te sluiten, zo dat een 1 aangegeven wordt als 0, een 2 als 1, etc.

De meting zoals nu beschreven is dus een sequentiële vergelijkingsmeting. Het getal dat afgelezen wordt na de meting geeft direct de kracht aan.

De nauwkeurigheid van het hele systeem schat ik niet al te hoog. Fouten in de orde van grootte van $5 \cdot 10^{-4}$ zijn uiterst moeilijk te voorkomen.

6. Schets mechanische uitvoering

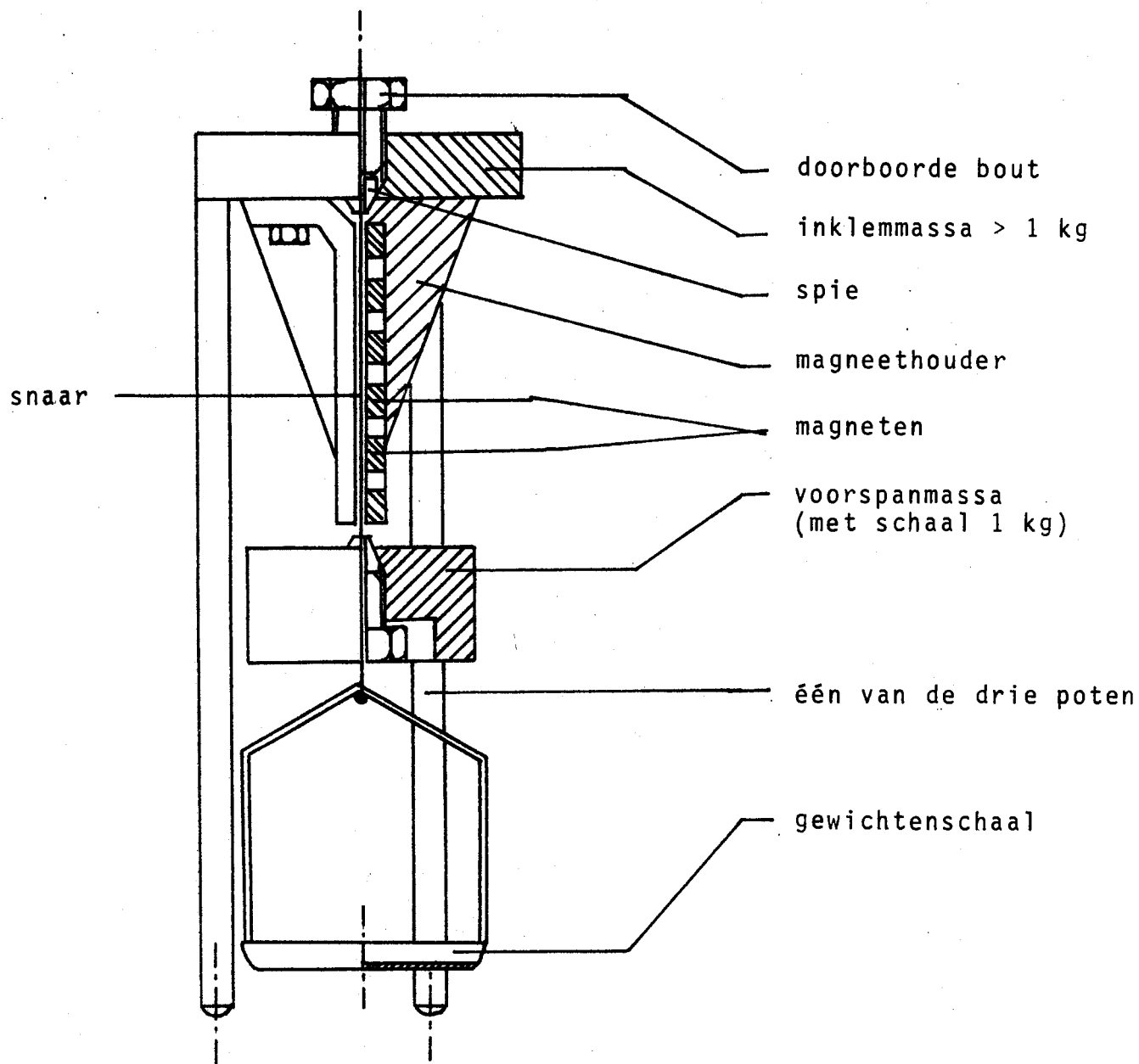


fig. 4.4 Mechanische uitvoering

7. Nawoord

Ik hoop een duidelijk beeld gegeven te hebben van de complexe problemen die opduiken bij de constructie van een snaarweger. Niet voor niets spreekt Prof. Ed. Gerecke van

"ein erfinderischer Kopf, ein guter Mechaniker,
ein Elektroniker und - last but not least -
ein Theoretiker, die nötig waren zur Lösung
dieses elektrisch-mechanischen Problems"

| 5 |

Er zullen ook nog wel enkele van de genoemde wetenschappers nodig zijn om een goede precisie-snaarweger te construeren.

Tot het zover is, lijkt mij de in dit deel beschreven weger erg geschikt om ervaring op te doen.

De nauwkeurigheid van de metingen die ermee gedaan kunnen worden, ligt waarschijnlijk tussen 1 en 0.1 ‰, bij goede dimensionering. Veel meer winst in nauwkeurigheid zie ik nog niet zo gemakkelijk zitten.

deel 5

meting
van
de
damping

D E E L V

=====

METING VAN DE DEMPING

Samenvatting

Belangrijk voor het goed functioneren van de snaar-oscillator is de kwaliteitsfactor van de snaar. De frequentievastheid van de oscillator wordt erdoor bepaald.

De kwaliteitsfactor kan gemeten worden uit de resonantiekromme, uit de vermogensbalans van de trilling, of door het vrij uit laten trillen van de snaar.

Het blijkt dat de door mij gemeten kwaliteitsfactor niet afhangt van de amplitude van de trilling. De frequentie-afhankelijkheid daarentegen is zeer grillig.

1. De Meetopstelling

Speciaal voor meting van de demping is een snaarinklemming met messen geconstrueerd; de handigste opstelling in verband met veranderingen van snaar, magneten, etc. Zie fig. 5.1. Een nadeel is dat het frequentiegedrag met deze inklemming niet goed te meten is.

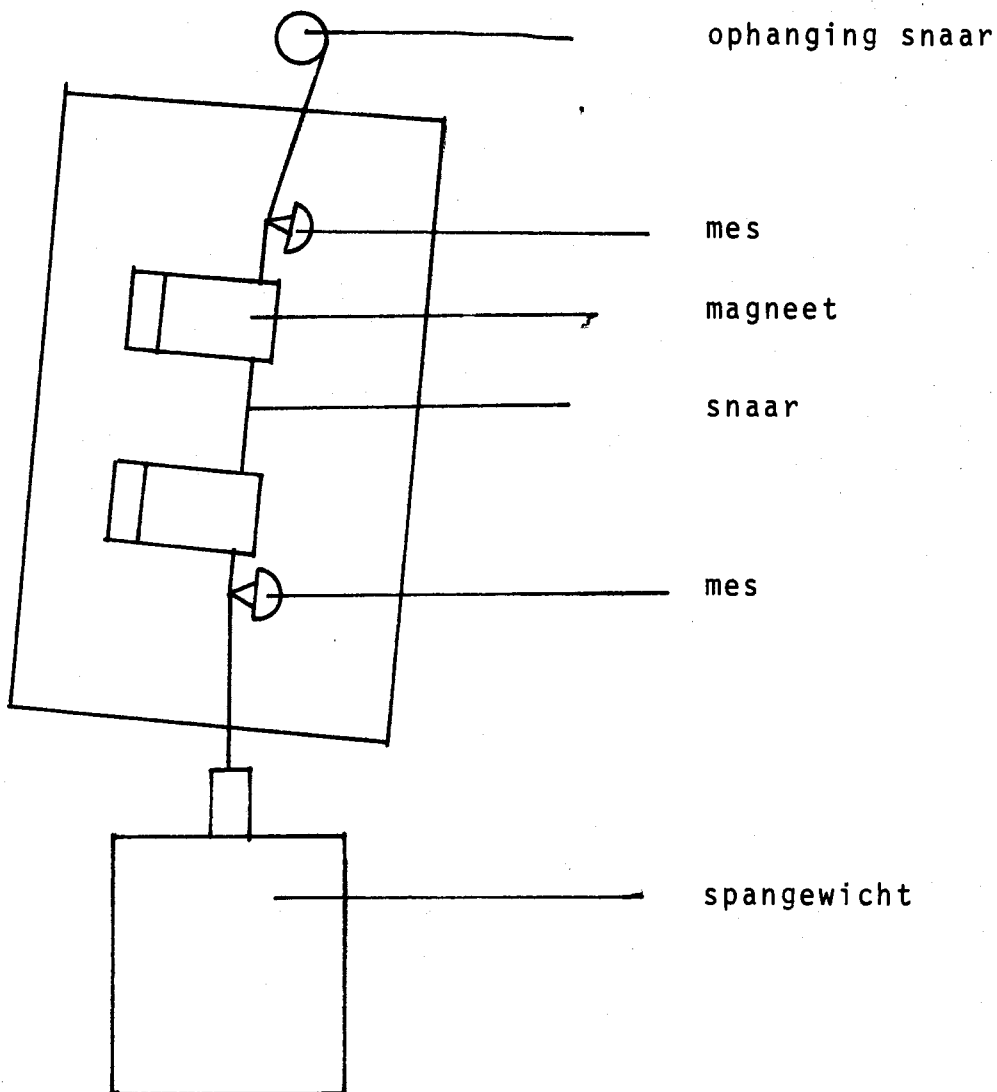


Fig. 5.1 De snaarinklemming

De meetopstelling is te zien in fig. 5.2.

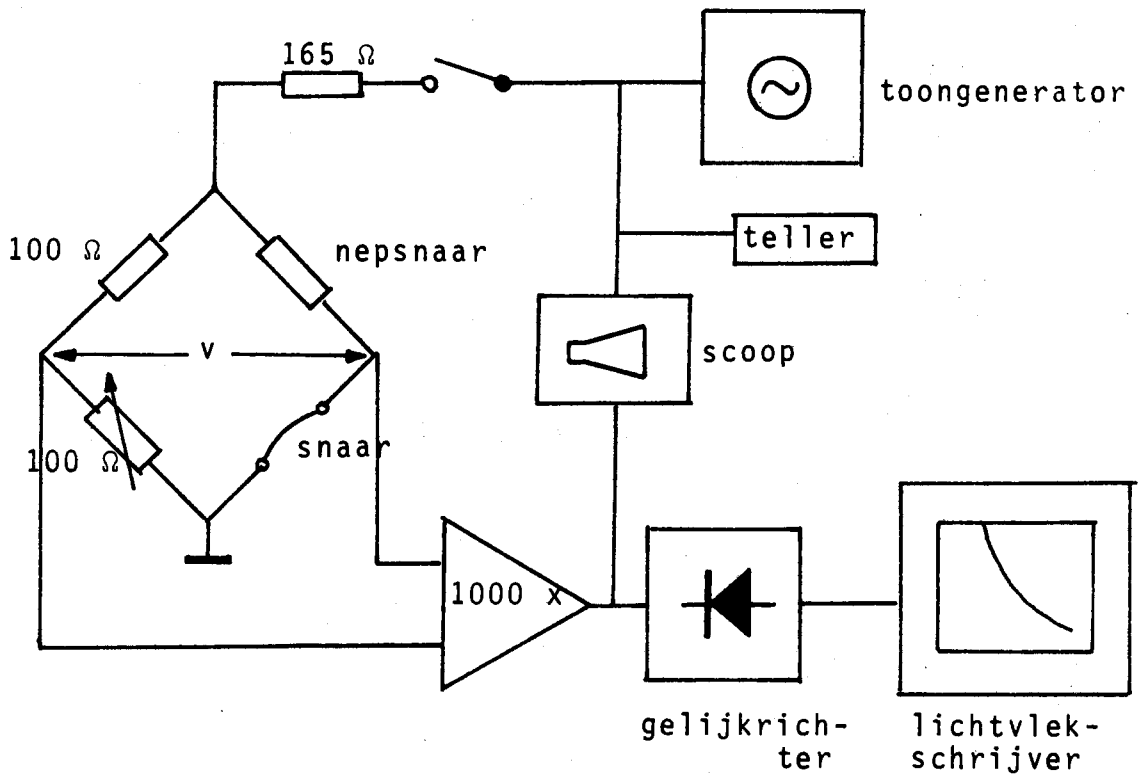
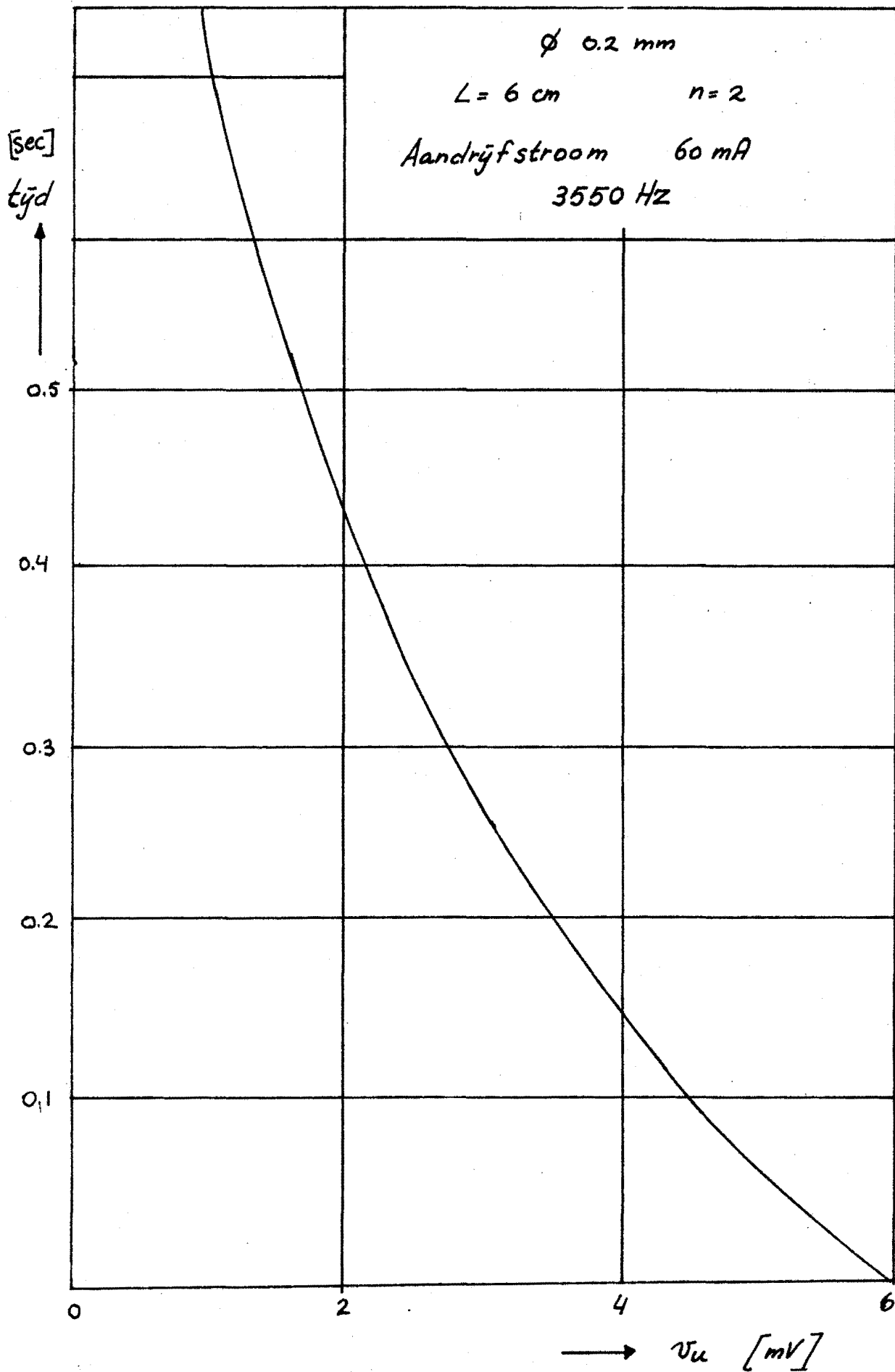


Fig. 5.2 de meetopstelling

De snaarbrug kan opgevat worden als een vierpool en wordt ook als zodanig doorgemeten. De werkwijze bij een meting is als volgt:

1. stem de toongenerator zo af dat de brug resoneert, op de dual-trace-scoop is het faseverschil te zien.
2. Open de schakelaar; de brug trilt vrij uit en de amplitude van het uitgangssignaal wordt getekend door de lichtvlekschrijver; een voorbeeld van zo'n meting is fig. 5.3.

Fig. 5.3 Meting van vrij uittrillen



2. Amplitudegedrag

Bij de afleidingen van formules voor het dempingsgedrag is aangenomen dat de grootte Λ amplitude-onafhankelijk is (zie deel II, 1.1). Dan geldt bij het vrij uittrillen voor de amplitude A van de snaar

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \tag{5.1}$$

en dus voor de amplitude \hat{v} van de brugspanning v

$$\hat{v} = \hat{v}_0 e^{-\Lambda t} \tag{5.2}$$

Een controle hierop vindt men door het spanningsverloop logaritmisch uit te zetten, een voorbeeld is fig. 5.4.

Bij alle metingen die ik gedaan heb, werd een rechte gevonden; enkele niet-reproduceerbare afwijkingen zijn vermoedelijk terug te voeren op torsie in de snaar waardoor het polarisatievlak van de trilling veranderde tijdens de meting.

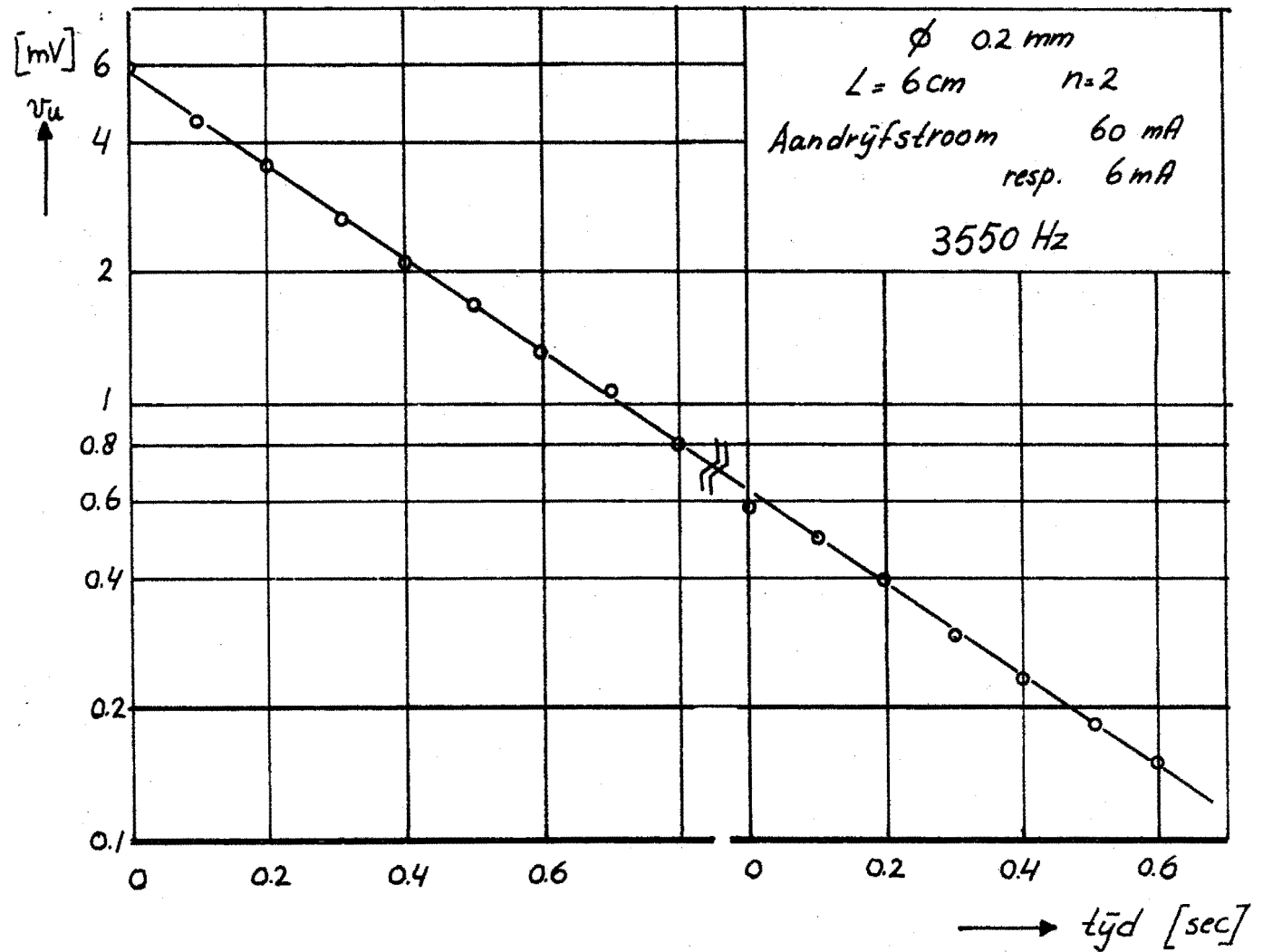


Fig. 5.4 Spanningsverloop bij vrij uittrillen
(2 metingen!)

Conclusie:

De kwaliteitsfactor van de snaar is, in het gebied dat gebruikt wordt voor snaarwegers, niet amplitude-afhankelijk.

3. Frequentiegedrag

De uitdempcostante Λ is berekend uit de helling van rechten zoals fig. 5.4.

De gevonden waarden zijn uitgezet in fig. 5.5 en fig. 5.6. Gemeten werd bij gewone atmosferische druk in lucht en in vacuum.

Uit het grillig gedrag van de misschien wat optimistisch getrokken lijnen zijn alleen algemene zaken af te leiden:

1. De grote veranderingen zijn te verklaren als resonanties van de opstelling.
2. De minima van de bij vacuum gemeten krommen representeren de inwendige demping van de snaar.
3. Het verschil lucht - vacuum zal de demping ten gevolge van luchtwrijving en energietransport zijn.

Getallen noemen vind ik speculatief.

Fig. 5.5 Uitdempconstante

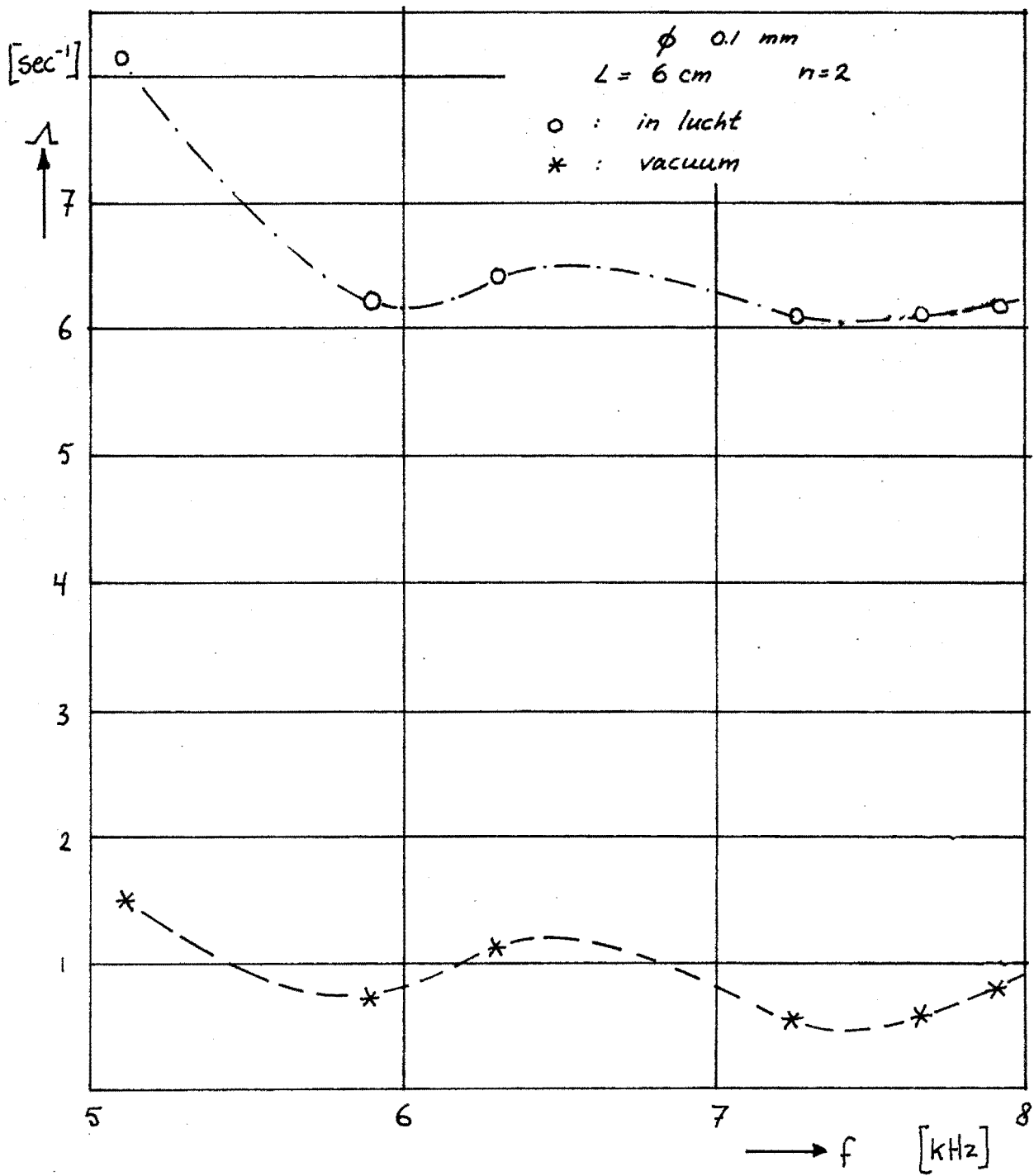
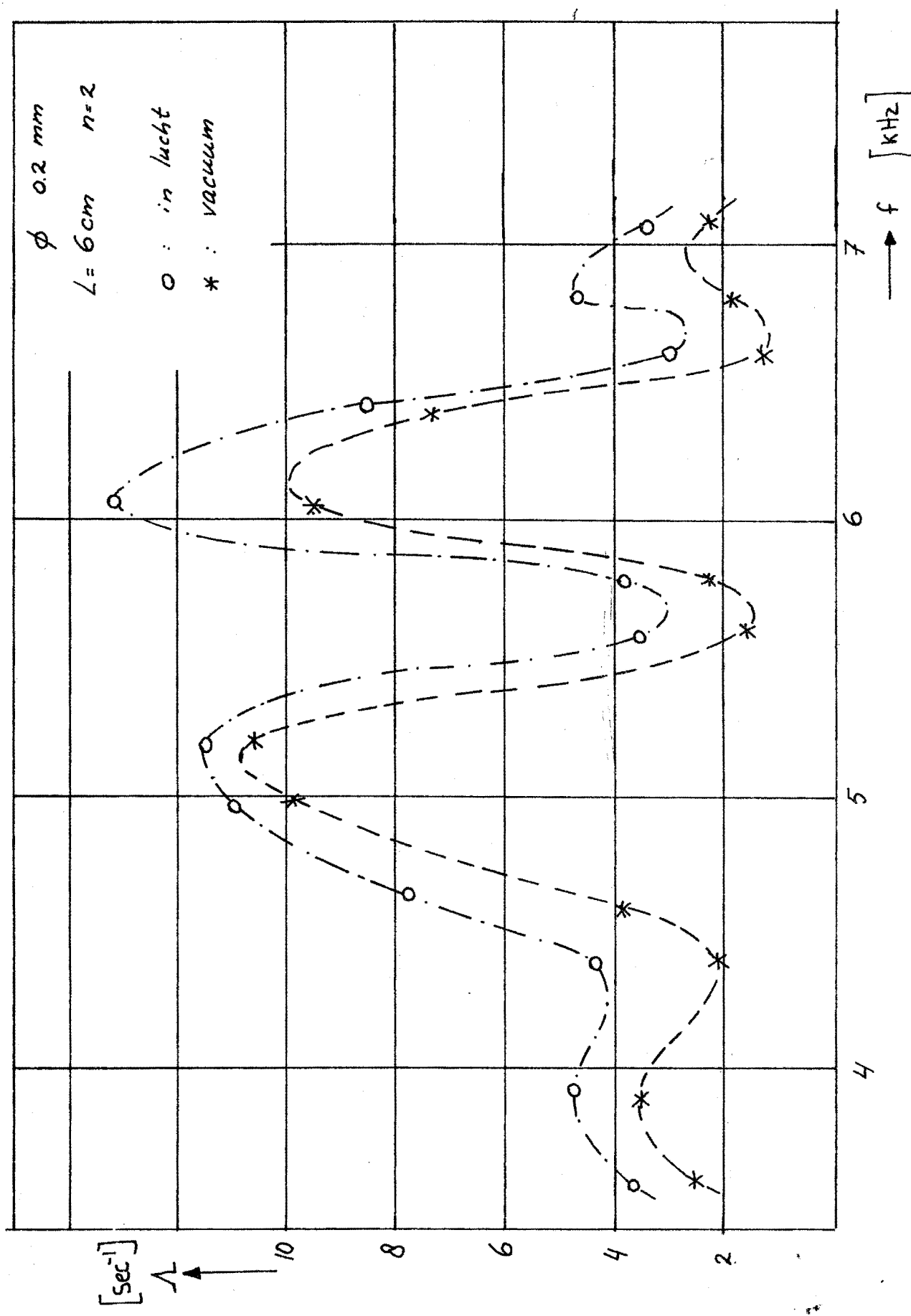


Fig. 5.6 Uitdempconstante



Tips voor opvolger

- Probeer de opstelling resonantievrij te maken.
- Meet de demping uitgebreid, ook materiaalinvloed.
- Bepaal het juiste frequentiegedrag.
- Probeer een resonantiekromme te meten, vooral de te verwachten overhang.
- Materiaalkeuze uitvoeren.
- Ontwikkel de in deel IV beschreven snaarweger.